数理解析研究所講究録 1394 巻 2004 年 152-157

2-距離集合に関する Larman-Rogers-Seidel の定理について の考察

坂内悦子 (Etsuko Bannai)
九州大学 (Kyushu University)

この講演では次の二つのテーマについて述べた.

I. 双曲空間の 2 距離集合について.

II. 連結な強正則グラフ，すなわち対称かつ原始的なクラス 2 のアソシエーションスキーム，をユークリッド空間に埋め込むことによって得られる 2 距離集合について.

II の仕事は坂内英一との共同研究である.

まず，なぜ Larman-Rogers-Seidel の定理を問題にしたかと言うことについて少し述べる. ここ 2 年ほど坂内英一と共同でユークリッドデザインについて研究して来た. 私達の望む方向は tight なユークリッディアン $2e$-デザインを分類すると言うことなのであるがこれは非常に難しい問題である. しかしながら最近少しではあるが進展が得られた.

tight なユークリッディアン $2e$-デザインは原点を中心としたいくつかの同心球面上にのっているのであるが，同心球面のそれぞれに制限して考えるとウェイトが一定になっており，かつ高々 e-距離集合になっていることが解る. さらにウェイトがデザイン全体で一定になっている場合は同心球の個数は，少し細かい場合分けがあるが，上から e 又は $e+1$ でおさえられることがわかる. 特に tight なユークリッディアン 4-デザインの場合は原点を中心とした 2 個の同心球面（原点のみの場合も半径 0 の球面と考える）上になければならないことが解る. さらに半径が 0 でない球面上では高々 2-距離集合になっている. そこで下記に述べる 2-距離集合に関する Larman-Rogers-Seidel の定理が有効に働いたのである.

Larman-Rogers-Seidel の定理 ([5], 1977)

X を $\mathbf{R}^n$ の 2-距離集合とする. X の異なる 2 点間の距離を a, b, $b>a>0$ としておく. この時 $|X|>2n+3$ が成り立つならば次の条件を満たす整数 k が存在する.

$$(\frac{a}{b})^2=\frac{k-1}{k}, \quad 2\leq k\leq\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{n}{2}}.$$

ウェイトが一定な tight なユークリディアン 4-デザインの存在を仮定すると原点中心の 2 個の同心球面上にあることが解る. そして多くの場合は，いずれかの球面上には $2n+3$ 個以上の点が乗っていなければならないことが解かる（すなわち 2-距離集合になっている）. その

時に4-デザインであると言う条件が距離の2乗の比を決定してしかも Larman-Rogers-Seidel の定理に言う整数比をとらないことがわかり非存在を示すことができるのである．次元の小さいところでは細かい議論も必要になるのであるが Larman-Rogers-Seidel の定理が有効に働いて定数ウェイトの tight なユークリディアン 4-デザイン X が存在するのは $0 \in X$ かつ $X - \{0\}$ が球面上の tight な 4-デザインになっている場合に限ることが証明できる（[2]）．

そこで次のステップである tight なユークリディアン 6-デザインについて考える時に 3-距離集合について何か Larman-Rogers-Seidel の定理に類することが言えないかと考えるのである．そこでもう一度 Larman-Rogers-Seidel の定理がどの様に証明されたか振り返ってみた．目的とする 3-距離についての良い考えが見つかったわけではないが，双曲空間の 2-距離集合について Larman-Rogers-Seidel 型の定理がなりたつことが同様な方法で示すことが出来た．彼等の方法を復習する意味で双曲空間の場合の定理ノついて述べる．

I. 双曲空間の 2 距離集合について．

n 次元実ベクトル空間 $\mathbf{R}^n = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ x_i \in \mathbf{R}\}$ に次の内積 $<-, ->$ を考えたものを $\mathbf{R}^{1,n-1}$ で表す．

$$<\mathbf{x},\ \mathbf{y}> = x_1 y_1 - \sum_{i=2}^{n} x_i y_i.$$

この時

$$\mathbf{H}^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{1,n-1} \mid\ <\mathbf{x},\ \mathbf{x}> = 1,\ x_1 > 0\}$$

と定義する．$\mathbf{x},\ \mathbf{y} \in \mathbf{H}^{n-1}$ に対して

$$d(\mathbf{x},\ \mathbf{x}) = \operatorname{arc}\cosh(<\mathbf{x},\ \mathbf{y}>)$$

と定義する．すなわち

$$\frac{e^{d(\mathbf{x},\ \mathbf{y})} + e^{-d(\mathbf{x},\ \mathbf{y})}}{2} = <\mathbf{x},\ \mathbf{y}>.$$

この時 $(\mathbf{H}^{n-1}, d(-, -))$ は非ユークリッド距離空間になっており双曲空間と呼ばれる．この時 $\mathbf{x},\ \mathbf{y} \in \mathbf{H}^{n-1}$ に対して次の条件が成り立つ．

(1) $d(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) \geq 0$ かつ等号は $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

(2) $<\mathbf{x},\ \mathbf{y}> \geq 1$ かつ等号は $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

(3) $<\mathbf{x}-\mathbf{y},\ \mathbf{x}-\mathbf{y}> \leq 0$ かつ等号は $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

従って X を $\mathbf{H}^{n-1}$ の 2-距離集合とした時に距離のかわりに内積を考えても良いことになる．そこで

$$A(X) = \{<\mathbf{x}-\mathbf{y},\ \mathbf{x}-\mathbf{y}> \mid \mathbf{x},\ \mathbf{y} \in X,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}\},$$
$$A'(X) = \{<\mathbf{x},\ \mathbf{y}> \mid \mathbf{x},\ \mathbf{y} \in X,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}\}$$

と定義すると $\alpha < \beta < 0$ を満たす実数 α と β が存在して $A(X) = \{\alpha,\ \beta\}$ および $A'(X) = \{1 - \frac{\alpha}{2},\ 1 - \frac{\beta}{2}\}$ がなりたつ．$\alpha' = 1 - \frac{\alpha}{2}$, $\beta' = 1 - \frac{\beta}{2}$ と置く．この時次の定理が成り立つ．

定理. ([1]) X を双曲空間 $\mathbf{H}^{n-1}$ の 2-距離集合とする．さらに $|X| > 2n+2$ が成り立つならば次の条件を満たす整数 k が存在する．

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta'-1}{\alpha'-1} = \frac{k-1}{k}, \quad 2 \le k \le \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{n}{2}}.$$

以下に上記の定理の証明を与える．次の良く知られた補題が使われる．

補題 M と M' をそれぞれ m 次および $m-1$ 次の実対称行列とする．

$$M = \begin{pmatrix} M' & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

とし M の固有値を $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_m$, M' の固有値を $\mu_1 \ge \mu_2 \ge \cdots \ge \mu_{m-1}$ とすると

$$\lambda_1 \ge \mu_1 \ge \lambda_2 \ge \mu_2 \ge \cdots \ge \lambda_{m-1} \ge \mu_{m-1} \ge \lambda_m$$

が成り立つ．

この補題を使うことによって次の定理が証明できる．

定理 (Blumenthal ([4], 1953))
$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_N \in \mathbf{H}^{n-1}$ を含む $\mathbf{R}^{1,n-1}$ の超平面が一つも存在しないと仮定する．この時

$$\begin{pmatrix} \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1 \rangle & \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_N \rangle & 1 \\ \langle \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1 \rangle & \langle \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_N \rangle & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1 \rangle & \langle \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_N \rangle & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

は $(+)^2(-)^n(0)^{N-n-1}$ 型，すなわち正の固有値が重複度も込めて 2 個，負の固有値が重複度も込めて n 個，固有値 0 の重複度が $N-n-1$，である．

この定理を $\mathbf{H}^{n-1}$ の 2-距離集合 $X = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_N\}$ に適用する．

$c_{i,j} = \frac{1}{\alpha'-\beta'} < \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j >$, $1 \le i, j \le N$ と置く．この時

$$\begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,N} & 1 \\ \vdots & c_{i,j} & \vdots & \vdots \\ c_{N,1} & \cdots & c_{N,N} & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

はやはり $(+)^2(-)^n(0)^{N-n-1}$ 型である．従って任意の実数 h に対して

$$\begin{pmatrix} c_{1,1}-h & \cdots & c_{1,N}-h & 1 \\ \vdots & c_{i,j}-h & \vdots & \vdots \\ c_{N,1}-h & \cdots & c_{N,N}-h & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

も $(+)^2(-)^n(0)^{N-n-1}$ 型である.

$$C(h) = \begin{pmatrix} c_{1,1}-h & \cdots & c_{1,N}-h \\ \vdots & c_{i,j}-h & \vdots \\ c_{N,1}-h & \cdots & c_{N,N}-h \end{pmatrix}$$

と置くと $C(h)$ は次の4つの型のいづれかである（補題を使う）.

(1) $(+)^2(-)^n(0)^{N-n-2}$,

(2) $(+)^2(-)^{n-1}(0)^{N-n-1}$,

(3) $(+)^1(-)^n(0)^{N-n-1}$,

(4) $(+)^1(-)^{n-1}(0)^{N-n}$.

$N \times N$ 行列 A を

$$A_{i,j} = \begin{cases} 0 & (i=j \text{ の時}), \\ c_{i,j} - \frac{\beta'}{\alpha'-\beta'} & (i \neq j \text{ の時}), \end{cases}$$

と定義する. この時 $c_{i,i} = \frac{1}{\alpha'-\beta'}$ であり, $i \neq j$ であれば
$c_{i,j} = \frac{\alpha'}{\alpha'-\beta'}$ または $c_{i,j} = \frac{\beta'}{\alpha'-\beta'} = \frac{\alpha'}{\alpha'-\beta'} - 1$ のいづれかが成り立っている事に注目すると A の成分は 0 または 1 のいずれかである事が解る. 従って

$$C(\frac{\beta'}{\alpha'-\beta'}) = A - \left(\frac{\beta'-1}{\alpha'-\beta'}\right) I$$

が成り立つ. 従って $\lambda = \frac{\beta'-1}{\alpha'-\beta'}$ と置くと λ は A の固有値で重複度は少なくとも $N-n-2$ ある事が解る. A の成分は 0 又は 1 なので λ は代数的整数である. もし整数でないとするとその共役 λ' は λ と異なりしかも A の固有値でなければならない. そうすると $\lambda - \lambda'$ は $C(\frac{\beta'}{\alpha'-\beta'})$ の 0 と異りかつ重複度が少なくとも $N-n-2$ ある固有値となる. $C(\frac{\beta'}{\alpha'-\beta'})$ は上記の 4 つの型のいづれかであるから $N-n-2 \leq n$ でなければならない. 従ってもし $N > 2n+2$ が成り立つならば $\lambda = \frac{\beta'-1}{\alpha'-\beta'}$ は整数でなければならない. $\frac{\beta'-1}{\alpha'-\beta'} = k-1$ と置くと $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta'-1}{\alpha'-1} = \frac{k-1}{k}$ を得る. 次に $C(\frac{\beta'-2}{\alpha'-\beta'} + \frac{1}{2})$ を考えると,

$$2A - (J-I) = 2C(\frac{\beta'-2}{\alpha'-\beta'} + \frac{1}{2}) + (2k-1)I$$

が成り立つ. ここで J は全ての成分が 1 である行列である. 従って $B = 2A-(J-I)$ の固有値 μ_i, $1 \leq i \leq N$ で $\mu_i \geq 2k-1$ を満たすものの個数は少なくとも $N-n$ であることが解る. 一方 B の対角成分は全て 0 でありそれ以外の成分は 1 または -1 のいづれかであるので

$$\mathrm{trace}(B) = 0 = \sum_{i=1}^{N} \mu_i,$$

$$N(N-1) = \mathrm{trace}({}^tBB) = \sum_{i=1}^{N} {\mu_i}^2$$

を得る．これらの等式と $N > 2n+2$ であることより $k < \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{n}{2}}$ を得ることができる．

次に X が $\mathbf{R}^{1,n-1}$ の超平面にのっている時超平面は $\mathbf{R}^{1,n-1}$ のベクトル $\mathbf{a} \in$ と実数 a を用いて $<\mathbf{a},\ \mathbf{x}>= a$ と表すことができる．この時次のことが解る．

(1) $<\mathbf{a},\ \mathbf{a}> < 0$ の時は問題を $\mathbf{H}^{n-2}$ の 2-距離集合 X', $|X'| = N$, $A(X') = \{\alpha,\ \beta\}$ の場合に帰着できる．

(2) $<\mathbf{a},\ \mathbf{a}> > 0$ の時は問題をユークリッド空間 $\mathbf{R}^{n-1}$ の球面上の 2-距離集合 X', $|X'| = N$, $\{||\mathbf{x}' - \mathbf{y}'||^2 \mid \mathbf{x}',\ \mathbf{y}' \in X',\ \mathbf{x}' \neq \mathbf{y}'\} = \{-\alpha,\ -\beta\}$ の場合に帰着できる．ここで $||\ ||$ は $\mathbf{R}^{n-1}$ の普通のノルムである．

(3) $<\mathbf{a},\ \mathbf{a}>= 0$ の時は問題をユークリッド空間 $\mathbf{R}^{n-2}$ の 2-距離集合 X', $|X'| = N$, $\{||\mathbf{x}' - \mathbf{y}'||^2 \mid \mathbf{x}',\ \mathbf{y}' \in X',\ \mathbf{x}' \neq \mathbf{y}'\} = \{-\alpha,\ -\beta\}$ の場合に帰着できる．ここで $||\ ||$ は $\mathbf{R}^{n-2}$ の普通のノルムである．

以上，双曲空間の 2-距離集合に関する Larman-Rogers-Seidel 型定理の証明を彼等の方法と全く平行におここなうことによって証明できた．

II. 連結な強正則グラフの場合

連結な強正則グラフすなわちクラス 2 の対称な原始的アソシエーションスキームを球面上に埋め込むことによって2-距離集合を作ることができるが，この場合には距離の 2 乗の比がアソシエーションスキームの指標表から自然にすぐ得られることが解る．

$\mathfrak{X} = (X,\ \{R_i\}_{0\le i\le 2})$ をクラス 2 の対称な原始的アソシエーションスキームとする．$\mathfrak{X}$ の隣接行列を $A_0,\ A_1,\ A_2$ としボーズメスナー代数 $< A_0,\ A_1,\ A_2 >$ の原始ベキ等元による基底を $\{E_0,\ E_1,\ E_2\}$ とする．さらに $\mathfrak{X}$ の第 1 固有行列（指標表）を P，第 2 固有行列?Q とする．E_1 の階数を m_1 とし $\mathbf{R}^N$ を X で添字付ておく．ここで $|X| = N$ である．$\{\mathbf{e}_x \mid x \in X\}$ を $\mathbf{R}^N$ の標準基底とする．この時 X は E_1 により $\mathbf{R}^N$ の m_1 次元部分空間に埋め込まれる．すなわち $|\{E_1\mathbf{e}_x \mid x \in X\}| = N$．$\{E_1\mathbf{e}_x \mid x \in X\}$ を X と同一視する事にする．この時 X の点の間の内積は $(x, y) \in R_i$ であれば

$$(E_1\mathbf{e}_x,\ E_1\mathbf{e}_y) = E_1(x, y) = \frac{1}{N}Q_1(i)$$

で与えられる．従って X は R^{m_1} の球面上の2-距離集合となっている．指標表は

$$P = \begin{pmatrix} 1 & k & l \\ 1 & \theta & -\theta-1 \\ 1 & e & -e-1 \end{pmatrix}$$

の形に表されるのであるが，この時次の定理が成り立つ．

定理 (B-B) [3]
X の異なる 2 点間の距離を a, b, $b > a > 0$ とすると次が成り立つ. $(\frac{a}{b})^2 = \frac{K-1}{K}$ とおくと

$$K = -e, \quad e < 0 \text{ の時}$$
$$K = e + 1, \quad e > 0 \text{ の時}.$$

注意 上記定理において $m_1 \neq \frac{N-1}{2}$ であれば e は整数になることが知られている. したがってその時は K は整数である. Larman-Rogers-Seidel の定理に言う距離の 2 乗の比は指標表の値で上記の様に記述することができる. これらの例の中には $N \leq 2m_1 + 3$ となる (すなわち Larman-Rogers-Seidel の定理の仮定を満たさないが比は整数比となる) ものも多数含まれている.

References

[1] Etsuko Bannai, *On 2-distance sets in Hyperbolic space*, preprint.

[2] E. Bannai and E. Bannai, *On Euclidean tight 4-designs* , preprint.

[3] E. Bannai and E. Bannai, *A note on the spherical embeddings of strongly regular graphs*, preprint.

[4] L. M. Blumenthal, *Theory and Applications of Distance Geometry* (Oxford, 1953).

[5] D. G. Larman, C. A. Rogers and J. J. Seidel, *On two-distance sets in Euclidean space*, Bull London Math. Soc. 9 (1977) 261-267.