数理解析研究所講究録 1394 巻 2004 年 1-14

球の詰め込み問題についての最近の進展 I, Cohn-Elkies-Kumar の仕事の紹介を中心にして

坂内英一 (Eiichi Bannai)
九大・数理 (Faculty of Mathematics, Graduate School, Kyushu University)

1 Introduction

この原稿は上記タイトルで行った 2004 年 3 月の数理研研究集会「代数的組合せ論」(代表者平木彰) の講演内容 (OHP による) をかなり忠実に再現したものです. OHP は英語で書きましたが, この報告集での原稿はそれを日本語に直したものです. 講演の元々のプログラムでは「Sphere packings についての最近の進展の紹介: Oleg Musin の 4 次元 kissing number の決定と Cohn-Elkies-Kumar による 24 次元の lattice packing における Leech lattice の optimality I, II」という長い題で, 田上 真君との共同発表になっていました. 私が I で話した部分がこの原稿です. II の部分は田上君による講演で, それも [14] としてこの報告集に載っていますので, 詳しくはそれを参照して下さい.

この講演では I と II を通じて次ぎの 2 つの問題について考えます.
(1) kissing number の問題. すなわち, R^n において, 与えられた 1 つの単位球に最大いくつの単位球を接するようにかつお互いに重なり合わないように置けるか? という問題を考えます. この数を R^n における kissing number と呼び τ_n で表します. $\tau_2 = 6$ ですが, 他の τ_n 達はどうなるでしょうか?
(2) 最も密な球の詰め込み問題. すなわち, 同じ大きさの (無限個の) 球を R^n に詰め込むとき, 球に入っている部分の割合が一番大きくなるのはいつか? またその最大値はなにか? という問題を考えます. この値を Δ_n で表すことにします. $\Delta_2 = \pi/\sqrt{12}$ が知られていますが, 他の Δ_n 達はどうなるでしょうか?

これら 2 つの問題には, 特に球の置き方に条件を付けない 一般的な場合の問題と, 球の中心が格子の頂点に位置していなければいけないと条件を付けた格子の場合の問題があります. 後でそれぞれの場合をもう少し詳しく解説します.

この (1), (2) に関して最近の非常に大きな次の 2 つの進展がありました. その紹介がこの I と II の 2 つの講演の目的です (それに先立つ比較的最近の進展についても少し触れます).

(1) に関して Oleg R. Musin が $\tau_4 = 24$ を証明しました.
(後に歴史的なことも含めてもう少し解説しますが, 詳細は田上君のこの II の講演及び報告集の記事を見て下さい.)

(2) に関しての最近の大きな進展は, Cohn, Elkies, Kumar のいくつかの論文の結果を合わせた結果で, 次の 2 つのことを証明しています.
(a) Leech lattice は R^{24} の球面の詰め込みの (一般的な場合において) 最善の詰め込みと非常に近い (詳細は後述).
(b) Leech lattice は R^{24} の球面の詰め込みの (格子の場合において) 最善な詰め込みを与える.

先に述べた比較的最近の進展とは次のものを指します.

(i) (Hale-Ferguson 1997 以来) $\Delta_3 = \pi/\sqrt{18}$ が成り立つ ([3] 参照).
すなわち, Kepler 予想が証明された. この結果は J. of Computation Geometries を中心にいくつかのシリーズの論文として発表されて来ていて, 最後の部分がもうすぐ印刷されて完結する予定と聞いています. この結果は 4 色問題の時みたいにコンピューターを何百時間もフルに使う証明とのことですが, どの様にコンピューターを使ったかの記録が詳しく残されているとのことです. この証明は, 専門家達は正しいであろうと判断していると聞いています.
(ii) (W.-Y. Hsiang, 1993) 上の (i) の証明よりも前に Hsiang は Kepler 予想の証明を発表しています. ただし, その証明は難解であるとのことで, 専門家を納得させることに成功していません. 詳細は 2001 年に新しく書き下した単行本 [4] としても発表されています. 私は個人的にはこの Hsiang の仕事をもっと検証してみるべきと思っています. また Hsiang は 1993 年に $\tau_4 = 24$ をアナウンスし, 現在 約 100 ページのプレプリント [5] も存在します. 私は 2001 年に本人から直接それを貰いました. そこでは 4 次元の kissing number を与える球の配置の一意性も述べられています. これは Musin の論文では示されていません. この事実は成り立つと思われますが, これも残念ながら検証はまだされているとは言えません. 私は個人的にはこの Hsiang の仕事を, とくに kissing number の部分をもっと本気で検証してみるべきと思っています. 私自身も少しは試みましたが, 一部分しか読み進むことは出来ませんでした. 九大の二田水裕介君の 2003 年の修士論文 (アドバイザー; 坂内悦子) もこのことを試みたものです. 興味のある方は参照して下さい.

(1) の kissing number の問題に関して歴史的なことを少し述べます.

先ず次ぎの表 1 を見て下さい. これは Conway-Sloane [9] を再録したものです.

表 1. (これは一般の場合および格子の場合に kissing mumber について何が知られていて何が知られていないかを纏めた表です. OHP ではこの表を書きましたが, 上の Conway-Sloane [9] の本 12 ページの Table 1.1 と 23 ページの Table 1.5 を合わせたものと本質的に同じですので, そちら見ていただくことにしてここでは略します.)

この表からも分かるように,（一般の場合に） kissing number τ_n が決定されているのは

$$n = 1, 2, 3, 8, 24$$

に限られていました (一方, 格子の場合に限れば $n \leq 8$ の場合に答えが知られています）. なお一般の場合の漸近的な評価としては次が知られているベストな結果です.

(Kabatiansky-Levenshtein, 1979) $\tau_n \leq 2^{0,401n(1+o(1))}$.

Oleg Musin の論文 [12] についての覚え書き.

● 2003 年 6 月：私（坂内）が Musin 本人から論文の原稿を雑誌への投稿前に非公式にチェックして欲しいとの要請とともに受け取った (他にも何名かの人に送ったとのことである）.

● 2003 年 8 月-9 月：田上君を含め数名で非公式なセミナーを持ちこの論文を詳しく読んだ. Lemma 1 に関して間違っていると思われるところをいくつか指摘したものを Musin に送った.

● 2003 年 9 月 26 日： Musin は論文 [12] をプレプリントサーバー arXiv に正式に投稿. (これで論文をオープンに議論して良いと判断した. ただし我々の指摘した問題の箇所のいくつかはこの論文では直っていなかった. その意味で最終的な結果の正しさはまだはっきりしていなかった.)

● 2003 年 12 月： Musin は Berkley MSRI などで講演. (講演の中で坂内のグループが論文の正しいことを完全に検証したと発言したらしく, 他の人からその正否について質問を受ける. 全体の証明の感触は正しいと思われるが完全に正しいか否かは分からないし保証出来ないと返答.)

● 2003 年 12 月-2004 年 1 月：田上君とともに本気でこの論文の問題の箇所を検証した.

● 2004 年 2 月： Lemma 1 の証明が必要な $n = 3$ および $n = 4, m \leq 5$ の場合（かつ正確には以後の議論で必要とされるある t_0 に対して）に成り立つことを最終的に確認した. (約 4 ページの詳しい原稿を送り, 必要ならそれを利用してくれと伝えた. Musin から感謝と, このことを最終原稿で acknowledge するとの返事を貰う.）この部分の解決により, Musin の仕事は正しいことがほぼ検証されたと我々は考えている (後半の関数の評価の計算部分は我々はチェックしていないが）.

2 Musin の証明の概略

田上君が次の講演でより詳しく説明してくれると思いますが, Musin の証明の概略は以下の通りです. Delsarte 理論というか, 代数的組合せ論の方法が大本にあるので, 全体の方針ははっきりしていて面白いと思います. また他の色々な状況にもこの方法が拡張されるのではないかと予想されます.

先ず, Odlyzko-Sloane [13] (1979), Levenshtein [10] (1979) による $n=8$ および $n=24$ の場合の τ_n の決定の復習をします. この時, 次の補題が基本的です.

補題 （r 次の）多項式 $f(x)$ があって, それが

$$f(x)=\sum_{i=0}^{r} a_i Q_i(x)$$

と表されているとする. ここで $Q_i(x)=Q_i^{(n)}(x)$ は i 次の Gegenbauer 多項式を表す. (Gegenbauer 多項式 $Q_i(x)=Q_i^{(n)}(x)$ は区間 $[-1,1]$ 上の重さ関数 $(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}$ の直交多項式である.) 今, $a_0>0, a_i\geq 0 (i=1,2,\cdots)$ が成り立ち, 更に $f(x)\leq 0, \forall x\in[-1,\frac{1}{2}]$ が成り立つとする. この時,

$$\tau_n \leq \frac{f(1)}{a_0}$$

が成り立つ.

$$f(x)=(x+1)(x+\frac{1}{2})^2x^2(x-\frac{1}{2}),$$

$$f(x)=(x+1)(x+\frac{1}{2})^2(x+\frac{1}{4})^2x^2(x-\frac{1}{4})^2(x-\frac{1}{2}),$$

は $n=8$ 及び $n=24$ の場合, 上の補題の条件を全て満たし, 従って

$$\tau_8\leq 240,\ \tau_{24}\leq 196560$$

が得られます. E_8 型ルート系の 240 個のルート, Leech lattice の 196560 個の最小ベクトルの集合の存在が逆の不等式を導くので,

$$\tau_8=240,\ \tau_{24}=196560$$

を得ます.
さて, Musin のアイデアは次の通りです. 上の補題において, 「$f(t)$ が全ての $[-1,\frac{1}{2}]$ で非正」の条件をゆるめて, ある -1 に近い t_0 に対して, $[t_0,\frac{1}{2}]$ でのみ非正として, 替わりに幾何学的な考察を加えて上からの bound を得ようという考えです. 詳細は原論文 [12] および田上君の講演および報告集の原稿 [14] を参照して下さい.

3 Cohn-Elkies-Kumar の仕事の概略

この講演の私の部分の主目的は (2) の Cohn-Elkies-Kumar の仕事の紹介です. これは次の 3 つの論文に基づいています. 最初の 2 つ [7], [6] は既に発表されています. 最後の論文 [8] はまだプレプリントですが, 2003 年 11 月の段階で本人の非公式な web site に, また 2004 年 3 月 16 日に arXiv で正式に公表しているので, その詳細を公に議論しても構わないと判断します.

(A) Henry Cohn and Naom Elkies: New upper bounds on sphere packings I, Annals of Math. 157 (2003), 689- 714.

(B) Henry Cohn: New upper bounds on sphere packings II, Geom. Topol. 6 (2002), 329-353.

(C) Henry Cohn and Abhinav Kumar: Optimality and uniqueness of the Leech lattice, preprint.((arXiv:math.MG/0403263)

4 格子についての準備

Λ を R^n における格子 (lattice) とします.

Λ^* を双対格子, すなわち, $\Lambda^* = \{x \in R^n | (x,y) \in Z, \forall y \in \Lambda\}$ と定義します.

$|\Lambda| = \mathrm{vol}(R^n/\Lambda) = \sqrt{\Lambda}$ と定義します. これは格子 Λ の基本領域の体積でもあります. この時, $|\Lambda||\Lambda^*| = 1$ が成り立ちます.

$r = \min(\Lambda) = \mathrm{Min}\{\|x\| | x \in \Lambda, x \neq 0\}$ を最小距離とします.

この時, 格子 Λ に付随した (すなわ球の中心が格子 Λ の点に対応する) 球の詰め込みの密度は,

$$\Delta = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(\frac{n}{2})!} \cdot (\frac{r}{2})^n \cdot \frac{1}{|\Lambda|}$$

で与えられます.

ここで, $\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(\frac{n}{2})!}$ は半径 1 の球の体積を表します. また, $(\frac{n}{2})! = \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)$, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2m-1)!!}{2^m}\sqrt{\pi}$ なども注意して下さい. なお, 後の半分を

$$\delta = (\frac{r}{2})^n \cdot \frac{1}{|\Lambda|}$$

と定義し, 格子 Λ の中心密度 (central density) と呼びます. これは 1 単位体積あたり単位球の中心がどれだけの密度 (頻度) で表れるかを表す量で, 通常の密度より表し方が簡単ということもあり以下で良く用います. 例えば, Leech lattice に対しては $\delta = 1$ となります.

次の表 2 も Conway-Sloane を再録したものですが, これは知られている最善の一般の場合の中心密度 δ と, また, 格子の場合にどうなるかを表しています.

表 2. (OHP ではこの表も示しましたが, これも Conway-Sloane [9, 3rd ed. xix ページの Table 1,1(a) と 12 ページの Table 1.1 を合わせたもの] と本質的に同じですので, そちらを見ていただくことにして, ここでは省略します.)

一般の次元 n に対しては, Levenshtein (1979) により,

$$\Delta \leq \frac{(j_{\frac{n}{2}})^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)^2 \cdot 4^n}$$

が知られています. ここで, J_α は α 次の Bessel 関数であり, j_α はその最小な正の零点を表しています. この漸近的な評価としては,

$$\frac{1}{n}\log_2 \Delta \leq -0.5573$$

になります. 漸近的なベストな評価としては,
(Kabatiansky-Levenshtein, 1979)

$$\frac{1}{n}\log_2 \Delta \leq -0.5990$$

が知られています.

5 Cohn-Elkies [7] の主結果

$f(x) : R^n \longrightarrow R$ ($f(x) \in L^1(R^n)$) に対して, その Fourier 変換
$\hat{f}(t) : R^n \longrightarrow R$ が

$$\hat{f}(t) = \int_{R^n} f(x) e^{2\pi i(x,t)} dx$$

で定義されます.

● $f(x) : R^n \longrightarrow R$ が admissible であるとは, $\exists \delta > 0, \exists C \in R$ such that $|f(x)|, |\hat{f}(x)| < C(1+|x|)^{-n-\delta}$ であることと定義する.

f が admissible であれば, $f, \hat{f}$ はともに R^n 上の連続関数であり, 次の Poisson の和公式が成り立つことが知られています (ここで v は R^n の任意の元です).

$$\sum_{x\in\Lambda} f(x+v) = \frac{1}{|\Lambda|}\sum_{t\in\Lambda^*} e^{-2\pi i(v,t)} \hat{f}(t).$$

さらにこの時, 両辺は絶対収束することも知られています.

さて, Cohn-Elkies の論文 (A) の主定理は次のように表されます.

定理 3.1 (定理の番号は Cohn-Elkies の論文 (A) の番号とする.)
$f: R^n \longrightarrow R$ （ただし f は恒等的に 0 ではないとする）を admissible とし,
1. $f(x) \leq 0, \forall x$, with $|x| \geq 1$,
2. $\hat{f}(t) \geq 0, \forall t \in R^n$,

が成り立っているならば, R^n の（一般的な場合の）球の詰め込みの中心密度 δ に対して,

$$\delta \leq \frac{f(0)}{2^n \cdot \hat{f}(0)}$$

が成り立つ.

本質的に同値な言い換えになりますが, 次のようにも表されます.

定理 3.2 (定理の番号は Cohn-Elkies の論文 (A) の番号とする.)
$f: R^n \longrightarrow R$ が admissible であるとき,
1. $f(0) = \hat{f}(0) > 0$,
2. $f(x) \leq 0, \forall x$, with $|x| \geq r$, (for some r),
3. $\hat{f}(t) \geq 0, \forall t \in R^n$,

が成り立っているならば, R^n の（一般的な場合の）球の詰め込みの中心密度に対して,

$$\delta \leq \left(\frac{r}{2}\right)^n,$$

が成り立つ.

これらの結果の証明の概略は次のように成されます.

球の頂点がある格子のいくつかの剰余類の和集合になっているような球の詰め込みを周期的 (periodic) な詰め込みと呼ぶ. もちろん 格子的な場合はその特別な場合であるが, 一般の場合よりは制限 されている. 先ず初めに Poisson の和公式を用いて, 周期的 (periodic) な詰め込みに対しては定理 3.2 が成り立つことを示す. 次に任意の一般的な詰め込み に対して, それに密度がいくらでも近くなる周期的 (periodic) な詰め込みの存在をトポロジー的に証明する. (いずれの部分もきれいな証明である. 詳細は原論文参照.)

次にこの定理の応用を述べます（論文 (A), 命題 6.1 参照.)

例 1.

$$f(x) = \frac{J_{\frac{n}{2}}(j_{\frac{n}{2}}|x|)^2}{(1-|x|^2)|x|^n}$$

$x \in R^n$ とおくと, f は定理 3.1 の条件を全て満たし, 従って

$$\Delta_n \leq \frac{(j_{\frac{n}{2}})^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)\cdot 4^n}$$

が成り立ちます. これは先に述べた Levenshtein (1979) のきれいな再証明を与えています. この方向でそれより良い知られている最善の先に述べた Kabatiansky-Levenshtein(1979) が証明できれば面白いのですが、現在の所まだ未解決とのことです.

例 2. ($n=8, n=24$ の場合)
定理 3.2 における適当な関数 f を見出すことにより次が示されます. ここで $m=11$ として得られています. m の意味については後述します.

$$\frac{\Delta_8}{\Delta(E_8)}\left(=\frac{\delta_8}{\delta(E_8)}\right) \leq 1.000001$$

が得られます. ここで $\delta(E_8)=\frac{1}{16}$ です.

$$\frac{\Delta_{24}}{\Delta(\Lambda_{24})}\left(=\frac{\delta_{24}}{\delta(\Lambda_{24})}\right) \leq 1.0007071$$

が得られます. ここで $\delta(\Lambda_{24})=1$ です.

予想 (Cohn-Elkies (A) Conjecture 8.1)
$n \in \{2,8,24\}$ に対して, 定理 3.2 の条件を全て満たす関数 f で, Λ_n, すなわち,A_2, E_8, Λ_{24} が R^n における（一般の場合の）ベストな球の詰め込みであることを証明するものを見つけることが出来ると予想する.

この形で f を具体的に見つける証明が得られたらすばらしいであろうし, 少なくともこれらの次元では問題を完全に解決します. 私も多分このような関数は見つかると思いますし, それを見つける方向が最善の方法ではないかと思います. ただし現在の時点では, これは未解決問題として残されています. その代わりに少し弱い形で Cohn-Kumar(C) は次の形の定理を証明します. 一般の一番望ましい形より弱いとはいえ, 今までのことを考えればこれは大定理です.

主定理(Cohn-Kumar (C), Theorem 9.3.)
Leech lattice Λ_{24} は R^{24} の格子の場合の球の詰め込みの中でベストであり, かつ唯一のベストのものである.

既に知られている結果ではありますが, E_8 格子が R^8 の中で同様な性質を持つことの別証明もこの論文は与えています.

もう少し詳しく彼らの結果をみますとまず, 先の (A) を改良した結果を定理 3.2 を用いて証明します. すなわち,

命題　Radial な関数 $f(x)$ で, すなわち値が原点からの距離のみで決まる関数で, 定理 3.2. の全ての条件を

$$r \leq 2(1 + 6.851 \times 10^{-32})$$

に対して満たす関数が具体的に求められる. 従って,

$$\frac{\Delta_{24}}{\Delta(\Lambda_{24})} \left(= \frac{\delta_{24}}{\delta(\Lambda_{24})} \right) \leq 1 + 1.65 \times 10^{-30}$$

が得られる. ここで $\delta(\Lambda_{24}) = 1$ である.

***f* の構成法.**
以下,

$$f_0(z) = \sum_{i=0}^{803} c_i i! \cdot L_i^{11}(z)/10^{3500}$$
$$f(x) = f_0(2\pi|x|^2) \cdot e^{-\pi|x|^2}$$

という関数の中に求める関数を見つけ出そうとします. (論文では具体的に係数 c_i 達を整数として与えようとしてます. その部分は私にはコンピューターファイルを読み取れないので具体的には分かりません. また, なぜ $m = 803$ なのかは大幅に計算の都合と思われます. 大きくすればする程良いと思います.)
$L_i^\alpha(x)$ は Laguerre 多項式と呼ばれる直交多項式です. すなわち, 区間 $[0, \infty)$ における重さ関数 $e^{-x}x^\alpha$ に関する直交多項式です. ここで重要なことは次のことです:

$$g_i(x) := L_i^{\frac{n}{2}-1}(2\pi|x|^2)e^{-\pi|x|^2}$$

とおくと,
● $\{g_0, g_2, g_4, \cdots\}$ は radial な admissible な関数の空間に対する Fourier 変換の固有値 1 対する固有空間の基底になり, $\{g_1, g_3, g_5, \cdots\}$ は Fourier 変換の固有値 -1 に対する固有空間の基底になることが知られている.

さて, 今 m を固定して, $z_1, z_2, \cdots, z_m$ を次の 2 条件を満たすようにとります.
(1) g は $g_1, g_3, g_5, \cdots, g_{4m+3}$ の一次結合である. また $g(0) = 0$ であり, かつ $z_1, z_2, \cdots, z_m$ で 2 重根を持っている.
(2) g の符号を変える最小の正の元 z_0 はなるべく小さくなる.

この時, $g(x) \geq 0$ for $|x| \geq r$, $\hat{g} = -g$ であり, g は実数倍を除いて一意的に決まります.

一方, h を次のようにして決めます.
(1) h は $g_0, g_2, g_4, \cdots, g_{4m+2}$ の一次結合である.
(2) $g + h$ は z_0 で二重の零点を持ち, h は $z_1, z_2, \cdots, z_m$ でも二重の零点を持つとする.

このようなh は g をきめると実数倍を除いて一意的に決まります.

ここで, $f = -g + h$ とおくと, $\hat{f} = g + h$ であり, 定理 3.2 の条件が（この場合には都合の良いことに）全て成り立ち, 命題が成り立つことが示されるということのようです.（計算はコンピューターに物凄く依存してます. また, 正確には具体的に論文で与えられている関数 f は係数を整数に取るので, 実際の求める性質を持った関数に非常に近いですが完全には一致しない関数です.）

6 Cohn-Kumar [8] の主定理の証明の概略

以下の議論において, 前節で述べた関数 f が定理 3.2 のすべての条件を, $r \leq 2(1 + 6.851 \times 10^{-32}$ に対して満たすことが非常に重要な出発点です. 以下関数 f は断らなければ, この関数を表します.

以下 $\Lambda \subset R^{24}$ を $\delta(\Lambda) \geq \delta(\Lambda_{24}) = 1$ を満たす任意の格子とします. 一般性を失わずに, $|\Lambda| = 1$ と仮定します.（ Λ が Leech lattice Λ_{24} と一致することが以下の証明の目的です.）
いくつかのステップを考察します.
● $x \in \Lambda, x \neq 0$ ならば $\|x\| \geq 2$ が成り立つ.
(そうでなければ, $\delta(\Lambda) = (\frac{r}{2})^n \cdot \frac{1}{|\Lambda|} < 1$ なので矛盾.)

● （定義） $x \in \Lambda$ が Λ の nearly min. ベクトルであるとは, $2 \leq \|x\| \leq 2(1+\epsilon)$, $\epsilon = 6.733 \times 10^{-27}$ であることと定義する.

● u, v が共に nearly min. ベクトルならば, $\cos\varphi \leq 1 - \frac{1}{2(1+\epsilon)^2}$ が成り立つ. ここで φ は u と v の間の角度を表す.

●関数
$$f_\epsilon = (x+1)(x+\frac{1}{2})^2(x+\frac{1}{4})^2x^2(x-\frac{1}{4})^2(x-(1-\frac{1}{2(1+\epsilon)^2}))$$
を考えることにより, Λ の nearly min. ベクトルの個数は 196561 より小さい. 従って ≤ 196560 を得る.

($\tau_{24} \geq 196560$ の証明とほぼ同様.)

● 任意の $u \in \Lambda$ に対して,

$$\|u\| \in [2, 2(1+\epsilon)) \cup (\sqrt{6}(1-\mu), \sqrt{6}(1+\mu)) \cup (\sqrt{8}(1-\nu), \sqrt{8}(1+\nu)) \cup (\sqrt{10}(1-\omega), \infty)$$

が成り立つ. ここで $\epsilon = 6.733 \times 10^{-27}$, $\mu = 3.981 \times 10^{-13}$, $\nu = 3.219 \times 10^{-12}$, $\omega = 1.703 \times 10^{-11}$ である.
(証明は f をテスト関数として Λ に関する Poisson 和公式を f の具体的な詳しい性質と共に用いる.)

● 一方, テスト関数としてある $g(x) = (1 + \sum_{i=1}^{37} a_i L_i^{11}(2\pi|x|^2))e^{-\pi|x|^2}$ を用いて, また Poisson 和公式を用いて, Λ の nearly min. ベクトルの個数は 196559 より大きいことを得る. 以上を合わせて, Λ の nearly min. ベクトルの個数は丁度 $= 196560$ を得る. (Step 1 完了.)

● $X := C_\Lambda := \{\frac{u}{\|u\|} | u = \text{nearly min. vector in } \Lambda\}$ と置く. この時, $X = C_\Lambda \subset S^{23}(\subset R^{24})$ であり, $|X| = 196560$ である.
この集合 X がクラス 6 のアソシエーションスキームの構造を持つことを示すことが次の目標である.

● $x, y \in X$ ならば, (x, y) は $\{0, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\}$ のいずれかと非常に近いことを示す. 具体的にはテスト関数 f と f の性質, および $u \in \Lambda$ に対して $\|u\|$ が $2, \sqrt{6}, \sqrt{8}$ または $\sqrt{10}$ に非常に近いか, それよりずっと大きくなることを用いて, 先ず, 差が $\pm 6,411 \times 10^{-9}$ で押えられることをしめす. さらに差が $\pm 6,41801 \times 10^{-12}$ で押えられることも言える. (最終的には 0 となることを示したい訳である.)

● $X = C_\Lambda \subset S^{23}$ は nearly 10-デザイン (nearly 11-デザイン) になる.
すなわち, 任意の 10 次以下の R^n 上の多項式 $g(z)$ に対して,

$$|\sum_{z \in X} g(z) - \frac{196560}{|S^{23}|} \int_{S^{23}} g(z) dz| \leq 2.50193 \times 10^{-5} |g|_2$$

が成り立つ. ここで $|g|_2$ は S^{23} 上の L^2 ノルムである. (もちろん $X = C_{\Lambda_{24}}$ の時は, $= 0$ となる.)
注意. $X = C_{\Lambda_{24}}$ の時は, X は内積に関してクラス 6 のアソシエーションスキームになり, かつ 11-デザインになったことに注意されたい. $t = 11, s = 6, t = 2s - 1 \geq 2s - 2$ なので, X は Q-polynomial スキームにもなったことを思い出して欲しい.

● 次に6つの自明でない関係を, 内積が $\{0, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\}$ に非常に近いという条件を用いて入れると, $p^{\gamma}_{\alpha,\beta}(x,y)$ が定義されるが, 実はこの値は (x,y) の内積のみにより決まり, x, y の取り方に依存せず, この intersection numbers は $X = C_{\Lambda_{24}}$ の作るアソシエーションスキームの intersection numbers と完全に一致することが示される.
(X = $C_{\Lambda_{24}}$ の時すべてのパラメターが一意的に決まるということと本質的には同じ議論である.)

● このクラス6のアソシエーションスキームがパラメター達で一意的に特徴付けられるというのは, Conway-Sloane[9, 14 章]= Bannai-Sloane[2] を再録 で本質的に既に示されている. 従って, 格子 Λ に付随した $X = C_{\Lambda}$ にアソシエーションスキームとして, 一意的な構造が入ることが示された. (Step 2 完了.)

● $u, v \in \Lambda$ が nearly min. ベクトルならば, (u,v) と $0, \pm 1, \pm 2, \pm 4$ のどれかとの差は 75ϵ で押えられる. (Step 3 完了.)
$(\frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|})$ は $\{0, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\}$ のいずれかと非常に近いことを用いる.

● Λ は nearly min. ベクトルからなる基底を持つ. (Step 4 完了.)
次の3つの事実を繋ぎあわせて示される.
(i) Λ は 196560 個の nearly min. ベクトル全体で生成される.
(この証明に $\tau_{24} \leq 196560$ であるということを用いる.)
(ii) Leech lattice Λ_{24} は 24 個の nearly min. ベクトル達からなる基底を持つ.
(iii) アソシエーションスキームとして $C_{\Lambda} \cong C_{\Lambda_{24}}$ を用いて, Λ_{24} を生成する 24 個の nearly min. ベクトル達に対応する C_{Λ} の 24 個の nearly min. ベクトル達が Λ を生成することが示される.

● (良く知られた結果, [11] 参照) Leech lattice Λ_{24} は strongly locally optimal であることが知られている. 別の言葉で言えば, extreme lattice であるということになる.
すなわち, 少しずらすと (合同変換および全体をスカラー倍する拡大変換を除くと) 密度が実際に下がるということを意味する.
このことは, Voronoi の古い有名な結果 :
(Voronoi) 「Perfect かつ eutactic な lattice は extreme」
を用いても示されるし, Venkov の比較的最近の結果 :
(Venkov) 「Strongly perfect な lattice は extreme」
ということからも直ぐにわかる. ([15] 参照.) ここで strongly perfect というのは最小ベクトルの集合が 5 デザインを作るということであり, Λ_{24} のそれは 11-デザインになるので, もちろん成り立つ.

次に具体的に Λ が Λ_{24} にどれくらい近くなれば Λ_{24} の密度が最大になるかを定量的

に決める必要がある．我々の考えている Λ がその値よりも Λ_{24} に近いから一致しなければいけないという具合にして全体の証明が完結する訳である．

この部分は論文では次の様に議論する．

● 今，$\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ を Λ の基底とする．$s_{i,j} = (b_i, b_j)$ とおき，$S = (s_{i,j})_{1\le i\le n, 1\le j\le n}$ と対称行列（2次形式に対応する）を考える．
S を少し動かし，対称行列 $S + \rho T$ に変える．ここで ρ は小さいスカラー値とする．S に対応する2次形式を Q, $D = \det(Q)$, $M = Q$ の最小非零ベクトルのノルムとおく．同様に，$S + \rho T$ に対応する2次形式を Q_ρ, $D_\rho = \det(Q_\rho)$, M_ρ を Q_ρ の最小非零ベクトルのノルムとおく．Λ が strongly perfect であることは，T が S のスカラー倍でなければ，

$$\frac{M_\rho}{(D_\rho)^{\frac{1}{n}}} < \frac{M}{D^{\frac{1}{n}}}$$

が ρ が小さければ成り立つことを意味する．
今，一般性を失うことなく $\sum_{i,j} \tilde{s}_{i,j} t_{i,j} = 0, \mathrm{Max}|t_{i,j}| = 1$, を仮定してよい（ここで $\tilde{s}_{i,j}$ は S の余因子行列の (i,j) 成分を表している）．この条件のもとで，

● Λ_{24} において，$0 < \rho < 10^{-20}$ であれば，$\frac{M_\rho}{(D_\rho)^{\frac{1}{n}}} < \frac{M}{D^{\frac{1}{n}}}$ が成り立つことが示される．

●一方，我々の Λ に対して，Λ_{24} との近さを評価すると，$0 < \rho < 10^{-20}$ が計算できる．

以上から Cohn-Kumar の主定理：「Leech lattice Λ_{24} は R^{24} の中での最も密度が高い(唯一の)lattice である．」の証明が完結した．

他の次元，例えば23次元（あるいは16次元）で似たような結果が得られないかと思うが，今後の興味ある課題（研究目標）である．

References

1. 坂内英一，坂内悦子，球面上の代数的組合せ理論，シュプリンガー東京，1999.

2. E. Bannai and N. J. A. Sloane, Uniqueness of certain spherical codes, Can. J. Math. 33 (1981) 437-449.

3. T. C. Hale, A computer verification of the Kepler conjecture, Proceedings of Inter. Congree of Math. (Beijing 2002), Higher Ed. Press. Vol III, 795-804.

4. W.-Y. Hsiang, Least action principle of crystal formation of dense packing type and Kepler's conjecture. World Scientific Publishing Co., 2001.

5. W.-Y. Hsiang, On the kissing number of sphere packings in E^4 and a strong uniqueness theorem, preprint 2001.

6. (B) Henry Cohn, New upper bounds on sphere packings II, Geom. Topol. 6 (2002), 329-353.

7. (A) Henry Cohn and Naom Elkies, New upper bounds on sphere packings I, Annals of Math. 157 (2003), 689- 714.

8. (C) Henry Cohn and Abhinav Kumar, Optimality and uniqueness of the Leech lattice, preprint,(arXiv:math.MG/0403263).

9. J. H. Conway and N. J. A. Sloane, Sphere Packings, lattices and Groups, 3rd. ed. Springer-Verlag, 1999.

10. V. I. Levenshtein, On bounds for packings in n-dimension euclidean space, Soviet Math. Doklady 20 (1979), 417-421.

11. J. Martinez, Les réseaux parfaits des espaces euclidiens, Masson, Pris, 1996. (English translation, Springer-Verlag, 200?).

12. O. R. Musin, The kissing number in four dimensions, preprint, (arXiv:math.MG/0309430).

13. A. Odlyzko, N. J. A. Sloane, New bounds on the number of unit spheres that can touch a sphere in n dimensions, J. Comb. Thery (A), 26 (1976), 210-214.

14. M. Tagami, Oleg Musin の論文「The kissing number in four dimensions」の紹介.

15. B. Venkov, Réseaux et designs sphériques, in Réseaux euclidiens designs sphériques et formes modulaires, ed. J. Martinet, L 'enseignement math.(2001), 10-86.