

# 一般化された Chern-Weil 準同型について

大阪大学大学院 理学研究科 山崎 啓太 (Keita YAMASAKI)  
 Graduate School of Science, Osaka University

## 1 はじめに

可換な  $\mathfrak{g}$ -微分代数  $A$  が接続  $\theta$  をもつとき,  $W_{\mathfrak{g}}$  を Weil 代数とすると Chern-Weil 準同型とよばれる  $\mathfrak{g}$ -微分代数の準同型  $c^{\theta} : W_{\mathfrak{g}} \rightarrow A$  が構成できる. これが誘導する写像  $(S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}} \cong H((W_{\mathfrak{g}})_{\text{basic}}) \rightarrow H(A_{\text{basic}})$  は接続の取り方によらない. これを (代数版の) Chern-Weil の定理とよぶ. Alekseev-Meinrenken は最近のプレプリント [2] において次のことを示した: 必ずしも可換とは限らない locally free  $\mathfrak{g}$ -微分代数  $A$  に対して,  $\mathfrak{g}$ -微分空間の準同型  $c, c' : W_{\mathfrak{g}} \rightarrow A$  が  $W_{\mathfrak{g}}$  の単位元で一致するならば, これらが誘導する写像  $(S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}} \cong H((W_{\mathfrak{g}})_{\text{basic}}) \rightarrow H(A_{\text{basic}})$  は一致する. これから上の主張が非可換な  $A$  に対しても成り立つことが直ちに分かる. ただし [2] におけるこの定理の証明にはギャップがある. 橋本義武氏 (大阪市立大学) と筆者はこのギャップを埋めることに成功したので, ここではそれを説明したい. また [2] ではこの結果の応用としていくつかのことを示しているが, ここでは quadratic Lie 代数の場合の Duflo の定理の “conceptually easy” な証明を紹介する.

## 2 定義など

### 2.1 $\mathfrak{g}$ -微分代数

標数 0 の体  $\mathbb{F}$  上のベクトル空間  $V$  に対して, スーパーベクトル空間  $E_V$  を

$$E_V := V \oplus V, \quad E_V^{\bar{0}} = E_V^{\bar{1}} := V$$

と定める.  $v \in V$  に対応する  $E_V$  の even, odd element をそれぞれ  $\bar{v} \in E_V^{\bar{0}}, v \in E_V^{\bar{1}}$  と表す.  $E_V$  上の微分  $d$  として

$$d(v) := \bar{v}, \quad d(\bar{v}) := 0, \quad v \in V$$

を自然に拡張したものを考えて,  $E_V$  は微分スーパーベクトル空間 (以下 ds) と考える. その対称代数  $S(E_V)$  は  $V$  上の Koszul 代数とよばれる.

$\mathfrak{g}$  を  $\mathbb{F}$  上の Lie 代数とすると, スーパー Lie 代数  $\tilde{\mathfrak{g}}$  を

$$\tilde{\mathfrak{g}} := \mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{g}, \quad \tilde{\mathfrak{g}}^{\bar{0}} = \tilde{\mathfrak{g}}^{\bar{1}} := \mathfrak{g}$$

と定義する. ここで  $\tilde{\mathfrak{g}}^{\bar{0}} = \mathfrak{g}$  は  $\tilde{\mathfrak{g}}^{\bar{1}} = \mathfrak{g}$  に随伴表現によって作用する.  $\tilde{\mathfrak{g}} = E_{\mathfrak{g}}$  と考えることにより微分を定め,  $\tilde{\mathfrak{g}}$  は微分スーパー Lie 代数 (以下 dl) と考える.

定義 2.1.  $g$ -微分空間 (以下  $g$ -ds) とは  $ds(E, d)$  と  $d$  準同型  $\tilde{g} \rightarrow \text{End}(E)$  の組とする.

$g$ -微分代数 (以下  $g$ -da) とは微分スーパー代数  $(\mathcal{A}, d)$  と  $d$  準同型  $\tilde{g} \rightarrow \text{Der}(\mathcal{A})$  の組とする. ただし  $\text{Der}(\mathcal{A})$  は  $\mathcal{A}$  の derivation 全体とする.

$E$  を  $g$ -ds とするとき,  $\bar{\xi} \in \tilde{g}^{\bar{0}}, \xi \in \tilde{g}^{\bar{1}}$  に対応する  $\text{End}(E)$  の元をそれぞれ  $L_{\bar{\xi}}, \iota_{\xi}$  とかくことにする. このとき

$$E_{\text{hor}} := \bigcap \ker \iota_{\xi}, \quad E_{\text{inv}} := \bigcap \ker L_{\xi}, \quad E_{\text{basic}} := E_{\text{hor}} \cap E_{\text{inv}}$$

と定義する.

## 2.2 ホモトピー

スーパーベクトル空間  $E, F$  の間の線型写像全体  $L(E, F)$  は

$$L(E, F)^{\bar{0}} := L(E^{\bar{0}}, F^{\bar{0}}) \oplus L(E^{\bar{1}}, F^{\bar{1}}), \quad L(E, F)^{\bar{1}} := L(E^{\bar{0}}, F^{\bar{1}}) \oplus L(E^{\bar{1}}, F^{\bar{0}})$$

により, スーパーベクトル空間となる.

また  $E, F$  が  $ds$  のとき,  $L(E, F)$  は

$$d(\phi) := d \circ \phi - (-1)^{|\phi|} \phi \circ d$$

を微分とする  $ds$  である.  $ds$  準同型は  $L(E, F)^{\bar{0}}$  の cocycle に対応する.

2つの  $ds$  準同型  $\phi_0, \phi_1 : E \rightarrow F$  の間の homotopy とは,  $h \in L(E, F)^{\bar{1}}$  であり  $d(h) = \phi_0 - \phi_1$  となるものとする.

また  $ds$  準同型  $\phi : E \rightarrow F$  に対する homotopy inverse とは,  $ds$  準同型  $\psi : F \rightarrow E$  であり  $\phi \circ \psi, \psi \circ \phi$  がそれぞれ  $F, E$  の恒等写像  $\text{id}_F, \text{id}_E$  と homotopic であるものとする.

もし homotopy inverse が存在すれば,  $\phi$  は cohomology の間の同型を導く.

補題 2.2.  $(E, d)$  を  $ds$  として,  $s \in \text{End}(E)^{\bar{1}}$  が  $[d, s] = \text{id}_E$  をみたすと仮定する. このとき inclusion  $i : \mathbb{F} \hookrightarrow S(E)$  と自然な射影  $\pi : S(E) \rightarrow E^{\otimes 0} = \mathbb{F}$  は homotopy inverse になる. つまり  $S(E)$  の cohomology は自明である.

証明.  $h := s \circ ([d, s] + i \circ \pi)^{-1}$  とすれば  $d(h) = \text{id}_{S(E)} - i \circ \pi$ . □

これより Koszul 代数  $S(E_V)$  の cohomology は自明であることがわかる. 実際  $s \in \text{End}(E_V)^{\bar{1}}$  は

$$s(v) := 0, \quad s(\bar{v}) := v, \quad v \in V$$

と定めればよい. これに対応する  $h$  を Koszul 代数の standard homotopy とよぶ.

さらに  $E, F$  を  $g$ -ds とすると,  $L(E, F)$  も

$$\iota_{\xi}(\phi) := \iota_{\xi} \circ \phi - (-1)^{|\phi|} \phi \circ \iota_{\xi}, \quad L_{\xi}(\phi) := L_{\xi} \circ \phi - \phi \circ L_{\xi}$$

と定めることにより  $g$ -ds になる.  $g$ -ds 準同型は  $L(E, F)_{\text{basic}}^{\bar{0}}$  の cocycle である.

また 2つの  $g$ -ds 準同型  $\phi_0, \phi_1 : E \rightarrow F$  の間の homotopy  $h$  が

$$\iota_{\xi}(h) = 0, \quad L_{\xi}(h) = 0$$

をみたすとき  $g$ -homotopy という.

このとき  $h$  を制限することにより,  $\phi_0|_{E_{\text{basic}}}, \phi_1|_{E_{\text{basic}}} : E_{\text{basic}} \rightarrow F_{\text{basic}}$  の間の homotopy になり, これらが誘導する写像  $H(E_{\text{basic}}) \rightarrow H(F_{\text{basic}})$  は一致する.

### 2.3 接続

$\mathfrak{g}$ -da  $\mathcal{A}$  上の接続とは線型写像  $\theta : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathcal{A}^1$  であり

$$\iota_\xi(\theta(\mu)) = \mu(\xi), L_\xi(\theta(\mu)) = -\theta(\text{ad}_\xi^* \mu), \quad \xi \in \mathfrak{g}, \mu \in \mathfrak{g}^*$$

をみたまものとする。接続をもつ  $\mathfrak{g}$ -da を locally free とよぶ。

$\mathbb{F}c$  を even generator  $c$  によって張られる 1 次元空間とする。これには  $d$  が自明に作用しているとして,  $E_{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{F}c$  を  $ds$  と考える。さらに  $E_{\mathfrak{g}}$  上に  $\tilde{\mathfrak{g}}$  の表現を

$$L_\xi \bar{\mu} = -\overline{\text{ad}_\xi^* \mu}, L_\xi \mu = -\text{ad}_\xi^* \mu, \iota_\xi \bar{\mu} = -\text{ad}_\xi^* \mu, \iota_\xi \mu = \mu(\xi)c, \quad \xi \in \mathfrak{g}, \mu \in \mathfrak{g}^*$$

と定める。 $c$  には自明に作用しているとして,  $E_{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{F}c$  を  $\mathfrak{g}$ -ds とする。

$\mathfrak{g}$ -da  $\mathcal{A}$  が接続  $\theta$  をもつと仮定すると,

$$\mu \mapsto \theta(\mu), \bar{\mu} \mapsto d\theta(\mu), \quad \mu \in \mathfrak{g}^*$$

であり,  $c \mapsto \mathcal{A}$  の単位元, と定めることで  $\mathfrak{g}$ -ds 準同型  $E_{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{F}c \rightarrow \mathcal{A}$  をえる。

逆にこのような  $\mathfrak{g}$ -ds 準同型があれば, 制限することにより  $\mathcal{A}$  の接続をえる。

よって以下では  $\mathcal{A}$  の接続とは上のような  $\mathfrak{g}$ -ds 準同型とする。

### 3 Chern-Weil 準同型

Weil 代数  $W_{\mathfrak{g}} := S\mathfrak{g}^* \otimes \wedge \mathfrak{g}^*$  に対して  $W_{\mathfrak{g}} \cong S(E_{\mathfrak{g}})$  が成り立つ。

さらに  $c$  を even generator とすると

$$W_{\mathfrak{g}} \cong S(E_{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{F}c) / (c-1)$$

であることがわかる。 $E_{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{F}c$  上の  $\tilde{\mathfrak{g}}$  の表現から導かれる自然な  $\mathfrak{g}$ -da structure を考えることにより,  $W_{\mathfrak{g}}$  は  $\mathfrak{g}$ -da になる。

このとき

$$H((W_{\mathfrak{g}})_{\text{basic}}) \cong (S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$$

が成り立つ。

$\mathcal{A}$  を可換な locally free  $\mathfrak{g}$ -da とする。 $\mathcal{A}$  の接続  $\theta$  をひとつ固定すると, 対称代数の universal property より,  $\mathfrak{g}$ -da 準同型  $c^\theta : S(E_{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{F}c) \rightarrow \mathcal{A}$  で可換図式

$$\begin{array}{ccc} E_{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{F}c & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{A} \\ \downarrow & & \uparrow c^\theta \\ S(E_{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{F}c) & \xlongequal{\quad} & S(E_{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{F}c) \end{array}$$

をみたまものが存在する。これが誘導する  $\mathfrak{g}$ -da 準同型  $c^\theta : W_{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathcal{A}$  を Chern-Weil 準同型とよぶ。

このとき (代数版) Chern-Weil の定理とは次のことをいう (例えば [5] を参照):  $\mathcal{A}$  を可換な locally free  $\mathfrak{g}$ -da とすると,  $\mathcal{A}$  において 2 つの接続に関する Chern-Weil 準同型は  $\mathfrak{g}$ -homotopic である。つまり誘導される写像  $(S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}} \cong H((W_{\mathfrak{g}})_{\text{basic}}) \rightarrow H(\mathcal{A}_{\text{basic}})$  は接続の取り方によらない。

$\mathcal{A}$  が非可換な場合は、テンソル代数  $T(E_{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{F}c)$  に対する universal property により、 $\mathfrak{g}$ -da 準同型  $\tilde{c}^{\theta} : T(E_{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{F}c) \rightarrow \mathcal{A}$  で可換図式

$$\begin{array}{ccc} E_{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{F}c & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{A} \\ \downarrow & & \uparrow \tilde{c}^{\theta} \\ T(E_{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{F}c) & \xlongequal{\quad} & T(E_{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{F}c) \end{array}$$

をみたすものが存在する。しかし  $S(E_{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{F}c)$  についてはいえない。

そこで“対称化”とよばれる  $\mathfrak{g}$ -ds 準同型

$$\text{sym} : S(E_{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{F}c) \rightarrow T(E_{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{F}c), v_1 \dots v_k \mapsto \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} (-1)^{N_{\sigma}(v_1, \dots, v_k)} v_{\sigma^{-1}(1)} \dots v_{\sigma^{-1}(k)}$$

を考える。ここで  $N_{\sigma}(v_1, \dots, v_k)$  は  $v_i, v_j \in E_{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{F}c$  が odd element で、かつ  $\sigma^{-1}(i) > \sigma^{-1}(j)$  となる  $i < j$  の組の数とする。

そして、2つの合成

$$S(E_{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{F}c) \xrightarrow{\text{sym}} T(E_{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{F}c) \xrightarrow{\tilde{c}^{\theta}} \mathcal{A}$$

が誘導する写像を  $c^{\theta} : W_{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathcal{A}$  とする。ただし  $c^{\theta}$  は  $\mathfrak{g}$ -ds 準同型であり、一般に代数の準同型にはならない。

しかし、非可換な代数に対する Chern-Weil の定理を含む次が成り立つ。

定理 3.1 ([2]).  $\mathcal{A}$  を locally free  $\mathfrak{g}$ -da とする。任意の2つの  $\mathfrak{g}$ -ds 準同型  $c_0, c_1 : W_{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathcal{A}$  が  $W_{\mathfrak{g}}$  の単位元で一致するならば、これらは  $\mathfrak{g}$ -homotopic である。

驚くべきことに  $c_i$  が代数の準同型でなくてもよいだけでなく、 $\mathcal{A}$  の接続に関する Chern-Weil 準同型である必要もないのである。

証明.  $W_{\mathfrak{g}} \cong S(E_{\mathfrak{g}})$  はスーパー Hopf 代数である。実際、diagonal embedding  $E_{\mathfrak{g}} \rightarrow E_{\mathfrak{g}} \oplus E_{\mathfrak{g}}$  から誘導される写像  $\Delta : S(E_{\mathfrak{g}}) \rightarrow S(E_{\mathfrak{g}}) \otimes S(E_{\mathfrak{g}})$  を余積、自然な射影  $\pi : S(E_{\mathfrak{g}}) \rightarrow E_{\mathfrak{g}}^{\otimes 0} = \mathbb{F}$  を co-unit とすればよい。

$L(W_{\mathfrak{g}}, \mathcal{A})$  に代数の構造を入れる。  $\phi_1, \phi_2 \in L(W_{\mathfrak{g}}, \mathcal{A})$  に対して

$$\phi_1 \cdot \phi_2 : W_{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\Delta} W_{\mathfrak{g}} \otimes W_{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\phi_1 \otimes \phi_2} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$$

と定める。ここで最後の写像は  $\mathcal{A}$  における積である。また

$$i_{\mathcal{A}} \circ \pi : W_{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathcal{A}$$

が単位元となる。ただし  $i_{\mathcal{A}} : \mathbb{F} \rightarrow \mathcal{A}$  は  $\mathcal{A}$  の unit とする。

示すべきことは、 $\mathfrak{g}$ -ds 準同型  $c : W_{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathcal{A}$  で  $c(1) = 0$  ならば、 $\mathfrak{g}$ -homotopy  $\psi$  で  $c = d(\psi)$  をみたすものが存在することであるが、 $\mathcal{A}$  の接続  $\theta$  をひとつ固定して、 $\phi := c^{\theta} + c$  とおくと

$$\psi := ((c \cdot \phi^{-1}) \circ h) \cdot \phi$$

とすればよい。ただし  $h$  は  $S(E_{\mathfrak{g}})$  の standard homotopy とする。  $\square$

注意 3.2. [2] における定理 3.1 の  $\psi$  は  $\mathfrak{g}$ -homotopy にはならない. 上の  $\psi$  は橋本義武氏 (大阪市立大学) と筆者によるものである.

系 3.3.  $\mathcal{A}$  を locally free  $\mathfrak{g}$ -da とする.  $\mathfrak{g}$ -ds 準同型  $c: W_{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathcal{A}$  が  $W_{\mathfrak{g}}$  の unit を  $\mathcal{A}$  の unit にうつすなら, 誘導する写像  $(S_{\mathfrak{g}}^*)_{\text{inv}} \cong H((W_{\mathfrak{g}})_{\text{basic}}) \rightarrow H(\mathcal{A}_{\text{basic}})$  は代数の準同型であり, これは  $c$  の取り方によらない.

特にこれは接続  $\theta$  の Chern-Weil 準同型  $c^{\theta}$  に適用でき, 非可換な代数に対して Chern-Weil の定理がいえる.

証明.  $w' \in W_{\mathfrak{g}}$  をひとつ固定すると, 2つの  $\mathfrak{g}$ -ds 準同型

$$W_{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathcal{A}, \quad w \mapsto c(ww'), \quad w \mapsto c(w)c(w')$$

は  $W_{\mathfrak{g}}$  の単位元で一致する. 定理 3.1 よりこれらは  $\mathfrak{g}$ -homotopic である. よって

$$[c(ww')] = [c(w)c(w')] = [c(w)][c(w')]$$

となり,  $c$  が誘導する写像は代数の準同型であることがわかる.  $\square$

## 4 Duflo の定理

Lie 代数  $\mathfrak{g}$  が不変な内積をもつとき quadratic Lie 代数とよぶ. ただし内積とは非退化な対称双線型形式とする.

$\mathfrak{g}$  が quadratic Lie 代数で不変な内積  $B$  をもつならば,  $B_{\tilde{\mathfrak{g}}}$  を

$$B_{\tilde{\mathfrak{g}}}(\xi, \xi') = B_{\tilde{\mathfrak{g}}}(\bar{\xi}, \bar{\xi}') := 0, \quad B_{\tilde{\mathfrak{g}}}(\bar{\xi}, \xi') := B(\xi, \xi')$$

と定めると  $\tilde{\mathfrak{g}}$  上の不変な内積となる. よって  $\tilde{\mathfrak{g}}$  も quadratic になる.

このとき,

$$\omega(X, Y) := B_{\tilde{\mathfrak{g}}}(dX, Y)c, \quad X, Y \in \tilde{\mathfrak{g}}$$

と定めた  $\tilde{\mathfrak{g}}$  上の cocycle  $\omega$  に対する central extension  $\tilde{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{F}c$  を考える. ここで

$$[\xi, \xi']_{\tilde{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{F}c} := B(\xi, \xi')c, \quad \xi, \xi' \in \mathfrak{g}$$

であることを注意しておく.

$U_{\mathfrak{g}}$  を包絡代数,  $\text{Cl}(\mathfrak{g})$  を Clifford 代数とすると, Alekseev-Meinrenken により [1] で導入された非可換 Weil 代数  $\mathcal{W}_{\mathfrak{g}} := U_{\mathfrak{g}} \otimes \text{Cl}(\mathfrak{g})$  に対して

$$\mathcal{W}_{\mathfrak{g}} \cong U(\tilde{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{F}c) / (c - 1)$$

が成り立つ ([2]).

$\tilde{\mathfrak{g}} = E_{\mathfrak{g}}$  と同一視することにより定まる微分, および

$$L_{\xi}v := [\bar{\xi}, v]_{\tilde{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{F}c}, \quad \iota_{\xi}v := [\xi, v]_{\tilde{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{F}c}, \quad \xi \in \mathfrak{g}, v \in \tilde{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{F}c$$

から自然に誘導される  $\tilde{\mathfrak{g}}$  の表現により,  $\mathcal{W}_{\mathfrak{g}}$  は  $\mathfrak{g}$ -da と考える.

また

$$H((\mathcal{W}\mathfrak{g})_{\text{basic}}) \cong (U\mathfrak{g})_{\text{inv}}$$

が成り立つことも注意しておく.

$\mathfrak{g}$  を Lie 代数とすると, Poincaré-Birkhoff-Witt 対称化とよばれる線型写像

$$\text{sym} : S\mathfrak{g} \rightarrow U\mathfrak{g}, \quad \xi_1 \dots \xi_k \mapsto \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \xi_{\sigma^{-1}(1)} \dots \xi_{\sigma^{-1}(k)}$$

は同型になることが知られている. また  $\mathfrak{g}$  がスーパー Lie 代数のときも同様のことが成り立つ (例えば [3] 参照). しかしこれは一般に代数の準同型にはならない.

ここでは次を Duflo の定理とよぶことにする.

**定理 4.1.**  $\mathfrak{g}$  を quadratic Lie 代数すると,  $(S\mathfrak{g})_{\text{inv}}$  と  $(U\mathfrak{g})_{\text{inv}}$  は代数として同型である.

従来の証明 ([4]) には無限階微分作用素などの解析を用いるが, 以下の証明 ([2]) は代数的な議論のみで行うことができる.

**証明.** 不変な内積により  $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}^*$  と同一視し,  $E_{\mathfrak{g}} \cong E_{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}}$  と考える.

Poincaré-Birkhoff-Witt 対称化  $S(\tilde{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{F}c) \rightarrow U(\tilde{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{F}c)$  が誘導する  $\mathfrak{g}$ -ds としての同型  $W_{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}_{\mathfrak{g}}$  に対して, 系 3.3 を適用すると, 代数の同型  $(S\mathfrak{g})_{\text{inv}} \xrightarrow{\sim} (U\mathfrak{g})_{\text{inv}}$  をえる.  $\square$

## 参考文献

- [1] Alekseev, A., Meinrenken, E., *The non-commutative Weil algebra*, Invent. Math. 139 (2000), no.1, 135–172.
- [2] Alekseev, A., Meinrenken, E., *Lie theory and the Chern-Weil homomorphism*, preprint, math.RT/0308135.
- [3] Deligne, P., Morgan, J., *Notes on supersymmetry (following Joseph Bernstein)*, in “Quantum fields and strings: a course for mathematicians”, Vol. 1, (Princeton, NJ, 1996/1997), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 41–97.
- [4] Duflo, M., *Opérateurs différentiels bi-invariants sur un groupe de Lie*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 10 (1977), no. 2, 265–288.
- [5] Guillemin, V., Sternberg, S., *Supersymmetry and equivariant de Rham theory*, Springer-Verlag, 1999.