数理解析研究所講究録 1393 巻 2004 年 9-16

Stiefel多様体間の同変写像の写像度

大阪大学大学院理学研究科・井上 明 (Akira Inoue)
Department of Mathematics,Graduate School of Science
Osaka university

1 序

直交群 $O(k)$ は Stiefel 多様体 $V_k(\boldsymbol{R}^m)$ に通常の行列の積により自由に作用する. この作用を部分群 $(\boldsymbol{Z}_2)^k$ に制限すると $V_k(\boldsymbol{R}^m)$ は自由 $(\boldsymbol{Z}_2)^k$ 空間となる. 本稿では E. Fadell - S. Husseini や J. Jaworowski により定義された ideal-valued cohomological index theory を用いて実 Stiefel 多様体間の $(\boldsymbol{Z}_2)^k$ 写像の写像度を考える. また, 複素 Stiefel 多様体 $V_k(\boldsymbol{R}^m)$ にはユニタリ群 $U(k)$ が通常の行列の積により自由に作用するが, この作用を p を素数として, 部分群 $(\boldsymbol{Z}_p)^k$ に制限すると $V_k(\boldsymbol{R}^m)$ は自由 $(\boldsymbol{Z}_p)^k$ 空間となる. そうしてこのときの複素 Stiefel 多様体間の $(\boldsymbol{Z}_p)^k$ 写像の写像度についても同様の考察を行う.

2 Index theory

G をコンパクト Lie 群, X を G-CW 複体とする. $EG \to BG$ で普遍主 G 束を表す. すると, G は $EG \times X$ に $g(e,x)=(ge,gx)$ により自由に作用する. この作用による軌道空間を $EG\times_G X$ と表す. このとき, 商写像 $p: EG\times X \to EG\times_G X$ は G をファイバーとするファイバー束となることに気をつける. X の体 $\boldsymbol{K}$ 上の Borel コホモロジーは $H_G^*(X;\boldsymbol{K}) = H^*(EG\times_G X;\boldsymbol{K})$ により定義される. ここで, $H^*(\ )$ は特異コホモロジーである. $c_X : X \to *$ を 1 点空間への定値写像としたとき, $H^*(BG;\boldsymbol{K})$ のイデアルである X の *G-index* を準同型 $\bar{c}_X^* = (\mathrm{id}\times_G c_X)^*$: $H^*(BG;\boldsymbol{K}) = H_G^*(*;\boldsymbol{K}) \to H_G^*(X;\boldsymbol{K})$ の核で定義し, $\mathrm{Ind}^G(X;\boldsymbol{K})$ で表す. 特に X に G が自由に作用するとき, $\mathrm{Ind}^G(X)$ は X への自由な G-作用に対する分類写像 $X/G \to BG$ から誘導される準同型 $H^*(BG) \to H^*(X/G)$ の核と一致する. ま

た, 整数 k に対して,

$$\mathrm{Ind}^G_k(X;\boldsymbol{K}) = \mathrm{Ind}^G(X;\boldsymbol{K}) \cap H^k(BG;\boldsymbol{K}) = \ker(\bar{c}_X^* : H^k(BG;\boldsymbol{K}) \to H^k_G(X;\boldsymbol{K})).$$

とする. 次の命題は G-index の基本的な性質である.

命題 2.1 ([2],[5]). *G-写像 $f : X \to Y$ が存在するならば, 任意の整数 k に対して,*

$$\mathrm{Ind}^G_k(X) \supset \mathrm{Ind}^G_k(Y).$$

が成り立つ.

$V_k(\boldsymbol{R}^m)$ を $\boldsymbol{R}^m$ における正規直交 k 枠全体からなる集合とし, $O(k)$ を直交群とする. すると $O(k)$ は $V_k(\boldsymbol{R}^m)$ に通常の行列の積により自由に作用する. この作用を対角成分に ± 1 が並ぶ行列からなる部分群 $(\boldsymbol{Z}_2)^k$ に制限する. すると $V_k(\boldsymbol{R}^m)$ は自由 $(\boldsymbol{Z}_2)^k$ 空間となる. また, $B(\boldsymbol{Z}_2)^k = B\boldsymbol{Z}_2 \times \cdots \times B\boldsymbol{Z}_2$ (k 個の直積) であり,

$$H^*(B(\boldsymbol{Z}_2)^k;\boldsymbol{Z}_2) = H^*(B\boldsymbol{Z}_2) \otimes \cdots \otimes H^*(B\boldsymbol{Z}_2) = \boldsymbol{Z}_2[t_1,\ldots,t_k], \text{ただし}, \dim t_i = 1$$

である.

Fadell [3] により次が得られている.

命題 2.2. *単項式 $t_1^{m-1}t_2^{m-2}\cdots t_k^{m-k}$ は $\mathrm{Ind}^{(\boldsymbol{Z}_2)^k}(V_k(\boldsymbol{R}^m);\boldsymbol{Z}_2)$ に属さない.*

特に, $\mathrm{Ind}^{(\boldsymbol{Z}_2)^k}_{\dim V_k(\boldsymbol{R}^m)}(V_k(\boldsymbol{R}^m);\boldsymbol{Z}_2) \neq H^{\dim V_k(\boldsymbol{R}^m)}(B(\boldsymbol{Z}_2)^k;\boldsymbol{Z}_2)$ である.

同様の命題が複素 Stiefel 多様体の場合にも得られる. $V_k(\boldsymbol{C}^m)$ を $\boldsymbol{C}^m$ における正規直交 k 枠全体からなる集合とし, $U(k)$ をユニタリ群とする. すると実数のときと同様に $U(k)$ は $V_k(\boldsymbol{C}^m)$ に自由に作用し, またこの作用を対角成分に 1 の p 乗根が並ぶ行列からなる部分群 $(\boldsymbol{Z}_p)^k$ に制限する. このとき $\mathrm{Ind}^{(\boldsymbol{Z}_p)^k}(V_k(\boldsymbol{C}^m);\boldsymbol{Z}_p)$ を考える. ただし, p は素数である.

まず, $p=2$ のときを考える. ファイブレーション

$$S^{2(m-k)+1} \to V_k(\boldsymbol{C}^m) \xrightarrow{\pi} V_{k-1}(\boldsymbol{C}^m) \tag{1}$$

と

$$\boldsymbol{Z}_2 \to (\boldsymbol{Z}_2)^k \to (\boldsymbol{Z}_2)^{k-1} \tag{2}$$

を考え, (2) を (1) に作用させることにより,

$$\boldsymbol{R}P^{2(m-k)+1} \to V_k(\boldsymbol{C}^m)/(\boldsymbol{Z}_2)^k \to V_{k-1}(\boldsymbol{C}^m)/(\boldsymbol{Z}_2)^{k-1}$$

を得る．

すると次のファイブレーションの可換図式

$$\begin{array}{ccc}
\boldsymbol{R}P^{2(m-k)+1} & \xrightarrow{\alpha_{m-k+1,1}} & B\boldsymbol{Z}_2 \\
{\scriptstyle i_m}\downarrow & & {\scriptstyle i_\infty}\downarrow \\
V_k(\boldsymbol{C}^m)/(\boldsymbol{Z}_2)^k & \xrightarrow{\alpha_{m,k}} & B(\boldsymbol{Z}_2)^k \\
{\scriptstyle p_m}\downarrow & & {\scriptstyle p_\infty}\downarrow \\
V_{k-1}(\boldsymbol{C}^m)/(\boldsymbol{Z}_2)^{k-1} & \xrightarrow{\alpha_{m,k-1}} & B(\boldsymbol{Z}_2)^{k-1}
\end{array}$$

が得られる．ここで $\alpha_{i,j}$ は分類写像である．コホモロジーの係数を $\boldsymbol{Z}_2$ で考えると，i_∞^* と $\alpha_{m-k+1,1}^*$ は全射であるから，$i_m^* : H^*(V_k(\boldsymbol{C}^m)/(\boldsymbol{Z}_2)^k) \to H^*(\boldsymbol{R}P^{2(m-k)+1})$ も全射となる．すると Leray-Hirsch の定理を用いることにより，可換図式

$$\begin{array}{ccc}
H^*(V_{k-1}(\boldsymbol{C}^m)/(\boldsymbol{Z}_2)^{k-1}) \otimes H^*(\boldsymbol{R}P^{2(m-k)+1}) & \xrightarrow{\varphi_m} & H^*(V_k(\boldsymbol{C}^m)/(\boldsymbol{Z}_2)^k) \\
{\scriptstyle \alpha_{m,k-1}^*\otimes\alpha_{m-k+1,1}^*}\uparrow & & {\scriptstyle \alpha_{m,k}^*}\uparrow \\
H^*(B(\boldsymbol{Z}_2)^{k-1}) \otimes H^*(\boldsymbol{R}P^\infty) & \xrightarrow{\varphi_\infty} & H^*(B(\boldsymbol{Z}_2)^k)
\end{array}$$

を得る．ここで φ_m と φ_∞ は同型写像である．すると

$$\begin{aligned}
& \alpha_{m,k}^*[t_1^{2(m-1)+1}t_2^{2(m-2)+1}\cdots t_k^{2(m-k)+1}] \\
= \; & \alpha_{m,k}^* \circ \varphi_\infty[t_1^{2(m-1)+1}t_2^{2(m-2)+1}\cdots t_{k-1}^{2(m-k+1)+1} \otimes t_k^{2(m-k)+1}] \\
= \; & \varphi_m[\alpha_{m,k-1}^*(t_1^{2(m-1)+1}t_2^{2(m-2)+1}\cdots t_{k-1}^{2(m-k+1)+1}) \otimes \alpha_{m-k+1,1}^*(t_k^{2(m-k)+1})]
\end{aligned}$$

となる．$\alpha_{m-k+1,1}^*(t_k^{2(m-k)+1}) \neq 0$ であるので，

$$\alpha_{m,k-1}^*(t_1^{2(m-1)+1}t_2^{2(m-2)+1}\cdots t_{k-1}^{2(m-k+1)+1}) \neq 0$$

を仮定すると

$$\alpha_{m,k}^*[t_1^{2(m-1)+1}t_2^{2(m-2)+1}\cdots t_k^{2(m-k)+1}] \neq 0$$

となる．したがって $t_1^{2(m-1)+1}t_2^{2(m-2)+1}\cdots t_k^{2(m-k)+1}$ は $\ker \alpha_{m,k}^*$ に属さないことが分かる．

次に p が奇素数のときを考える．このとき，$H^*(B(\boldsymbol{Z}_p)^k; \boldsymbol{Z}_p) = \boldsymbol{Z}_p[x_1, x_2, \ldots, x_k] \otimes E(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ である．ここで $\boldsymbol{Z}_p[x_1, x_2, \ldots, x_k]$ は次数 2 の生成元 x_i をもつ $\boldsymbol{Z}_p$ 係数の多項式環であり，$E(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ は次数 1 の生成元 y_i をもつ $\boldsymbol{Z}_p$ 係数の外積代数である．また，この次数つき環は可換である．すなわち $xy = (-1)^{\deg(x)\deg(y)}yx$ である．そうして，系列

$$\boldsymbol{Z}_p \to (\boldsymbol{Z}_p)^k \to (\boldsymbol{Z}_p)^{k-1} \tag{3}$$

を考えて, (3) を (1) に作用させることにより,

$$S^{2(m-k)+1}/\boldsymbol{Z}_p \to V_k(\boldsymbol{C}^m)/(\boldsymbol{Z}_p)^k \to V_{k-1}(\boldsymbol{C}^m)/(\boldsymbol{Z}_p)^{k-1}$$

を得る.

するとファイブレーションの可換図式

$$\begin{array}{ccc}
L_p^{2(m-k)+1} & \xrightarrow{\alpha_{m-k+1,1}} & B\boldsymbol{Z}_p \\
{\scriptstyle i_m}\downarrow & & {\scriptstyle i_\infty}\downarrow \\
V_k(\boldsymbol{C}^m)/(\boldsymbol{Z}_p)^k & \xrightarrow{\alpha_{m,k}} & B(\boldsymbol{Z}_p)^k \\
{\scriptstyle p_m}\downarrow & & {\scriptstyle p_\infty}\downarrow \\
V_{k-1}(\boldsymbol{C}^m)/(\boldsymbol{Z}_p)^{k-1} & \xrightarrow{\alpha_{m,k-1}} & B(\boldsymbol{Z}_p)^{k-1}
\end{array}$$

が得られる. ここで, 軌道空間 $L_p^{2(m-k)+1} = S^{2(m-k)+1}/\boldsymbol{Z}_p$ はレンズ空間であり, $\alpha_{i,j}$ は分類写像である. コホモロジーの係数を $\boldsymbol{Z}_p$ として考えると, i_∞^* と $\alpha_{m-k+1,1}^*$ は全射であるので, $i_m^* : H^*(V_k(\boldsymbol{C}^m)/(\boldsymbol{Z}_p)^k) \to H^*(L_p^{2(m-k)+1})$ も全射となる. すると Leray-Hirsch の定理を用いることにより, 可換図式

$$\begin{array}{ccc}
H^*(V_{k-1}(\boldsymbol{C}^m)/(\boldsymbol{Z}_p)^{k-1}) \otimes H^*(L_p^{2(m-k)+1}) & \xrightarrow{\varphi_m} & H^*(V_k(\boldsymbol{C}^m)/(\boldsymbol{Z}_p)^k) \\
{\scriptstyle \alpha_{m,k-1}^* \otimes \alpha_{m-k+1,1}^*}\uparrow & & {\scriptstyle \alpha_{m,k}^*}\uparrow \\
H^*(B(\boldsymbol{Z}_p)^{k-1}) \otimes H^*(B\boldsymbol{Z}_p) & \xrightarrow{\varphi_\infty} & H^*(B(\boldsymbol{Z}_p)^k)
\end{array}$$

を得る. ここで φ_k と φ_∞ は同型である. すると

$$\begin{aligned}
& \alpha_{m,k}^*[x_1^{m-1}y_1x_2^{m-2}y_2\cdots x_k^{m-k}y_k] \\
= \ & \alpha_{m,k}^* \circ \varphi_\infty[x_1^{m-1}y_1x_2^{m-2}y_2\cdots x_{k-1}^{m-k+1}y_{k-1} \otimes x_k^{m-k}y_k] \\
= \ & \varphi_m[\alpha_{m,k-1}^*(x_1^{m-1}y_1x_2^{m-2}y_2\cdots x_{k-1}^{m-k+1}y_{k-1}) \otimes \alpha_{m-k+1,1}^*(x_k^{m-k}y_k)].
\end{aligned}$$

となる. $\alpha_{m-k+1,1}^*(x_k^{m-k}y_k) \neq 0$ であるので,

$$\alpha_{m,k-1}^*(x_1^{m-1}y_1x_2^{m-2}y_2\cdots x_{k-1}^{m-k+1}y_{k-1}) \neq 0,$$

を仮定すると

$$\alpha_{m,k}^*[x_1^{m-1}y_1x_2^{m-2}y_2\cdots x_k^{m-k}y_k] \neq 0$$

となる. したがって, $x_1^{m-1}y_1x_2^{m-2}y_2\cdots x_k^{m-k}y_k$ は $\ker \alpha_{m,k}^*$ に属さないことが分かる. 以上のことより, 次の結果を得た.

命題 2.3. (1) 単項式 $t_1^{2(m-1)+1}t_2^{2(m-2)+1}\cdots t_k^{2(m-k)+1}$ は $\mathrm{Ind}^{(\boldsymbol{Z}_2)^k}(V_k(\boldsymbol{C}^m);\boldsymbol{Z}_2)$ に属さない.

特に, $\mathrm{Ind}^{(\boldsymbol{Z}_2)^k}_{\dim V_k(\boldsymbol{C}^m)}(V_k(\boldsymbol{C}^m);\boldsymbol{Z}_2) \neq H^{\dim V_k(\boldsymbol{C}^m)}(B(\boldsymbol{Z}_2)^k;\boldsymbol{Z}_2)$ である.

(2) 単項式 $x_1^{m-1}y_1x_2^{m-2}y_2\cdots x_k^{m-k}y_k$ は $\mathrm{Ind}^{(\boldsymbol{Z}_p)^k}(V_k(\boldsymbol{C}^m);\boldsymbol{Z}_p)$ に属さない.

特に, $\mathrm{Ind}^{(\boldsymbol{Z}_p)^k}_{\dim V_k(\boldsymbol{C}^m)}(V_k(\boldsymbol{C}^m);\boldsymbol{Z}_p) \neq H^{\dim V_k(\boldsymbol{C}^m)}(B(\boldsymbol{Z}_p)^k;\boldsymbol{Z}_p)$ である.

3 Stiefel 多様体間の同変写像の写像度

G をコンパクト Lie 群, M を連結な向きのついた滑らかな n 次元 G 多様体とする. さらに, M への G 作用は自由であると仮定する. すると軌道空間 M/G も多様体となり, このときその次元は $n-\dim G$ である. $p: M \to M/G$ を射影とする. M/G が体 $\boldsymbol{K}$ 上向き付け可能とする. すると p のトランスファー $p_!$ が $p_! = D_{M/G} \circ p_* \circ D_M^{-1}$ により定義できる. ここで D は Poincaré 双対同型の逆写像である. このとき, $p_!: H^n(M;\boldsymbol{K}) \to H^{n-\dim G}(M/G;\boldsymbol{K})$ は同型写像となる. またさらに, トランスファーに関して一般に次の事が知られている.

補題 3.1 ([4]). X, Y を G-CW 複体, $f: X \to Y$ を G 写像とする. また, $p_X: EG \times X \to EG \times_G X$ と $p_Y: EG \times Y \to EG \times_G Y$ を商写像とする. このとき, 次の図式が成り立つ:

$$\begin{array}{ccc} H^i(Y;\Gamma) & \xrightarrow{f^*} & H^i(X;\Gamma) \\ {\scriptstyle (p_Y)_!}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (p_X)_!} \\ H_G^{i-\dim G}(Y;\Gamma) & \xrightarrow[\bar{f}^*]{} & H_G^{i-\dim G}(X;\Gamma) \end{array}$$

ここで, Γ は可換群であり $\bar{f} = \mathrm{id} \times_G f : EG \times_G X \to EG \times_G Y$ は G 写像 $\mathrm{id} \times f : EG \times X \to EG \times Y$ から誘導される写像である.

また次の定理は本質的に [4] で与えられている.

定理 3.2 ([4]). G をコンパクト *Lie* 群とし, M, N を G が自由に作用する滑らかな連結 n 次元多様体で体 $\boldsymbol{K}$ 上向き付け可能なものとし, M/G と N/G も体 $\boldsymbol{K}$ 上向き付け可能とする. このとき次が成り立つ.

(1) $\mathrm{Ind}^G_{n-\dim G}(M;\boldsymbol{K})$ が $H^{n-\dim G}(BG;\boldsymbol{K})$ と等しくないとする. すると任意の G 写像 $f: M \to N$ に対して, $f^*: H^n(N;\boldsymbol{K}) \to H^n(M;\boldsymbol{K})$ は非自明である.

(2) $\mathrm{Ind}^G_{n-\dim G}(N;\boldsymbol{K})$ が $\mathrm{Ind}^G_{n-\dim G}(M;\boldsymbol{K})$ と等しくないとする．すると任意の G 写像 $f:M\to N$ に対して，$f^*:H^n(N;\boldsymbol{K})\to H^n(M;\boldsymbol{K})$ 単射でない．

証明．(1) $f^*:H^n(N;\boldsymbol{K})\to H^n(M;\boldsymbol{K})$ が自明となるような G 写像 $f:M\to N$ が存在したと仮定する．補題 3.1 より，$(p_M)_!\circ f^*=\bar{f}^*\circ(p_N)_!$．すると，$(p_M)_!$ と $(p_N)_!$ は同型であり，f^* が自明であることより，$\bar{f}^*:H_G^{n-\dim G}(N;\boldsymbol{K})\to H_G^{n-\dim G}(M;\boldsymbol{K})$ も自明となる．$c_M=c_N\circ f$ だから，

$$\mathrm{Ind}^G_{n-\dim G}(M;\boldsymbol{K})=(\bar{c}_M^*)^{-1}(0)=(\bar{c}_N^*)^{-1}\left(\left(\bar{f}^*\right)^{-1}(0)\right)=H^{n-\dim G}(M;\boldsymbol{K}).$$

(2) $f^*:H^n(N;\boldsymbol{K})\to H^n(M;\boldsymbol{K})$ が単射であるような G 写像 $f:M\to N$ が存在したと仮定する．補題 3.1 を再度用いることにより，$\bar{f}^*:H_G^{n-\dim G}(N;\boldsymbol{K})\to H_G^{n-\dim G}(M;\boldsymbol{K})$ も単射となる．したがって，

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}^G_{n-\dim G}(N;\boldsymbol{K}) &= \ker\bar{c}_N^*=(\bar{c}_N^*)^{-1}(0)=(\bar{c}_N^*)^{-1}\left(\left(\bar{f}^*\right)^{-1}(0)\right)=(\bar{c}_M^*)^{-1}(0)\\ &= \mathrm{Ind}^G_{n-\dim G}(M;\boldsymbol{K})\end{aligned}$$

□

命題 2.2 と定理 3.2 (1) の結果を用いると次のことが言える．

定理 3.3. $f:V_k(\boldsymbol{R}^m)\to V_k(\boldsymbol{R}^m)$ を $(\boldsymbol{Z}_2)^k$ 写像とすると，f の写像度は奇数である．

証明．$n=\dim V_k(\boldsymbol{R}^m)$ とする．命題 2.2 の結果より，$\mathrm{Ind}_n^{(\boldsymbol{Z}_2)^k}(V_k(\boldsymbol{R}^m);\boldsymbol{Z}_2)$ は $H^n(B(\boldsymbol{Z}_2)^k;\boldsymbol{Z}_2)$ と等しくない．よって，定理 3.2 (1) より，$f^*:H^n(N;\boldsymbol{Z}_2)\to H^n(M;\boldsymbol{Z}_2)$ は非自明な準同型となる． □

この定理から次の系が得られる．

系 3.4. $(\boldsymbol{Z}_2)^k$ 写像 $f:V_k(\boldsymbol{R}^m)\to V_k(\boldsymbol{R}^n)$ が存在するならば，$m\leq n$ となる．

証明．$f:V_k(\boldsymbol{R}^m)\to V_k(\boldsymbol{R}^n)$ を $(\boldsymbol{Z}_2)^k$ 写像とする．$m>n$ と仮定すると，包含写像 $i:V_k(\boldsymbol{R}^n)\to V_k(\boldsymbol{R}^m)$ は $(\boldsymbol{Z}_2)^k$ 写像となる．すると $i\circ f:V_k(\boldsymbol{R}^m)\to V_k(\boldsymbol{R}^m)$ も $(\boldsymbol{Z}_2)^k$ 写像となり，$i\circ f$ の写像度は偶数となる．一方，$(i\circ f)^*=f^*\circ i^*$ であり，$H^{\dim V_k(\boldsymbol{R}^m)}(V_k(\boldsymbol{R}^n);\boldsymbol{Z}_2)=0$ であるから，$(i\circ f)^*:H^{\dim V_k(\boldsymbol{R}^m)}(V_k(\boldsymbol{R}^m))\to H^{\dim V_k(\boldsymbol{R}^m)}(V_k(\boldsymbol{R}^m))$ は自明な準同型となる．これは矛盾する．ゆえに，$m\leq n$ である． □

次に $l<k$ のときを考えると, $(\boldsymbol{Z}_2)^l$ は $(\boldsymbol{Z}_2)^k$ の部分群となる. したがって $V_k(\boldsymbol{R}^m)$ は自由な $(\boldsymbol{Z}_2)^l$ 多様体となる. さらにこのとき次の可換図式を得る.

$$\begin{array}{ccc} E(\boldsymbol{Z}_2)^k \times_{(\boldsymbol{Z}_2)^l} V_k(\boldsymbol{R}^m) & \xrightarrow{\bar{c}'} & B(\boldsymbol{Z}_2)^l \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & {\scriptstyle\rho}\downarrow \\ E(\boldsymbol{Z}_2)^k \times_{(\boldsymbol{Z}_2)^k} V_k(\boldsymbol{R}^m) & \xrightarrow{\bar{c}} & B(\boldsymbol{Z}_2)^k. \end{array}$$

すると,

$$\begin{array}{ccc} H^*_{(\boldsymbol{Z}_2)^l}(V_k(\boldsymbol{R}^m)) & \xleftarrow{\bar{c}'^*} & H^*(B(\boldsymbol{Z}_2)^l) \\ {\scriptstyle\pi^*}\uparrow & & {\scriptstyle\rho^*}\uparrow \\ H^*_{(\boldsymbol{Z}_2)^k}(V_k(\boldsymbol{R}^m)) & \xleftarrow{\bar{c}^*} & H^*(B(\boldsymbol{Z}_2)^k). \end{array}$$

も可換な図式となる.

定理 3.5. $\dim V_k(\boldsymbol{R}^m)=\dim V_l(\boldsymbol{R}^n)$ であるとき, 任意の $(\boldsymbol{Z}_2)^l$ 写像 $f: V_k(\boldsymbol{R}^m)\to V_l(\boldsymbol{R}^n)$ に対し, f の写像度は偶数となる.

証明. $d=\dim V_k(\boldsymbol{R}^m)=\dim V_l(\boldsymbol{R}^n)$ とすると, $\pi^*: H^d_{(\boldsymbol{Z}_2)^k}(V_k(\boldsymbol{R}^m);\boldsymbol{Z}_2)\to H^d_{(\boldsymbol{Z}_2)^l}(V_k(\boldsymbol{R}^m);\boldsymbol{Z}_2)$ は自明な準同型となる. また, 準同型 $\rho^*: H^*(B(\boldsymbol{Z}_2)^k;\boldsymbol{Z}_2)\to H^*(B(\boldsymbol{Z}_2)^l;\boldsymbol{Z}_2)$ は全射であるから, $\bar{c}'^*: H^d(B(\boldsymbol{Z}_2)^l;\boldsymbol{Z}_2)\to H^d_{(\boldsymbol{Z}_2)^l}(V_k(\boldsymbol{R}^m);\boldsymbol{Z}_2)$ も自明な準同型となる. したがって, $\mathrm{Ind}_d^{(\boldsymbol{Z}_2)^l}(V_k(\boldsymbol{R}^m);\boldsymbol{Z}_2)=H^d(B(\boldsymbol{Z}_2)^l;\boldsymbol{Z}_2)$ となる.

一方, 命題 2.2 より, $\mathrm{Ind}_d^{(\boldsymbol{Z}_2)^l}(V_l(\boldsymbol{R}^n);\boldsymbol{Z}_2)\neq H^d(B(\boldsymbol{Z}_2)^l;\boldsymbol{Z}_2)$ である. したがって, 定理 3.2 (2) により, 任意の $(\boldsymbol{Z}_2)^l$ 写像 $f: V_k(\boldsymbol{R}^m)\to V_l(\boldsymbol{R}^n)$ に対して, f の写像度は偶数となる. □

上の議論を複素 Stiefel 多様体にも用いると, 次の結果を得る.

定理 3.6. $f: V_k(\boldsymbol{C}^m)\to V_k(\boldsymbol{C}^m)$ を $(\boldsymbol{Z}_p)^k$ 写像とすると f の写像度は p の倍数でない.

この定理より, 系 3.4 のときと同様に次の系を得る.

系 3.7. $(\boldsymbol{Z}_p)^k$ 写像 $f: V_k(\boldsymbol{C}^m)\to V_k(\boldsymbol{C}^n)$ が存在するならば, $m\leq n$ である.

次に $l<k$ のときを考えると, $(\boldsymbol{Z}_p)^l$ は $(\boldsymbol{Z}_p)^k$ の部分群と思える. したがって $V_k(\boldsymbol{C}^m)$ は自由 $(\boldsymbol{Z}_p)^l$ 多様体となる. すると定理 3.5 と同様に次の定理を得る.

定理 3.8. $\dim V_k(\boldsymbol{C}^m) = \dim V_l(\boldsymbol{C}^n)$ ならば, 任意の $(\boldsymbol{Z}_p)^l$ 写像 $f : V_k(\boldsymbol{C}^m) \to V_l(\boldsymbol{C}^n)$ に対し, f の写像度は p の倍数となる.

注意. k 偶数のとき, $\dim V_k(\boldsymbol{C}^m)$ も偶数となる. 従って, $S^{\dim V_k(\boldsymbol{C}^m)}$ への自由な $\boldsymbol{Z}_p$ 作用は存在しない.

系 3.9. $\dim V_k(\boldsymbol{C}^m) = \dim V_l(\boldsymbol{C}^n)$ ならば, 任意の $(S^1)^l$ 写像 $f : V_k(\boldsymbol{C}^m) \to V_l(\boldsymbol{C}^n)$ に対して, f の写像度は 0 である.

参考文献

[1] H.Cartan and S.Eilenberg, Homological Algebra, Princeton University Press (1956)

[2] E. Fadell and S. Husseini, *An ideal-valued cohomological index theory with applications to Borsuk-Ulam and Bourgin-Yang theorems,* Ergodic Theory Dynamical Systems,8(1988),73-85

[3] E. Fadell, *Ideal-valued generalizations of Ljusternik-Schnierlmann category, with applications,* Topics in equivariant topology, (eds. E. Fadell,et al.), Sém. Math. Sup., 108, Press Univ. Montreal,(1989),11-54

[4] Y. Hara, *The degree of equivariant maps,* preprint.

[5] J. Jaworowski, *Maps of Stiefel manifolds and a Borsuk-Ulam theorem,* Proc.Edinb.Math.Soc.32(1989),271-279

[6] K. Komiya, *Borsuk-Ulam theorem and Stiefel manifolds,* J.Math.Soc.Japan 45 (1993),611-626

[7] E. Spanier, Algebraic Topology, McGraw-Hill,New York (1966)