

実射影平面上 8 直線アレンジメントの 観測による幾何学的性質

福井哲夫

TETSUO FUKUI

武庫川女子大学

MUKOGAWA WOMEN'S UNIVERSITY *

関口次郎

JIRO SEKIGUCHI

東京農工大学

TOKYO UNIVERSITY OF AGRICULTURE AND TECHNOLOGY †

Abstract

In this report, a problem of classifying eight-line arrangements on the real projective plane is discussed. By using algebraic computation, all possible eight-line arrangements have been generated from the three sets of 14 kinds of samples of seven-line arrangements. As a result, 135 kinds of eight lines arrangements have been observed.

1 はじめに

実射影平面 $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ 上の n 直線アレンジメント $\mathcal{A}(H)$ は、 n 個の直線 $H = \{l_1, l_2, \dots, l_n\}$ による分割として定義される [2]。この論文では、単純アレンジメントについて議論する。アレンジメント $\mathcal{A}(H)$ が単純であるとは次の場合を言う。

条件 1 n 直線 l_1, l_2, \dots, l_n は互いに異なる。

条件 2 n 直線 l_1, l_2, \dots, l_n の内、いずれの 3 直線も 1 点で交わらない。

6 直線および 7 直線アレンジメントの分類についてはよく知られており、1967 年 Grünbaum[10] にあるように、単純な 6 直線アレンジメントは 4 種類のタイプに、7 直線では 11 種類に分類される。我々は、これらの場合が次の条件 3 を加えることによって、 E_6 および E_7 型 Weyl 群と関係があることを示し、6 直線アレンジメントは 4 種類に、7 直線アレンジメントは 14 種類に分類されることを示した [11][12][13][14][15]。

条件 3 どの 6 直線 l_1, l_2, \dots, l_6 も一つの円錐曲線に接しない。

以後の議論のために、文献 [13] の定義に従って、この 14 種類の 7 直線配置のタイプ名を $A1, B1, \dots, B5, C1, \dots, C4, D1, \dots, D4$ と呼ぶことにする。

*fukui@mwu.mukogawa-u.ac.jp

†sekiguti@cc.tuat.ac.jp

n が8以上のアレンジメントになると、頂点、辺、セルの数もより多くなり、7直線の場合よりも複雑になる[3][4][5][6][7][8]。そこで我々は、文献[9]において、与えられた直線配置に対して、セルの分割の仕方が互いに異なる可能なすべての横断線（貫通直線）を探索するアルゴリズムを提案し、7直線配置サンプルから8直線アレンジメントの組織的な生成実験を行った。その結果、多角形どうしの隣接関係の違いによる分類を観測した。しかし、1種類のサンプルによる実験では不十分で、より詳しい分析が必要であった。

本研究では、3組の異なった7直線配置サンプルを使用し、8直線アレンジメントの組織的な生成実験を行い、分類結果を裏付け、いくつかの幾何学的特徴について調べたのでここに報告する。

2 8直線アレンジメントの観測

2.1 8直線アレンジメントの生成実験

手法は文献[9]で述べた考え方によって、計算を行った。実際のアレンジメント生成および横断線探索には計算機(PowerPC 1GHz)を使用し、アルゴリズムのインプリメントにはMathematica4.2を使用した。

8直線アレンジメントの生成実験を行うためには、アレンジメントの異なる11種類の代表を使えば十分と思われるが、将来、Weyl群との関係を議論することを考慮し、1章で述べた14種類の連結成分タイプに属する7直線配置を使用する。アレンジメントの異なる14タイプを代表する7直線配置として、3組のサンプル(I),(II),(III)を使用した。サンプル(I)の 3×7 行列の定義は文献[9]の式(4)を使用した。サンプル(II)として、文献[8]の式(5)~(8)で定義された行列 $X_A \sim X_{D_4}$ を使用した。サンプル(III)として、文献[16]の式(10)~(13)で定義された行列 $X_A \sim X_{D_4}$ を使用した。

2.2 横断線探索結果

生成元(I)からは1974個の、(II)および(III)からは1973個の8直線アレンジメントを生成した。生成元のタイプ別の横断線探索結果を表1に示す。

表1: 生成元サンプル(I),(II),(III)によるタイプ別の探索された横断線の数

*)は(I)と(II)で違いのあった横断線の数を表す。(注意:(III)と(II)の横断線に違いはなかった)

Sample	A	B1	B2	B3	B4	B5	C1	C2	C3	C4	D1	D2	D3	D4	total
(I)	141	141	141	141	141	141	141	141	141	141	141	141	141	141	1974
(II)	140	141	141	141	141	141	141	141	141	141	141	141	141	141	1973
(III)	140	141	141	141	141	141	141	141	141	141	141	141	141	141	1973
*)	3	0	4	4	2	10	2	2	0	8	6	0	10	8	

興味深いのは、7直線配置が異なる3つのサンプル(I),(II)および(III)の、どのタイプのアレンジメントを生成元としても、存在した横断線の数が141以下であったことである。このことは予想外であり、一つの発見である。

2.3 多角形どうしの隣接関係による分類

計算結果の分類を行うための幾何学的特徴として、多角形に隣接している多角形の情報定義しよう。 n 直線アレンジメントを A とすると、 $M = \frac{n(n-1)}{2} + 1$ 個の多角形が存在する。それらを Σ_j ($j = 1, 2, \dots, M$)で表そう。もし、 Σ_j が p -多角形ならば、 Σ_j と隣接する(共有辺を持つ) p 個の多角形 $\Sigma_{j_1}, \dots, \Sigma_{j_p}$ が存在する。いま、各 Σ_{j_k} が N_{j_k} -多角形($k = 1, \dots, p$)であるとして、リスト $R_{\Sigma_j} = \{N_{j_1}, \dots, N_{j_p}\}$ を定義す

る。このとき $N_1 \leq N_2 \leq \dots \leq N_p$ となるように並べるものとする。この R_{Σ_j} を以後、 p -多角形 Σ_j の隣接多角形リストと呼ぶことにする。

定義 1 アレンジメント A に含まれる全ての多角形 $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_M$ の隣接多角形リストを辞書式順序で並べたリスト $R(A) = \{R_{\Sigma_1}, R_{\Sigma_2}, \dots, R_{\Sigma_M}\}$ を A における多角形どうしの隣接関係と呼ぶ。

例えば、単純な 7 直線アレンジメントは多角形どうしの隣接関係が異なる 11 種類のパターンに分類できる。

上記の多角形どうしの隣接関係を使って、計算結果の分類を行おう。

サンプル (I),(II) および (III) のどの場合を生成元としても、生成された 8 直線アレンジメントには、8 角形から 3 角形までの多角形数分布の違いによって 28 種類、多角形どうしの隣接関係の違いによって 135 種類のそれぞれ同じパターンが観測された。これらを表 2 に示す。この結果は、以前の試行錯誤的探索 [8] と同じとなった。表は 2 段 4 列に組まれており、135 種類の多角形どうしの隣接関係 $R(A)$ に対する (a) 多角形数分布、(b) 1 本除いた 8 通りの部分 7 直線アレンジメントのタイプ列記 (次項参照)、(c) サンプル (I),(II) からの生成数を表している。ただし、(a) 列の括弧内の番号は 28 種類の多角形数分布を識別する通し番号であり、(c) の数値は、生成数が (I),(II) と同じ場合は 1 つのみ記し、(I) と (II) で異なる場合は n_I/n_{II} の様に表示した。特に注意すべきは、サンプル (II) および (III) からの生成数は全く同じ ($n_{II} = n_{III}$) であったので省略した。

表 2 の (c) から、多角形どうしの隣接関係が異なる 135 種への生成分布数がサンプル (I) の実験と (II) では異なるものがある。このことは、同じタイプのアレンジメントを生成元としても、貫通できる辺の組合せに違いが生じていることを示している。ただし、両者の分布の差は高々 2 以下である。この違いをタイプ別に整理したものが表 1 の*) である。

2.4 E_7 型 Weyl 群の連結成分のタイプによる分類

生成された 8 直線のうち、1 本除いた 7 直線アレンジメントに関するタイプ列記情報を調べよう。

条件 1, 2, 3 を満たす 7 直線配置は E_7 型 Weyl 群と関係があることを先に述べた。7 直線配置によっては、条件 3 により、5 直線に接する円錐曲線と残りの直線との交叉関係に注意する必要がある。

アレンジメントに含まれる 6 直線が 6 角形を作る場合、条件 3 によってその 1 つの直線は残りの 5 直線に接する円錐曲線 (注意: 円錐曲線は一意的に決まる) と交叉 (2 点を共有) するか、交叉しない場合のどちらかしかない。タイプ C2 と D2 などは多角形どうしの隣接関係は全く同じだが、この交叉が異なる。

注釈 1 • タイプ C2 と D2 は、同じアレンジメントに属し、円錐曲線との交叉関係が異なる、

- タイプ C4, D1, D4 は、同じアレンジメントに属し、円錐曲線との交叉関係が異なる。

今、ある 8 直線配置 $A(H)$, $H = \{l_1, l_2, \dots, l_8\}$ において、直線 l_j を除いた 7 直線 h_j に対するアレンジメント $a(h_j)$ を部分アレンジメントと呼ぶ。このとき 8 通りの部分アレンジメント $a(h_j)$ ($j = 1, \dots, 8$) に対する 14 種類の 7 直線タイプ名 (A, B1~B5, C1~C4, D1~D4) を辞書式順序に並べたリストを $A(H)$ の部分アレンジメントの 14 タイプ列記と定義する。この部分アレンジメントのタイプ列記は 8 直線アレンジメント $A(H)$ の幾何学的特徴を知るための手がかりとなるはずである。

実際、生成された 8 直線アレンジメントに対する部分アレンジメントのタイプ列記を調べたところ、サンプル (I) からは 577 種類、(II) からは 569 種類、(III) からは 578 種類を観測した。しかし、今回の横断線探索は配置に含まれる 6 角形と接円錐曲線との交叉関係を全く考慮していないため、このようなサンプルによるばらつきが生じている。むしろ、部分アレンジメントの 14 タイプ列記の種類は観測された数よりもずっと多いと予想される。

表 2: サンプル (I),(II),(III) より生成された 8 直線アレンジメントの集計結果

R(A) は 135 種類の多角形どうしの隣接関係の違いを表す番号、(a) 多角形数分布の (通し番号) とリスト、

(b) 部分アレンジメントの 11 タイプ列記、(c) サンプル (I)/(II) からの生成数 (注意、(III) の生成数は (II) と同じ)

R(A)	(a) Numbers of 8,7,6,5,4,3-gon	(b) Type list of subarrangements	(c) n_I/n_{II}	R(A)	(a) Numbers of 8,7,6,5,4,3-gon	(b) Type list of subarrangements	(c) n_I/n_{II}
1	(1) 0,0,0,4,17,8	B1,B1,B1,B1,B3,B3,D3,D3	7	69		B2,B3,B3,B3,C2,C4,C4,C4	15
2		B1,B1,B1,B1,B4,C2,D3,D3	17/18	70		B2,B2,B3,B3,C4,C4,C4,C4	17/16
3		B1,B1,B1,C4,D3,D3,D3,D3	18	71		B1,B2,B2,C4,C4,C4,C4,C4	21
4		C2,C2,D3,D3,D3,D3,D3,D3	15	72		B3,B3,B4,C3,C4,C4,C4,C4	17
5	(2) 0,0,0,5,15,9	B1,B1,B3,B3,B3,B3,B3,B3	3/4	73		B3,B3,B4,B4,C4,C4,C4,C4	17/18
6		B1,B1,B3,B3,B3,B4,C4,D3	11/12	74		B2,B3,B3,B3,C2,C3,C3,C4	18/16
7		B2,B3,B3,B3,B3,D3,D3,D3	4/3	75		B3,B3,B4,B4,C3,C3,C4,C4	21/20
8		B1,B3,B3,B3,B3,B4,D3	6	76		B2,B2,B3,B3,B4,C2,C4,C4	16
9		B1,B3,B3,B4,B4,C4,D3,D3	14/13	77		B2,B2,B4,B4,C4,C4,C4,C4	10
10		B1,B1,B1,B2,B3,B3,C4,D3	15/16	78		B2,B2,B2,C2,C2,C4,C4,D3	21
11		B3,B3,B3,B4,C4,D3,D3,D3	8	79		B2,B2,B4,B4,C1,C2,C4,C4	32
12		B1,B3,B3,B3,C4,D3,D3	7	80		B2,B2,B2,C1,C2,C4,C4,D3	28
13		B1,B1,B4,B4,C4,C4,D3,D3	18	81	(10) 0,0,1,5,12,11	A,A,B1,B3,B5,C4,C4,D3	15
14		B3,B3,B3,C2,C4,D3,D3,D3	11/10	82		B2,B2,B2,B2,C3,C3,C4,C4	13
15		B1,B1,B2,B4,B4,C2,D3	17	83		A,A,B3,B3,B5,C2,C4,C4	16/17
16		B1,B3,B3,B3,B4,B4,C2,D3	12	84		A,A,B1,B3,B3,B5,C3,C4	16/14
17		B3,B3,B4,B4,C2,C2,D3,D3	15	85		A,A,B3,B3,B4,B5,C4,C4	14/13
18		B4,B4,B4,C2,D3,D3,D3,D3	9	86		A,A,B2,B4,B5,C4,C4,D3	16
19	(3) 0,0,0,6,13,10	B1,B2,B3,B3,B3,B3,B3,B4	7	87		A,A,B1,B4,B5,C2,C2,C4	22/23
20*		A,A,B1,B1,B3,B3,B3,B3	10/9	88		B2,B2,B3,B3,C3,C3,C4,C4	19
21		B2,B3,B3,B3,B3,B3,B4,C4	7/6	89		A,A,B2,B3,B5,C2,C2,C4	19/20
22		B2,B3,B3,B3,B3,B3,B4,C4	9/10	90		B2,B2,B2,B2,B4,C1,C4,C4	15
23		B2,B3,B3,B4,B4,C4,C4,D3	15/16	91	(11) 0,0,1,6,10,12	A,A,B1,B3,B3,B5,B5,C4	12/11
24		A,A,B1,B1,B2,B4,B4,D3	6	92		B1,B3,B3,B4,B5,B5,B5,C4	15
25		B1,B2,B2,B3,B3,B3,C3,D3	12	93		A,A,B2,B3,B4,B5,C3,C4	22
26		B2,B2,B2,B3,B3,B4,C2,D3	15/16	94		B3,B4,B5,B5,B5,C2,C4,D3	17/18
27		B1,B2,B2,B4,B4,B4,C2,C4	20/19	95		B5,B5,B5,C2,C4,C4,D3,D3	10
28		B2,B2,B3,B3,B3,C2,C4,D3	14/13	96		A,A,B3,B3,B5,B5,C2,C3	7/6
29		B4,B4,B4,B4,B4,C4,C4	9	97		B1,B3,B5,B5,B5,B5,C2,D3	17/16
30		B3,B3,B3,B4,B4,C3,C4,D3	13/12	98		A,A,B2,B3,B5,C3,C3,C4	23/22
31		B2,B2,B3,B3,B4,C2,D3,D3	13	99		A,A,B2,B2,B4,C2,C4,C4	22
32		B2,B4,B4,B4,C2,C2,D3	10	100	(12) 0,0,1,7,8,13	A,A,B2,B2,B3,B3,B5,C3	7
33	(4) 0,0,0,7,11,11	A,A,B2,B3,B3,B3,B3,D3	6	101		A,A,B3,B3,B4,B5,B5,B5	11
34		A,A,B2,B3,B3,B3,B4,C4	13	102		A,A,B2,B3,B5,B5,B5,C4	16
35		A,A,B1,B2,B3,B5,D3,D3	16/17	103		A,A,B2,B2,B5,B5,C4,C4	17/18
36		A,A,B2,B2,B3,B3,B4,C2	8/7	104		B2,B2,B3,B3,B5,B5,B5	6
37		A,A,B3,B3,B3,B3,B4,C3	5	105		B2,B3,B4,B5,B5,B5,B5,C4	15
38		A,A,B3,B3,B4,B5,D3,D3	14	106	(13) 0,0,1,8,6,14	A,A,B2,B2,B5,B5,B5,C3	11
39		A,A,B1,B2,B4,C2,C4,D3	21/20	107	(14) 0,0,2,0,19,8	C2,C2,C2,C2,C2,C2,C2,C2	8
40		B2,B2,B2,B3,B3,B3,C3,C4	14/13	108	(15) 0,0,2,1,17,9	C2,C2,C4,C4,C4,C4,C4,C4	26
41		B1,B2,B2,B2,B2,B4,B4,C4	16	109		C4,C4,C4,C4,C4,C4,D3,D3	11
42		B2,B2,B2,B2,B4,C2,C4,C4	20	110	(16) 0,0,2,2,15,10	B4,B4,C3,C3,C4,C4,C4,C4	14
43	(5) 0,0,0,8,9,12	A,A,B2,B3,B3,B4,B5,D3	13	111		C4,C4,C4,C4,C4,C4,C4,C4	12
44		A,A,B1,B3,B4,B5,B5,D3	14/15	112		C2,C3,C3,C3,C4,C4,C4,C4	17
45		A,A,B2,B2,B2,B2,C4,C4	7	113	(17) 0,0,2,3,13,11	B2,B2,C3,C3,C3,C3,C4,C4	17
46		A,A,B2,B4,B5,C4,C4,D3	19	114	(18) 0,0,2,4,11,12	B2,B2,B5,B5,B5,B5,D3,D3	4/3
47		B2,B2,B2,B2,B4,B4,B4	2	115		B2,B3,B5,B5,B5,B5,C2,C4	15
48*	(6) 0,0,0,9,7,13	B2,B2,B3,B3,B4,B5,B5,B5	7	116		B3,B4,B5,B5,B5,B5,C4,D3	14/15
49	(7) 0,0,1,2,18,8	B1,B1,B1,C2,C2,C2,C2,C4	25/26	117		B1,B5,B5,B5,B5,C2,C3,C4	22
50		C2,C2,C2,C2,C2,C2,D3,D3	14	118		B2,B5,B5,B5,B5,C4,C4,D3	9
51		C2,C2,C2,C2,C2,C2,D3,D3	6/7	119		B4,B5,B5,B5,B5,C2,C4,C4	20
52		C1,C2,C2,C2,D3,D3,D3,D3	24	120	(19) 0,0,2,5,9,13	B2,B3,B4,B5,B5,B5,C3,C4	20
53	(8) 0,0,1,3,16,9	B1,B1,B3,B3,C4,C4,C4,C4	17	121		B2,B3,B5,B5,B5,C4,C4,C4	17/18
54		B1,B1,B3,B3,C2,C3,C4,C4	18	122		B4,B5,B5,B5,B5,C3,C4,C4	11
55		B3,B3,B3,C2,C4,C4,C4,D3	14/13	123	(20) 0,0,2,6,7,14	A,A,B2,B5,B5,B5,B5,D3	6
56		B3,B3,B3,C2,C4,C4,C4,D3	12/14	124		A,A,B5,B5,B5,B5,B5,C2	9
57		B3,B3,B4,C2,C2,C4,C4	22	125	(21) 0,0,2,7,5,15	A,A,B4,B5,B5,B5,B5,B5	9
58		C2,C2,C4,C4,C4,C4,D3,D3	22/23	126	(22) 0,0,3,6,4,16	B2,B2,B5,B5,B5,B5,B5,B5	4
59		C2,C2,C4,C4,C4,C4,D3,D3	23/24	127	(23) 0,1,0,1,19,8	C1,C1,C1,C2,C2,C2,C2,C2	31
60		B3,B3,B3,C2,C2,C4,C4	7	128	(24) 0,1,0,2,17,9	C1,C1,C4,C4,C4,C4,C4,C4	23
61		B1,B3,B3,C2,C2,C4,C4,C4	22/21	129		C1,C1,C2,C2,C4,C4,C4,C4	48
62		B1,B1,B4,B4,C2,C2,C4,C4	24	130	(25) 0,1,0,3,15,10	C1,C3,C3,C3,C4,C4,C4,C4	17/18
63		B3,B3,B3,C2,C2,C4,D3	14/15	131	(26) 0,1,0,5,11,12	B5,B5,B5,B5,C1,C3,C4,C4	15/14
64		B4,B4,B4,C1,C4,C4,D3,D3	23	132		B5,B5,B5,B5,C1,C2,C4,C4	16
65		B4,B4,B4,C2,C2,C4,C4	24	133		B5,B5,B5,C1,C2,C2,C4,C4	17
66		B4,B4,B4,C1,C2,C2,C2,C2	18	134	(27) 0,1,0,7,7,14	B5,B5,B5,B5,B5,B5,B5,C1	2
67	(9) 0,0,1,4,14,10	B3,B3,B3,B3,B4,C3,C4,C4	7/8	135	(28) 1,0,0,0,20,8	C1,C1,C1,C1,C1,C1,C1,C1	7
68		B2,B3,B3,C4,C4,C4,C4,D3	9/8				

そこで、接円錐曲線を無視した幾何学的特徴の違いを調べるため、逆に D2 を C2 と同一視し、D1 と D4 を C4 に同一視した部分アレンジメントの 11 タイプ列記を考える。結果、どのサンプル (I),(II),(III) に対しても、部分アレンジメントの 11 タイプ列記を 130 種類観測した。具体的なデータを表 2 の (b) に示す。

次に、135 種の多角形どうしの隣接関係と 130 種の部分アレンジメントの 11 タイプ列記との関係を調べたところ、下の表の 5 種類だけが 2 対 1 に対応しており、残り 125 種類は全て 1 対 1 に対応していることが分かった (表 2 の (b))。

表 3: 多角形どうしの隣接関係と部分アレンジメントの 11 タイプ列記で 1 対 1 対応していない場合

表 2 の $R(A)$ 番号		部分アレンジメントの 11 タイプ列記
46,86	↔	{A,A,B2,B4,B5,C4,C4,D3}
21,22	↔	{B2,B3,B3,B3,B3,B3,B4,C4}
50,51	↔	{C2,C2,C2,C2,C2,C2,D3,D3}
55,56	↔	{B3,B3,B3,C2,C4,C4,C4,D3}
58,59	↔	{C2,C2,C4,C4,C4,C4,D3,D3}

最後に、文献 [8] で、部分アレンジメントのタイプ列記の種類を 131 と報告したが、見落としがあったため、130 種類に訂正したい。

3 まとめと考察

計算幾何学で知られている横断線探索法を応用し、7 直線配置の異なる 14 通りのアレンジメントサンプル (I),(II),(III) から、可能な全ての辺の組合せによる横断線を確実に探索し、8 直線アレンジメントの生成実験を行った。得られた観測結果は：

1. サンプル (I),(II),(III) のどの 14 タイプからも 141 以下の横断線が存在した (表 1)。
2. サンプル (I),(II),(III) どの場合を生成元としても、生成された 8 直線配置には多角形数分布の違いによって 28 種類、多角形どうしの隣接関係の違いによって 135 種類のそれぞれ同じタイプが観測された (表 2)。
3. 生成された 8 直線アレンジメントに対して、部分アレンジメントの 11 タイプ列記の違いを調べた結果：(I)、(II)、(III) とも 130 種類観測した。
4. 135 種類の多角形どうしの隣接関係と 130 種類の部分アレンジメントの 11 タイプ列記との間には、5 組が 2 対 1 対応、125 種は 1 対 1 対応の関係があった。

最後に、サンプルによる違いについていくつか考察を述べる。

表 1 にあるように、サンプル (II) および (III) のタイプ A を生成元としたときのみ、140 通りの横断線が存在し、他より 1 本少なく観測された。この違いについては、図 1 が示すような次の注釈が関係している。

注釈 2 アレンジメント $A(H)$, $H = l_1, \dots, l_7$ に含まれる頂点のうち、

- サンプル (I) のタイプ A は、同じ l_i ($i = 1, \dots, 7$) 上にないどの 3 頂点も同一直線上にない、
- サンプル (II) および (III) のタイプ A は、 H 以外の同一直線上ある 3 頂点がただ 1 組存在する。

すなわち、サンプル (I) で図 1 の点線のような 3 頂点を縫う横断線が、サンプル (II) および (III) では (配置の対称性によって) 存在できなかったのである。

次に、表 2 の (c) 列にみられるように、135 種類の多角形どうしの隣接関係への分布が、サンプル (I) と (II) で異なっている点について述べる。詳細に調べた結果、これも上の注釈 2 と密接に関係しており、次のようなことが起こりうることを発見した。

注釈 3 7 直線アレンジメント $A(H)$, $H = l_1, \dots, l_7$ に含まれる同じ l_i ($i = 1, \dots, 7$) 上にない 3 頂点のうち、同一直線 (L) 上にあるような 7 直線配置 H が存在する。

このとき、 $A(H)$ と同じアレンジメントを持つ別の配置 H' で、3 頂点が L の (1) 下、上、下側にある場合 (図 1) と (2) 上、下、上側にある場合の 2 通りが存在する。

これがサンプルによる違いの理由となっている。より詳しい分析については、今後の課題としたい。

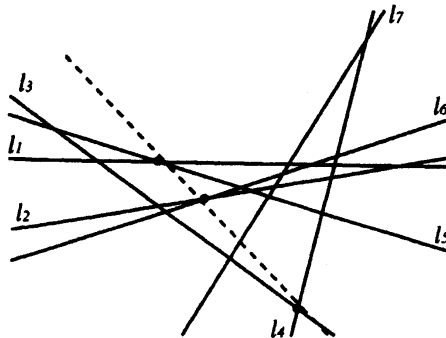


図 1: 違いのあった横断線の例と 3 頂点

参 考 文 献

- [1] N. Bourbaki: Groupes et Algèbre de Lie Chap. IV-VI, *Hermann*, Paris, 1968.
- [2] H. Edelsbrunner: Algorithms in Combinatorial Geometry, *Springer*, Heidelberg, 1987.
- [3] T. Fukui and J. Sekiguchi: A remark on labelled 8 lines on the real projective plane, *Reports of Faculty of Science, Himeji Inst. Tech.*, **8**, 1997, 1-11.
- [4] 福井哲夫, 関口次郎: 数式処理の実射影平面上 N 本直線配置問題への応用事例, *数理解析研究所講究録*, **1030**, 1998, 62-74.
- [5] 関口次郎, 福井哲夫: 実射影平面上の 8 直線アレンジメント I, *数式処理*, **7**(1), 1998, 33-35.
- [6] 福井哲夫, 関口次郎: 実射影平面上の 8 直線アレンジメント II: 構成実験の分析, *数式処理*, **7**(1), 1998, 36-38.
- [7] T. Fukui and J. Sekiguchi: Eight lines arrangements on the real projective plane and the root system of type E_8 , *Proc. ATCM '98*, Springer, Singapore, 1998, 377-388.
- [8] T. Fukui and J. Sekiguchi: Experimental computation on configurations of eight lines on the real projective plane, *Reports of Faculty of Science, Himeji Inst. Tech.*, **9**, 1998, 1-11.

- [9] T. Fukui and J. Sekiguchi: 貫通直線探索法による実射影平面上8直線アレンジメントの生成実験, 第5回「代数学と計算」研究集会報告集, <ftp://tnt.math.metro-u.ac.jp/pub/ac03/>, 2003, 1-9.
- [10] B. Grünbaum: Convex Polytopes, *Interscience*, 1967, Chap.18.
- [11] J. Sekiguchi: Cross ratio varieties for root systems, *Kyushu J. Math.*, **48**, 1994, 123-168.
- [12] J. Sekiguchi: Cross ratio varieties for root systems II: the case of the root system of type E_7 , *Kyushu J. Math.*, **54**(1), 2000, 7-37.
- [13] J. Sekiguchi: Geometry of 7 lines on the real projective plane and the root system of type E_7 , *RIMS Kokyuroku*, **986**, 1997, 1-8.
- [14] J. Sekiguchi and T. Tanabata: Tetradiagrams for the root system of type E_7 and its application, *Reports of Faculty of Science, Himeji Inst. Tech.*, **7**, 1996, 1-10.
- [15] J. Sekiguchi and M. Yoshida: The $W(E_6)$ -action on the configuration space of six points of the real projective plane, *Kyushu J. Math.*, **51**, 1997, 297-354.
- [16] J. Sekiguchi: Configurations of seven lines on the real projective plane and the root system of type E_7 , *J. Math. Soc. Japan*, **51**(4), 1999, 987-1013.