数理解析研究所講究録 1394 巻 2004 年 121-127

Completely regular codes in Hamming graphs and Johnson graphs with small width

Yoichi Enta (円田 洋一)
International Christian University (国際基督教大学)

Hamming graph $H(D,q)$ と Johnson graph $J(n,D)$ について, code C への距離の総和 $s(x)=s_\ell$ に注目することによって得られた, C が completely regular code になるための条件と, その応用として, C の width w についての bound(Prop.2.6, Prop.3.4) や, cardinality $|C|$ についての制限 (Prop.2.9, Prop.3.7) の結果について報告したい. 証明は省略するが, すべて counting argument によっている. (論文は準備中.)

1 Definitions

$\Gamma=(X,R)$ を **distance-regular graph (DRG)** とする.

- X : vertex set of Γ , $R=R_1$: edge set of Γ.
- $\partial(x,y)$: distance in Γ $(x,y\in X)$.
- $D=D_\Gamma=\max\{\partial(x,y)|x,y\in X\}$: diameter of Γ.
- $\Gamma_i(x)=\{z\in X|\partial(x,z)=i\}$: i-th neighbourhood of x.

X の空でない部分集合 C を Γ の **code** という. 単に $\Gamma\supseteq C$ とかくこともある. code C に対して, $X=C_0\cup C_1\cup\cdots\cup C_t$ を distance partition とする.

- $C_\ell=\{x\in X|\partial(x,C)=\ell\}$: ℓ-th subconstituent
(ただし, $\partial(x,C)=\min\{\partial(x,y)|y\in C\}$, $C_0=C$).
- $t=t_C=\max\{\ell|C_\ell\neq\phi\}$: covering radius of C.
- $w=w_C=\max\{\partial(x,y)|x,y\in C\}$: width of C.

Definition 1.1 ([2], [5]) 次の (同値な) 条件を満たす Γ の code C を Γ の **completely regular code (CRC)** という.

$$C:\text{CRC in }\Gamma \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \text{for } 0\le{}^\forall\ell\le t,\left\{\begin{array}{rl}\gamma_\ell:= & |\Gamma_1(x)\cap C_{\ell-1}|\\ \alpha_\ell:= & |\Gamma_1(x)\cap C_\ell|\\ \beta_\ell:= & |\Gamma_1(x)\cap C_{\ell+1}|\end{array}\right\}\ \text{depend only on } \ell\quad (x\in C_\ell).$$

$\iff$ for ${}^\forall i, {}^\forall j, {}^\forall \ell$, $\eta_{ij}^\ell := |\Gamma_i(x) \cap C_j|$ depends only on ℓ $(x \in C_\ell)$.

Definition 1.2 Γ の code C と $x \in X$ に対して, $s(x) = s_C(x) := \sum_{y \in C} \partial(x, y)$ と定義する. $s(x)$ が $x \in C_\ell$ において ℓ のみによって決まる定数 $s_\ell = s(x)$ であるとき, s_ℓ は constant であるということにする $(0 \le \ell \le t)$.

s_ℓ によって code の class を次のように定義する. [global, local という terminology は実例の幾何的なイメージによっている. Example 2.1 参照.] $0 \le \ell \le t$ に対して,

C : ℓ-**global code**	$\stackrel{\text{def}}{\iff}$	$s_0, \ldots, s_\ell$: const., and $s_0 = \cdots = s_\ell$.
C : ℓ-**local code**	$\stackrel{\text{def}}{\iff}$	$s_0, \ldots, s_\ell$: const., and C is not ℓ-global.
C : CRC of **global type**	$\stackrel{\text{def}}{\iff}$	C : CRC and t-global.
C : CRC of **local type**	$\stackrel{\text{def}}{\iff}$	C : CRC and t-local.

Remark 1.3 CRC ならば $s_0, \ldots, s_t$ はそれぞれ constant.
[なぜなら, $s(x) = \sum_{i=0}^{D} i \cdot \eta_{i0}^\ell$ $(x \in C_\ell)$ は ℓ のみによって決まる定数.]

2 In the case of Hamming graphs

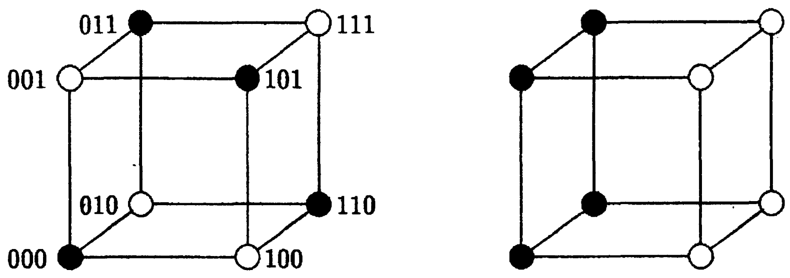
$\Gamma = H(D, q) = (X, R)$ を **Hamming graph** とする. ここで,

- $I = \{1, \ldots, D\}$ $(D \ge 1)$.
- $\Omega = \{0, 1, \ldots, q-1\}$ $(q \ge 2)$.
- $X = \Omega^D = \{x = (x_1, \ldots, x_D) \mid x_i \in \Omega\, (i \in I)\}$.
- $\partial(x, y) = |\{i \in I | x_i \ne y_i\}|$: Hamming distance.

Example 2.1

(1) $C^{(1)} = \{(000), (011), (101), (110)\}$ は $H(3, 2)$ の CRC of global type $(s_0 = s_1 = 6)$.

(2) $C^{(2)} = \{(000), (001), (010), (011)\}$ は $H(3, 2)$ の CRC of local type $(s_0 = 4, s_1 = 8)$.



$H(3,2) \supset C^{(1)}$ $H(3,2) \supset C^{(2)}$

$H(D,q)$ の code C に対して, $r(i;j) = r_C(i;j) := |\{y \in C | y_i = j\}|$ $(i \in I, j \in \Omega)$ と定義する. このとき, Hamming distance ∂ の定義によりただちに次の Lemma が成り立つ.

Lemma 2.2 $x, x' \in X$, $\partial(x,x') = 1$, $x_i \neq x'_i$ とする.

(1) $y \in X$ に対して,

$$\partial(x',y) = \begin{cases} \partial(x,y)+1 & (if\ y_i = x_i), \\ \partial(x,y)-1 & (if\ y_i = x'_i), \\ \partial(x,y) & (otherwise). \end{cases}$$

(2) *code* C に対して,

$$\sum_{y \in C} \partial(x',y) = \sum_{y \in C} \partial(x,y) + r(i;x_i) - r(i;x'_i).$$

この Lemma をもとに, C が CRC of global type になるための必要条件である, 次の同値な各命題を得る.

Theorem 2.3 $H(D,q)$ の *code* C について, 次の命題は同値. [これらは, C が *CRC of global type* になるための必要条件.]

(1) C *is 1-global* (*i.e* s_0, s_1 : *const., and* $s_0 = s_1$).

(2) C *is t-global.*

(3) s_0, s_1 : *const., and* $r(i;j) > 0$ (*for* $^\forall i \in I$, $^\forall j \in \Omega$).

(4) $r(i;j)$: *const.* (*for* $^\forall i \in I, ^\forall j \in \Omega$).

一方, CRC of local type は次のように分類され, また特徴付けられる.

Theorem 2.4 *$H(D,q)$ の code C について, 次の命題は同値.*

(1) *C is 1-local (i.e. s_0, s_1 : const., and $s_0 \neq s_1$).*

(1)′ *C is 1-local, and $s_0 < s_1$.*

(2) *C is t-local, and $s_0 < \cdots < s_t$.*

(3) *s_0, s_1 : const., and $r(i;j) = 0$ (for ${}^\exists i \in I$, ${}^\exists j \in \Omega$).*

(4) *C is a CRC of local type.*

(5) *$\phi \neq {}^\exists I' \subseteq I$, $\phi \neq {}^\exists \Omega' \subset \Omega$ such that $C = \{y \in X | y_i \in \Omega'(i \in I')\}$. [このとき induced subgraph としては, $C \simeq H(D', q') \times H(D-D', q)$ $(D' = |I'|, q' = |\Omega'|)$.]*

Remark 2.5 (cf. [4]) Theorem 2.3(4) は C が (Delsarte の意味での)1-design であることに, Theorem 2.4(3) は C が strength 0 の design であることに対応している.

Theorem 2.3(4) により, width w に関する次の bound が得られる.

Proposition 2.6 *$H(D,q)$ の CRC of global type C について, $w \geq \frac{|C|}{|C|-1}\frac{q-1}{q}D$. 特に,*

$$w > \frac{q-1}{q}D.$$

[いいかえると, $w \leq \frac{q-1}{q}D$ を満たす CRC C は local type であり, したがって $C \simeq H(w,q)$.]

Corollary 2.7 *$w \geq 0$ を fix するとき, $w < D$ を満たす CRC of global type が存在するような Hamming graph $H(D,q)$ は高々有限個.*
[なお, $w = D$ となる例は $C = \Gamma$ の場合を含め無数に存在する.]

Example 2.8 (cf. [1])

(1) Proposition 2.6 により, $w = 2 < D$ を満たす CRC of global type が存在する可能性のある Hamming graph は $H(3,2)$ のみ. 実際そのような CRC が次の 1 例のみであることは簡単に確かめられる.

$$H(3,2) \supset \{(000),(011),(101),(110)\}.$$

(2) 同様に, $w = 3 < D$ を満たす CRC of global type が存在する可能性のある Hamming graph は $H(4,2), H(5,2), H(4,3)$ のみ. 実際そのような CRC は次の 2 例のみ.

$$H(4,2) \supset \begin{pmatrix} 000 \\ 011 \\ 101 \\ 110 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad H(4,3) \supset \begin{pmatrix} 0000 \\ 0111 \\ 0222 \\ 1012 \\ 2021 \\ 1201 \\ 2102 \\ 1120 \\ 2210 \end{pmatrix} \text{ (perfect code).}$$

また, Theorem 2.3(4), Theorem 2.4(5) により, cardinality $|C|$ については次の制限が成り立つ.

Proposition 2.9 *$H(D,q)$ の CRC C について,* $|C| \equiv 0 \pmod q$ *または* $|C| = q'^D$ $(1 \leq q' < q)$.
[*特に,* $H(D,2)$ *の CRC C について,* $|C| \equiv 0 \pmod 2$ *または* $|C| = 1$.]

3 In the case of Johnson graphs

$\Gamma = J(n,D) = (X,R)$ を **Johnson graph** $(1 \leq D \leq n$, 主に $1 \leq D \leq n/2)$ とする. ここで,

- $N = \{1, \ldots, n\} \quad (n \geq 2)$.
- $X = \binom{N}{D}$.
- $\partial(x,y) = D - |x \cap y|$.

code C に対して, $r(i) = r_C(i) := |\{y \in C | i \in y\}| \quad (i \in N)$ とすると, 前節と同様な手法で以下が成立する.

Theorem 3.1 *$J(n,D)$ の code C について, 次の命題は同値. [これらは, C が CRC of global type であるための必要条件.]*

(1) *C is 1-global (i.e. s_0, s_1 : const., and $s_0 = s_1$).*

(2) *C is t-global.*

(3) s_0, s_1 : *const., and* $0 < r(i) < |C|$ (*for* $^{\forall}i \in N$).

(4) $r(i)$: *const.* (*for* $^{\forall}i \in N$).

Theorem 3.2 $J(n,D)$ の *code* C について, 次の命題は同値.

(1) C *is* 1-*local* (*i.e.* s_0, s_1 : *const., and* $s_0 \neq s_1$).

(1)′ C *is* 1-*local, and* $s_0 < s_1$.

(2) C *is* t-*local, and* $s_0 < \cdots < s_t$.

(3) s_0, s_1 : *const., and* ($r(i) = 0$ *or* $r(i) = |C|$ *for* $^{\exists}i \in N$).

(4) C *is a CRC of local type.*

(5) $\phi \neq {}^{\exists}N' \subset N$ *such that* $C = \{y \in X | y \subseteq N'\}$ *or* $C = \{y \in X | y \supseteq N'\}$. [このとき *induced subgraph* としては, $C \simeq J(n', D)$ または $C \simeq J(n-n', D-n')$ ($n' = |N'|$).]

Remark 3.3 (cf. [3]) Theorem 3.1(4) は C が 1-design であることに, Theorem 3.2(3) は C が strength 0 の design であることに対応している.

Proposition 3.4 $J(n,D)$ の *CRC of global type* C について, $w \geq \frac{|C|}{|C|-1}\frac{(n-D)D}{n}$. 特に,

$$w > \frac{(n-D)D}{n}.$$

[いいかえると, $w \leq \frac{(n-D)D}{n}$ を満たす *CRC* C は *local type* であり, したがって $C \simeq J(D+w, D)$ または $C \simeq J(n-D+w, w)$.]

Corollary 3.5 $w \geq 0$ を *fix* するとき, $w < D$ を満たす *CRC of global type* が存在するような *Johnson graph* $J(n,D)$ は高々有限個.

Example 3.6 (cf. [1]) Proposition 3.4 により, $w = 2 < D$ を満たす CRC of global type が存在する可能性のある Johnson graph は $J(6,3)$, $J(7,3)$, $J(8,3)$ のみ. 実際そのような CRC は次の 2 例のみ.

$$J(6,3) \supset \begin{pmatrix} 000111 \\ 001011 \\ 010101 \\ 100110 \\ 101001 \\ 110001 \\ 011010 \\ 110010 \\ 011100 \\ 101100 \end{pmatrix} \quad \text{(Petersen graph)},$$

$$J(7,3) \supset \begin{pmatrix} 0000111 \\ 0011001 \\ 1100001 \\ 0101010 \\ 1010010 \\ 1001100 \\ 0110100 \end{pmatrix} \quad \text{(Fano plane = 2-(7,3,1) design).}$$

Proposition 3.7 *$J(n,D)$ の CRC C について,* $|C|D \equiv 0 \pmod n$ または $|C| = \binom{n'}{D}$ $(D \leq n' \leq n)$ または $|C| = \binom{n-n'}{D-n'}$ $(0 \leq n' \leq D)$.

Further problems.

(1) CRC of global type の分類. さらなる bound や tool は?

(2) 大きい strength をもつ CRC の構成や分類.

(3) 大きい minimum distance $d = d_C := \min\{\partial(x,y) | x,y \in C, x \neq y\}$ をもつ CRC の構成や分類.

(4) 一般の DRG(あるいは graph) の CRC への一般化は?

References

[1] A.E.Brouwer, C.D.Godsil, J.H.Koolen, and W.J.Martin, *Width and dual width of subsets in polynomial association schemes*, J.Combin.Theory, Series A 102(2003) 255-271.

[2] P.Delsarte, *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*, Phillips Reseach Reports Suppl. 10(1973).

[3] A.D.Meyerwitz, *Cycle-balanced partitions in distance-regular graphs*, J.Combin. Inform.System Sci. 17(1992) 39-42.

[4] A.D.Meyerwitz, unpublished.

[5] A.Neumaier, *Completely regular codes*, Discrete Math. 106/107(1992) 353-360.