

トラスの形状最適化

Topology Optimization of Trusses

大崎 純

Recent developments of shape optimization of trusses are reviewed, and the author's method of topology optimization for specified multiple fundamental eigenvalues is briefly summarized. A introduction of structural optimization is included for the readers who are not familiar with and/or against the concepts of optimization. New formulations in topology optimization under stress constraints are presented, and difficulties in simultaneous optimization of topology and geometry are summarized.

1. はじめに

建築構造物を設計する際には、デザイナー（アーキテクト）によって形態の概要が決定され、構造設計者（エンジニア）は、その詳細を設計するというのが一般的な流れかもしれない。しかし、大スパン構造物では、力の流れを無視した形態は成立せず、現在のテクノロジーをもって実現可能であっても、自然の要求に逆らった構造形態は、決して美しいとはいえないであろう。したがって、大スパン構造の設計においては、設計過程の中で、デザインを「上流」、構造設計を「下流」とするような解釈は許容されないであろう。

構造上最も合理的な剛性分布や形態を求める試みとしては、建築以外の機械構造物の設計などの分野において、古くから最適設計や形状最適化の研究が進められ、実用化されている。一方、建築の分野では、一品生産やアーキテクト重視の社会的要求から、構造最適化は、その研究が進展しているにも関わらず受け入れられにくいのが現状である。

しかし、最適設計の実用化は、実際に上記の理由が障壁となっているのであろうか。筆者の意見としては、「最適化」に対する理解が一般の研究者や技術者の間で不十分であることが、最も大きな障壁であると思われる。筆者が学会やシンポジウムで発表したときには、「最適化して何が良いのか」、「本当に最適なのか」、「実際はコストは大きくなるのではないのか」などの質問を受けることが多い。このような質問は、発表の内容を全く聞かなくてもできるのであり、決して質の高いものとはいえない。

本稿では、トラスの形状最適化に対象を限定して、この分野の研究の概要を紹介する。この分野に興味を持っている研究者や学生が研究を始めるための何らかのきっかけとなることを期待するとともに、この分野に対する知識の少ない研究者・技術者にも、一般名詞としての「最適化」ではなく、専門用語としての「最適化」を理解していただければ幸いである。

2. 最適設計とは

「最適設計問題」とは、数理工学の分野での「最適化問題」を構造設計の分野に適用した問題であり、一般に次のように書ける。

Minimize 目的関数
subject to 力学的制約条件

目的関数には「全構造重量」を考えることが多い。鉄骨構造のように、鉄骨重量を減少させることがコスト削減につながる場合には問題ないが、構造質量がコストと直接関係ない場合にも、最適化を行なうことによって、全ての制約条件を満たす許容な設計解（満足解）が得られることが重要である。また、上記定式化を受け入れにくい人も、

Maximize 力学的性能
subject to コストに関する制約

ならば受け入れやすいかもしれない。ただし、良く知られているように、上記の2つの問題が数学的に厳密に変換されているならば、それらの解は同一となる。以上のように、最適設計問題には種々の定式化が存在し、それらを「最小重量設計問題」、「最大剛性設計問題」、「変位最小化問題」などと呼ぶのは極めて煩雑であり、それらを包含した問題としての「最適設計問題」を、一般の用語ではなくて専門用語として理解していただきたい。例えば、「座屈解析」ならば、「座屈」という言葉を日常会話で使う人はいないから問題ないであろう。それでは、同様の意味として「安定解析」はどうだろうか。「安定」という言葉は日常でも自然に用いられるが、「安定解析」という用語を建築の世界で用いることに疑問を感じる人はいるだろうか。それにも関わらず、力学の分野では

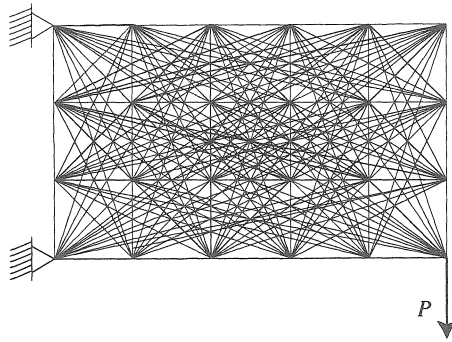


図 1: 多くの部材と節点を有する初期設計 (ground structure)

「安定」には多くの定義が存在することを理解している人はいるだろうか。では、なぜ「最適」は単なる専門用語として許容されないのだろうか。

最適設計に対する批判として、「最適設計を行なうと非現実的な解が得られる」という意見を良く聞く。しかし、最適解は、与えられた最適化問題から必然的に得られるのであるから、非現実的な解が得られるのは、最適化を行なうのが悪いのではなく、問題の設定が悪いということになる。人間の設計行為は、定式化できないとしても、何らかの評価尺度を最適化する過程だと考えることができる。そのように考えると、最適設計問題を設定して解くことは極めて自然である。このような状況を理解した上で、今後、より現実的な問題を定式化し、それを実用的な計算コストで解くことができるように、多くの研究者・技術者の理解と協力が望まれる。

3. トラスの形状最適化の概要

トラスや骨組構造物の形状最適化は、大きく分けて、節点位置最適化と部材の接続関係最適化に分類される。前者は、geometry optimization あるいは configuration optimization といわれ、後者は topology optimization とよばれる。通常、両者は断面積最適化 (sizing optimization) を含み、断面積最適化は単に最適設計 (optimum design) といわれる。さらに、節点位置とトポロジーの同時最適化は、configuration optimization ともいわれる。これらの用語の定義は研究者によって異なるところもあり、多少の混乱もあるが、ここでは、「節点位置最適化」、「トポロジー最適化」、「トポロジー節点位置同時最適化」の用語を用いることにする。

骨組構造物の形状最適化の歴史は、大きく 3 つの時期に分けられる。Michell (1904) あるいは Maxwell (1894) の論文が、通常この分野の最初の論文として引用される。Michell の研究は、その理論的価値は大きいですが、限定された構造物形態と制約条件にしか有効ではない (Hemp 1973)。

1960 年代から 1970 年代にかけて、コンピュータが一部の研究者と実務設計者に利用可能となり、小規模構造物に対して有効な数値解析手法が提案された。この第 2 期には、最適性条件法などの理論的にも重要な研究が発表されて、トポロジー最適化における種々の問題点が検討されている。最近になって、第 3 期として、コンピュータのソフトウェアとハードウェアの飛躍的な進歩により、多くの数値解析の手法が提案され、実際に建設される大規模構造物に対しても有効な手法が開発されている。

本稿では、上記の第 3 期の成果を解説する。第 2 期までの理論的成果、最適性条件法、grillage による方法などは、Kirsch (1989b), Rozvany (1976, 1989, 1997) などを参照されたい。剛接骨組とトラスは有限要素法の定式化という面からは同様であるので、以下ではトラスを主に対象とする。ピン接合による不安定性により、トラスの最適化は一般に骨組の最適化より困難である。

トポロジー最適化の数値解析法は、通常図 1 に示すような ground structure といわれる多くの部材と節点をもつトラスから、節点位置を固定して不要な部材と節点を取り除き、最適解を得る (Kirsch 1989b, Topping 1992)。図 2 に示すように、この過程では、節点位置が固定されるため、節点位置は最適化されない。この種の手法には、多くの研究が存在し、最適解を求めるのは計算効率の問題だけであると思われるかもしれない。しかし、応力制約、部材座屈制約、振動数制約の場合には、多くの問題点が残されている。また、大規模構造物に対する効率の良い手法の開発も望まれる。

一方、節点位置最適化は、図 3 に示すように、節点座標を連続変数と考え、数値計画法を単に適用して実行できる。この過程では、節点の重複や部材の交差を防ぐため、節点座標には通常上下限値が与えられる。したがって、トポロジーは初期設計解から変化しない。以上より、トポロジーと節点位置の同時最適化問題は単純な形式では定式化できず、最適解を得ることは極めて困難である。

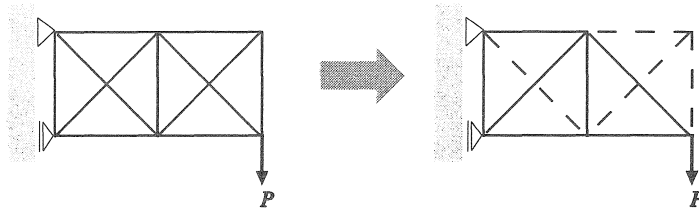


図 2: トポロジー最適化

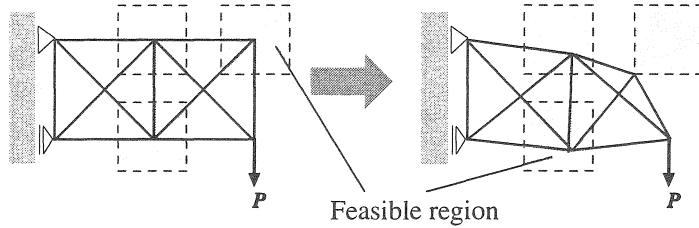


図 3: 節点位置最適化

4. トポロジー最適化問題

指定された静的載荷条件に対する応答量に関する制約条件の下で、節点間の最適接続関係を求める問題を考える。図 1 に示すような初期設計解 (ground structure) から不要な部材を除去して最適トポロジーを得る手法を ground structure 法という。Dorn *et al.* (1964) の論文が、通常この分野の最初の論文として引用され、Dobbs and Felton (1969) のころから多くの論文が発表されており、それらは Kirsch (1989b), Topping (1984), Rozvany (1997) などにまとめられている。

トポロジー最適化問題は、本質的には部材の存在を表す 0-1 変数で定義される離散変数を有する組み合わせ最適化問題である。しかし、ground structure 法では、部材断面積を非負の連続変数とし、最適化を行なった後、断面積が 0 となっている部材を取り除くことによって最適トポロジーを得る。

第 i 部材の断面積を A_i 、部材長を L_i とする。また、部材数を m とする。以下では、簡単のため、 $g_j \leq 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$) の形式の不等号制約条件のみを考える。静的載荷時の応力や変位に関する制限は、不等式の形で与えられるため、通常的设计問題では、不等式制約のみ考えても問題ない。目的関数を全部材体積とすると、トポロジー最適化問題は次のように定式化できる。

$$P1 : \text{Minimize } V = \sum_{i=1}^m A_i L_i \quad (1)$$

$$\text{subject to } g_j \leq 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

$$A_i \geq 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (3)$$

5. 最適化手法

Ground structure 法を用いると、トポロジー最適化問題は P1 のような非線型計画問題として定式化されるため、逐次 2 次計画法などの非線型計画法のアルゴリズムを用いて解くことができる。制約条件が変位や応力などの単純な形式の場合には、最適性条件法なども適用できる。最近になって、内点法 (Ben-Tal and Nemirovski 1994) や半正定値計画法 (Ben-Tal and Nemirovski 1996, Ohsaki *et al.* 1999) などの新しい定式化を用いた手法も提案されている。

しかし、不要な部材を除去する過程では、部材の接続しない節点の存在や、直線状に接続する 2 本の部材の存在により、トラスは不安定になることもある。したがって、部材断面積に対して微小な下限値 $\bar{A}$ を与え、(3) のかわりに次のような側面制約条件を加えることが多い。

$$A_i \geq \bar{A}, \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (4)$$

ここで、最適化の後で $A_i = \bar{A}$ となっている部材は除去される。したがって、 $\bar{A}$ は数値解析上の不安定性を防ぐために導入されるものであって、最適トラスの不安定性を除くために与えられるものではない。安定な最適ト

ラスを得るためには、複数の载荷条件を与えるのが有効である。境界輪体など、安定なユニットを重ね合わせる手法も有効である (Nakanishi and Nakagiri 1996a,b)。

最適トラスは、非線型計画法を単に適用することによって得られるが、変位制約や応力制約のような単純な制約の問題でも、局所最適解が存在する可能性があり、大域最適解を得ることは困難である。Ringertz (1986) は、変位と応力の制約を有する場合について、分枝限定法を用いて最適解を得る手法を提案した。ここでは、応力制約を無視することによって目的関数の下界を得ているが、変位制約を無視することによって下界を得ることもできる (Sheu and Schmit 1972)。

コンプライアンス最小化問題は、断面積に関する上限値が存在しない場合には、全ポテンシャルエネルギーを変位に関して最大化し、同時にコンプライアンスを部材断面積に関して最大化するミニマックス問題として定式化できる (Ben-Tal and Bendsøe 1993, Bendsøe *et al.* 1994)。この問題は厳密に凸であり、主相対法によって解くことができる (Beckers and Fleury 1997)。

最近になって、遺伝的アルゴリズム (Genetic Algorithm, GA) などの手法が構造最適化でも用いられるようになった (Jenkins 1991)。Grierson and Pak (1993) は、部材のリストをビット列としてコード化し、GA を用いて最適解トポロジーを求めた。ここで、リストの中に 0 の断面積の部材を入れることによって、部材の除去が可能になる。Hajela and Lee (1995) は、トラスの安定性を保証するために、2 段階最適化手法を提案し、ペナルティー法を用いて制約条件付きの問題を最適化する際に、ペナルティー項と目的関数値が同じオーダーとなるようなスケールリング法を提案した。Ohsaki (1995) は、GA を用い、節点コストを考慮した最適化手法を提案し、節点と部材のコスト比に最適解が大きく依存することを示した。さらに、部材断面積に加えて部材の存在を表わす変数を導入することにより、初期設計解に比べて部材数の少ない最適トポロジーを容易に得ることができることを示した。

GA 以外にも、種々の発見的 (heuristic) 手法がトポロジー最適化に適用されている。最近になって、いくつかの進化的 (evolutionary) 手法が提案されている。ここで、「進化的」という用語は、異なった意味で用いられることがあり、多少の混乱があるように思われる。進化するパラメータを有する GA も「進化的」であり、単純な GA も「進化的」といわれることもある。最適性条件などの局所的条件を用いる手法や、単に成長する手法も「進化的」といわれる。

以上のように、ground structure 法には、多くの制限や困難点が存在するが、この手法はトポロジー最適化での標準的な手法となっている。本手法の困難点は下記の通りまとめられる。

1. 初期の構造物には極めて多くの節点と部材が必要であり、部材を追加する基準は存在しない。
2. 最適解は初期設計解に依存し、節点位置を最適化するためには無限に多くの部材が必要である。
3. 非現実的な最適解がしばしば得られる。
4. 多くの部材が除去されると、トラスは不安定になる。

Ground structure 法とは異なり、単純なトラス (base truss) から節点と部材を追加して最適トポロジーを得る手法も提案されている (Rule 1994, McKeown 1998)。この成長する (growing) 過程を用いると、非現実的な最適解が得られる可能性を低減することができる。しかし、部材と節点の追加に関する理論的に明確な規範はない (Kirsch 1996)。トポロジーの変化の過程は、形式文法によっても表現できる (Reddy and Cagan 1995a,b, Suea *et al.* 1997)。Bojczuk and Mróz (1999) は、トポロジーの変化が許容できるかどうかを感度係数を用いて判断している。また、トポロジーに関する制約を明示的に与えることも、現実的な最適トラスを得るために有効である (Nakanishi and Nakagiri 1997, Ohsaki and Kato 1999)。

擬似焼き鈍し法 (Simulated Annealing, SA) も、トポロジー最適化に有効である (Topping *et al.* 1996, Tagawa and Ohsaki 1999)。SA は連続変数にも離散変数にも同様に適用可能である。タブー探索 (tabu search) を利用した手法も存在する (Bennage and Dhingra 1995)。これらの確率的手法を用いると、計算コストは極めて小さくなる場合がある。そのため、計算効率の良い再解析手法を用いることが望まれる (Kirsch 1993, Kirsch 1995, Kirsch and Liu 1995)。

6. 応力制約

複数载荷条件のもとでの応力制約を有するトポロジー最適化問題における困難点は、Sved and Ginos (1968) により、まず議論された。Kirsch (1990) は、最適解の特異性に関する詳細な考察を行なった。応力制約における主な問題点は、存在しない部材では応力制約自体が消滅することに起因する。

図 4 に示すような 3 部材トラスを考える (Sved and Ginos 1968)。 $(P_j, \alpha_j) = (40, \pi/4), (30, \pi/2), (20, 3\pi/4)$ のような 3 種類の载荷条件を考え、第 k 载荷条件に対する第 i 部材の応力を σ_i^k とする。応力の上下限值 (σ_i^L, σ_i^U) は $(-5, 5), (-20, 20), (-5, 5)$ とし、目的関数は $V = A_2 + \sqrt{2}(A_1 + A_3)$ とする。

3 つの载荷条件に対する応力制約のもとで V を最小化するような最適設計解は、 $A_1 = 8, A_2 = 1.5, A_3 = 0$ であり、このとき $V = 12.812$ である。ここで、 P_3 に対する部材 3 の応力は 21.4 であり、制約条件は満たされて

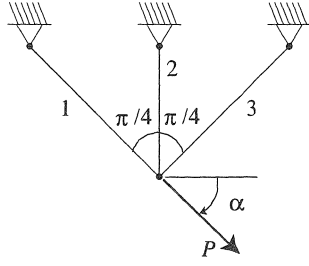


図 4: 複数载荷条件を有する 3 部材トラス

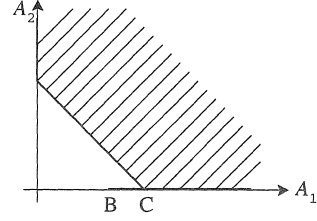


図 5: 3 部材トラスの許容領域

いない。しかし、 $A_3 = 0$ であるから、第 3 部材は存在せず、制約条件は満たされる必要はない。一方、全ての制約条件を満たす最適設計解は、 $A_1 = 7.099, A_2 = 1.849, A_3 = 2.897$ であり、このとき $V = 15.986$ となり、実際の最適解より目的関数値は大きくなっている。以上の結果より、最適トポロジーは、設計変数空間の特異な点であると予想される。図 5 には、 A_1, A_2 平面での許容領域を示す。ここで、許容領域は、斜線の領域に加えて線分 BC を含むため非凸領域であり、許容領域が凸である場合に有効な手法では、最適解を得ることが困難であることがわかる。

制約条件の不連続性を考慮すると、ground structure 法による応力制約条件下でのトポロジー最適化問題は、下記のように定式化される。

$$\text{P2: Minimize } V = \sum_{i=1}^m A_i L_i \quad (5)$$

$$\text{subject to } \sigma_i^L \leq \sigma_i^k \leq \sigma_i^U, \text{ for } A_i > 0, (j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, f) \quad (6)$$

$$A_i \geq 0, (i = 1, 2, \dots, m) \quad (7)$$

ここで、 f は载荷条件の数である。上記定式化より、 $A_i = 0$ のときには応力制約条件は存在しない。Cheng and Guo (1997) は、応力制約を断面積の値に応じて緩和する ε 緩和法を提案した。その手法では、制約条件を次のように緩和する。

$$(\sigma_i^L - \sigma_i^k) A_i \leq \varepsilon, (\sigma_i^k - \sigma_i^U) A_i \leq \varepsilon \quad (8)$$

$$A_i \geq \varepsilon^2 \quad (9)$$

ここで、 ε は十分小さい正の数であり、 ε をパラメトリックに 0 まで減少させることにより、最適トポロジーが得られる。

部材断面積が正の値をとるときには、応力 σ_i は軸力 N_i から次式を用いて計算できる。

$$\sigma_i = \frac{N_i}{A_i} \quad (10)$$

しかし、部材断面積が 0 の時には、上式を用いることはできない。ところで、部材両端節点の変位から、軸方向変形 d_i は計算でき、さらにひずみ e_i を次式を用いて求めることができる。

$$e_i = \frac{d_i}{L_i} \quad (11)$$

ひずみが得られると、それに適合する応力は、

$$\sigma_i = E e_i \quad (12)$$

で求められる。ここで、 E は弾性係数である (Cheng and Jiang 1992)。したがって、応力を (12) を用いて計算し、部材除去後のトラスが安定であるならば、応力 σ_i 自体には不連続性は存在しない。

部材座屈を考慮する場合には、応力の下限値 σ_i^L をオイラー座屈応力で置き換える (Cheng 1995)。とくに、橋状のトラスでは、最適トポロジーは部材座屈制約の導入や引張りと圧縮の許容応力の関係に大きく依存することが知られている (Achtziger 1996)。

部材座屈に関する制約を導入することにより、極端に細い部材の存在を回避することができる。しかし、その場合にも、全体座屈に対応する不安定性は回避することはできない。このような不安定性を回避する方法とし

て、全体座屈に関する制約を直接導入することも考えられる (Rozvany 1996, Zou 1996)。しかし、その場合にも、振動数制約の場合と同様に (Nakamura and Ohsaki 1992)、非現実的な長い部材が存在することになる。

7. 固有振動数制約

1 次固有振動数に関する制約を考慮したトポロジー最適化問題に対しては、局所的不安定性や、固有振動数の重複にともなう困難のため、ほとんど研究がなされていない。構造質量と非構造質量に関する質量行列をそれぞれ $\mathbf{M}_s$ 及び $\mathbf{M}_0$ で表す。自由振動の固有値問題は、次のように定式化される。

$$\mathbf{K}\Phi_r = \Omega_r(\mathbf{M}_s + \mathbf{M}_0)\Phi_r, \quad (r = 1, 2, \dots, n) \quad (13)$$

ここで、 Ω_r 及び Φ_r は、 r 次の固有値と固有ベクトルであり、 n は変位の自由度である。

固有値の最小制限値を $\bar{\Omega}$ とする。1 次固有振動数制約条件下でのトポロジー最適化問題は、次のように定式化される。

$$\text{P3: Minimize } V = \sum_{i=1}^m A_i L_i \quad (14)$$

$$\text{subject to } \Omega_r \geq \bar{\Omega}, \quad (r = 1, 2, \dots, n), \quad (15)$$

$$A_i \geq 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (16)$$

上記問題に対して最適設計解が得られたならば、 $A_i = 0$ となっている部材を除去して最適トポロジーが得られる。通常は、最適化過程での不安定性を防ぐため、 A_i に対して微小な正の値の最小制限値が与えられる。

最適解において 1 次固有振動数が重複しなければ、固有振動数の部材断面積に関する感度係数は連続であるから、P3 は数理計画法あるいは最適性条件法を用いて容易に解くことができる (Venkayya and Tishler 1983)。しかし、P3 の最適設計解では、固有値が重複することが多いことが良く知られている。その場合には、固有値の部材断面積に関する感度係数は不連続であり、方向微分しか存在しない (Haug and Cea 1981)。重複固有値の感度解析については多くの論文が発表されているが (Haug and Choi 1982, Lund *et al.* 1994) それらの手法が大規模構造物のトポロジー最適化に適用可能であるかどうかは明らかでない。

Nakamura and Ohsaki (1989) は、パラメトリック最適化の手法に基づき、自明な最適解を初期解として 1 次固有値に関するテイラー展開により、最適解の集合を追跡する手法を提案した。また、最小断面積制限値をパラメータとすることにより、その手法がトポロジー最適化にも有効であることを示した (Ohsaki and Nakamura 1992)。さらにその手法は骨組構造物のトポロジー最適化に対しても有効である (Ohsaki and Nakamura 1993)。

$\mathbf{K}$ と $\mathbf{M}_s$ の各成分は A_i の線形関数であり、それらは

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^m A_i \mathbf{K}_i, \quad \mathbf{M}_s = \sum_{i=1}^m A_i \mathbf{M}_i. \quad (17)$$

のように表すことができる。レイリーの原理 (Rayleigh's principle) を用いると、制約 (15) は次のように変換できる。

$$\sum_{i=1}^m (\mathbf{K}_i - \bar{\Omega} \mathbf{M}_i) A_i - \bar{\Omega} \mathbf{M}_0 \succeq \mathbf{0} \quad (18)$$

上式は、左辺の行列が半正定値であることを意味している。Ohsaki *et al.* (1999) は、半正定値計画法 (Semi-Definite Programming, SDP) (Kojima *et al.* 1997) の定式化に基づく最適化アルゴリズムを提案した。その手法では、固有値の感度係数が不要であるため、固有値が重複する場合にも有効であり、例題では、5 個の固有値が重複する場合にも問題なく最適解が得られることを示した。

振動数制約のもう一つの問題点としては、局所的振動モードの存在が挙げられる (Nakamura and Ohsaki 1992)。例として、図 6 のような単純な 3 部材トラスを考える。いま、節点 3 に存在する質量が部材質量に比べて十分に大きく、全ての部材断面積が同一とすると、1 次モードは節点 2,3 が水平方向に変位するモードであり、そのモードでは部材 3 の変形は微小である。このように、非構造質量の振動をともなうモードを global mode という。部材 3 の変形は極めて微小であるから、最適化を行なうと A_3 は減少する。しかし、節点はピン接合であるから、部材 3 が完全に除去されるとトラスは不安定になる。以上より、最適化を行なうと、極めて微小な断面積を有する 2 次的な部材が存在し、1 次固有振動数は重複することがわかる。さらに、最適解において A_3 は微小であり、1 次固有モードの 1 つは非構造質量がほとんど変形しないようなモードとなる。このようなモードを

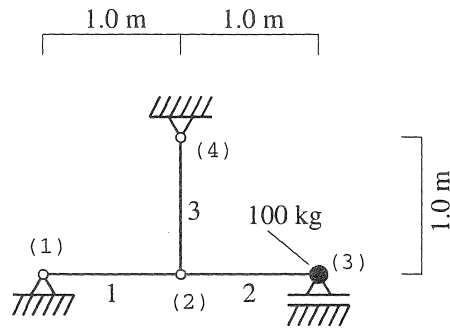


図 6: 不安定な節点を有する 3 部材トラス

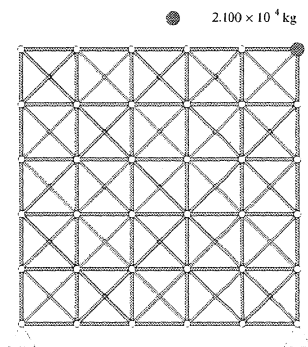


図 7: 5 × 5 平面グリッド

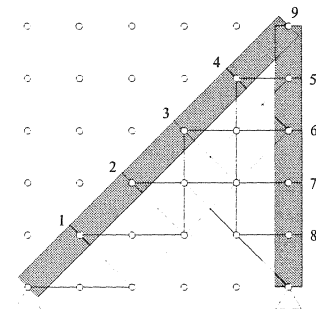
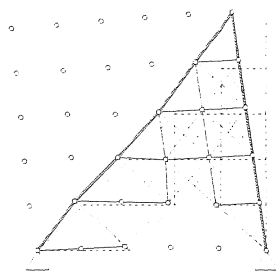
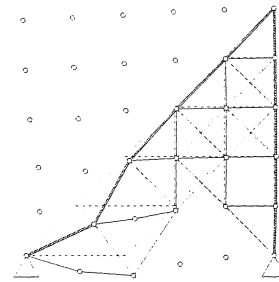


図 8: 5 × 5 グリッドの最適トポロジー



Mode (a)



Mode (b)

図 9: 最適トポロジーの固有モード

local mode という。実用的見地からは、このような 2 次部材の存在は好ましくなく、それらを除去した後、不安定な節点は単にヒンジを固定することによって安定化できる。

図 7 に示すような 5 × 5 の平面グリッドに対して最適トポロジーを求めた。極めて細い部材を取り除いた後の断面積分布を図 8 に示す。図 8 より、十分に大きい断面積を有する 10 部材トラスの不安定性を回避するために、2 次部材によるネット上のトラスが形成されていることがわかる。このトラスの 1 次固有振動数の重複度は 2 であり、2 つの固有モードは図 9 に示したとおりである。図 9 より、非構造質量の存在する節点 9 の変位は、モード (a) では大きい、モード (b) では極めて小さく、このモードでは節点 1 での曲げ変形が卓越している。モード (b) のような local mode は、節点 1-8 を剛接合とすることによって抑制できる。その後 2 次部材を除去すると、実用的に有効な 2 部材からなる最適トポロジーが得られる。

8. トポロジーと節点位置の同時最適化

トラスの幾何学的形状は、節点座標を独立な連続変数とすることにより容易に最適化できる (Imai and Schmit 1982, Lin *et al.*)。この過程では、通常は節点座標に上下限値が与えられるため、部材や節点が重複することはない、トポロジーは最適化されない (Saka 1980, Sadek 1986)。全ての節点座標を変数とすると現実的でない形

状が得られることが多いため、パラメトリック曲線あるいは曲面を用いるのが有効である (Ohsaki *et al.* 1997, Ohsaki *et al.* 1998)。

各部材の断面積が任意の正の値をとることが可能である場合には、トポロジーと節点位置の同時最適化は容易である。解析的な定式化による手法も存在する (Zou and Rozvany 1991)。しかし、その手法が適用可能な制約条件は限られている。また、その手法で節点位置を最適化するためには、無限に多くの部材が必要となる。Rajeev and Krishnamoorthy (1997) は、トポロジーの固定されたトラスの節点位置を GA によって最適化する手法を提案した。一方、部材断面積のとり得る値が限定されている場合には、問題は極めて複雑になる。困難点をまとめると、次のようになる (Ohsaki 1997)。

1. 極端に短い部材の存在や、部材除去により、剛性行列が非正則になる場合がある。
2. 重複する複数の部材を結合させると、部材断面積の大きい 1 つの部材となる。しかし、断面積が任意の値をとれない場合には、結合の過程で剛性の不連続が生じる。
3. 節点が近接する場合にも、トラスの節点の相対変位は微小とはならないことがある。
4. 一度除去された部材を復活させるための明確な基準が存在しないため、最適化の過程で部材を完全の除去することはできない。

トポロジーと節点位置の同時最適化の最も単純な方法としては、いくつかの候補トポロジーに対して節点位置を最適化する手法が考えられる (Shiraishi *et al.* 1981)。また、2 段階に分けて両者を最適化することも可能である (Bendsøe *et al.* 1994)。Ohsaki (1997) は、規則性を有するトラスに対し、節点位置を連続的に変化させて同時にトポロジーも変化させることが可能なモデルを提案し、任意形状の平面トラスに拡張した (Tagawa and Ohsaki 1999)。

9. 今後の研究への展望

トポロジー最適化には多くの論文が発表されているが、それらを実用化するためには、下記のような解決すべき問題点が残されている。

1. 実用的なサイズのトラスのトポロジーを最適化するための計算コストは極めて大きい。そのため、効率のよい再解析法の導入、新しい数値計画法のアプローチ、並列計算の導入などが望まれる。
2. 現実的に許容される設計を得るためには、局所的不安定性の解決が重要である。トラスのユニット形状に対する制約を直接的に導入することは、不安定性の除去や現実的な最適形状を得る目的で有効である。
3. 実際の設計では、厳密な最適解は必要ではないため、目的関数の精度のよい上下限値を求めることは、近似最適解の有効性を検証するために重要である。対話的アプローチ (Smith 1996) や、人工知能に基づく手法 (Hajela and Sangameshwaran, 1990) も、実際の解を得るために有効かもしれない。
4. 多くの研究者は、連続体の形状を最適化することにより、骨組構造物の最適トポロジーが得られるものと考えているようである (Díaz and Bendsøe 1992)。しかし、トラスと連続体の力学的特性は全く異なっており、有限要素で離散化された平板の最適形状からトラスのトポロジーを予測する理論的に厳密な規範は存在しない。この方面についても、多くの研究が期待される。

以上のように、トラスの形状最適化には連続体とは異なる多くの問題点が存在し、今後の研究が期待される。その際、建築以外の機械、航空などの工学の分野と、応用数学、情報工学、数理工学などの分野との協調が極めて重要となるであろう。

参考文献

- Achtziger, W. (1996). "Truss topology optimization including bar properties different for tension and compression." *Structural Optimization*, 12, 63-74.
- Beckers, M. and Fleury, C. (1997). "A primal-dual approach in truss topology optimization." *Comp. & Struct.*, 64, 77-88.
- Bendsøe, M.P., Ben-Tal, A. and Zowe, J. (1994). "Optimization method for truss geometry and topology design." *Structural Optimization*, 7, 141-159.
- Bennage, W.A. and Dhingra, A.K. (1995). "Optimization of truss topology using tabu search." *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 38, 4035-4052.
- Ben-Tal, A. and Bendsøe, M.P. (1993). "A new method for optimal truss topology design." *SIAM J. Opt.*, 3(2), 322-358.
- Ben-Tal, A. and Nemirovski, A. (1994). "Potential reduction polynomial time method for truss topology design." *SIAM J. Opt.*, 4(3), 596-612.

- Ben-Tal, A. and Nemirovski, A. (1996). "Robust truss topology optimization via semidefinite programming." Working Paper, Faculty of Industrial Engineering and Management, Technion, Haifa, Israel.
- Bojczuk, D. and Mróz, Z. (1999). "Optimal topology and configuration design of trusses with stress and buckling constraints." *Structural Optimization*, 17, 25-35.
- Cheng, G. (1995). "Some aspects of truss topology optimization." *Structural Optimization*, 10, 173-179.
- Cheng, G. and Guo, X. (1997). " ε -relaxed approach in structural topology optimization." *Structural Optimization*, 13, 258-266.
- Cheng, G. and Jiang, Z. (1992). "Study on topology optimization with stress constraints." *Eng. Opt.*, 20, 129-148.
- Díaz, A.R. and Bendsøe, M.P. (1992). "Shape optimization of structures for multiple loading conditions using a homogenization method." *Structural Optimization*, 4, 17-22.
- Dobbs, W. and Felton, L.P. (1969). "Optimization of truss geometry." *Proc. ASCE*, 95(ST10), 2105-2119.
- Dorn, W., Gomory, R. and Greenberg, H. (1964). "Automatic design of optimal structures." *J. de Mecanique*, 3, 25-52.
- Grierson, D.E. and Pak, W.H. (1993). "Optimal sizing, geometrical and topological design using a genetic algorithm." *Structural Optimization*, 6, 151-159.
- Hajela, P. and Lee, E. (1995). "Genetic algorithms in truss topological optimization." *Int. J. Solids Structures*, 32(22), 3341-3357.
- Hajela, P. and Sangameshwaran, N. (1990). "A coupled algorithmic and heuristic approach for optimal structural topology generation." *Comp. & Struct.*, 36(5), 971-977.
- Haug, E.J. and Cea, J. (eds.), (1981). *Optimization of Distributed Parameter Structures*, Sijthoff & Noordhoff.
- Haug, E.J. and Choi, K.K. (1982). "Systematic occurrence of repeated eigenvalues in structural optimization." *J. Optimization Theory and Appl.*, 38, 251-274.
- Hemp, W.S. (1973). *Optimum Structures*, Oxford University Press.
- Imai, K. and Schmit, L.A. (1982). "Configuration optimization of trusses." *Proc. ASCE*, 107(ST5), 745-756.
- Jenkins, W.M. (1991). "Towards structural optimization via the genetic algorithm." *Comp. & Struct*, 40, 1321-1327.
- Kirsch, U. (1989b) "Optimal topologies of truss structures." *Appl. Mech. Rev.*, 42, 223-239.
- Kirsch, U. (1990). "On singular topologies in optimum structural design." *Structural Optimization*, 2, 133-142.
- Kirsch, U. (1993). "Efficient reanalysis for topological optimization." *Structural Optimization*, 6, 143-150.
- Kirsch, U. (1995). "Improved stiffness-based first-order approximations for structural optimization." *AIAA J.*, 33(1), 1995.
- Kirsch, U. (1996). "Integration of reduction and expansion process in layout optimization." *Structural Optimization*, 11, 13-18.
- Kirsch, U. and Liu, S. (1995). "Exact structural reanalysis by a first-order reduced basis." *Structural Optimization*, 10, 153-158.
- Kojima, M., Shindoh, S. and Hara, S. (1997). "Interior-point methods for the monotone semidefinite linear complementarity problems." *SIAM Journal on Optimization*, 7, 86-125.
- Lin, J.H., Che, W.Y. and Yu, Y.S. (1982). "Structural optimization on geometrical configuration and element sizing with statical and dynamical constraints." *Comp. & Struct.*, 15, 507-515.
- Maxwell, J.C. (1890). "On reciprocal figures, frames and diagrams of forces," *Scientific Papers*, Cambridge Univ. Press, 2, 175-177.
- McKeown, J.J. (1998). "Growing optimal pin-jointed frames." *Structural Optimization*, 15, 92-100.
- Michell, A.G.M. (1904). "The limits of economy in frame structures." *Philosophical Magazine Sect. 6*, 8(47), 589-597.
- Nakamura, T. and Ohsaki, M. (1992). "A natural generator of optimum topology of plane trusses for specified fundamental frequency." *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 94, 113-129.
- Nakanishi, Y. and Nakagiri, S. (1996a). "Optimization of frame topology using boundary cycle and genetic algorithm." *JSME International Journal, Series A.*, 39(2), 279-285.
- Nakanishi, Y. and Nakagiri, S. (1996b). "Optimization of truss topology using boundary cycle: derivation of design variables to avoid inexpedient structure." *JSME International Journal, Series A.*, 39(3), 415-421.
- Nakanishi, Y. and Nakagiri, S. (1997). "Structural optimization under topological constraint represented by homology groups: topological constraint on one-dimensional complex by use of zero- and one-dimensional groups." *JSME International Journal, Series A.*, 40(3), 219-227.
- Ohsaki, M. (1995). "Genetic algorithm for topology optimization of trusses." *Comput. & Struct*, 57, 219-225.

- Ohsaki, M. (1997). "Simultaneous optimization of topology and geometry of a regular plane truss," *Comput. & Struct.*, 66(1), 69-77.
- Ohsaki, M. Fujisawa, K. Katoh, N. and Kanno, Y. (1999). "Semi-definite programming for topology optimization of trusses under multiple eigenvalue constraints," *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 80, 203-217.
- Ohsaki, M. Kato, Y. (1999). "Simultaneous optimization of topology and nodal locations of a plane truss associated with a Bézier curve." in: *Structural Engineering in the 21st Century, Proc. Structures Congress*, ASCE, 582-585.
- Ohsaki, M. and Nakamura, T. (1993). "A natural generator of optimum topology of a space frame for specified fundamental frequency." In: *Space Structures 4, Proc. 4th Int. Conf. on Space Structures*, Surrey, UK, Parke, G. and Howard, C. (eds.), Thomas Telford, 1221-1229.
- Ohsaki, M. Nakamura, T. and Isshiki, Y. (1998). "Shape-size optimization of plane trusses with designer's preference," *J. Struct. Engng.*, ASCE, 124(11), 1323-1330.
- Ohsaki, M. Nakamura, T. and Kohiyama, M. (1997). "Shape optimization of a double-layer space truss described by a parametric surface," *Int. J. Space Structures*, 12(2), 109-119.
- Rajeev, S. and Krishnamoorthy, C.S. (1997). "Genetic algorithms-based methodologies for design optimization of trusses." *J. Struct. Engng.*, ASCE, 123, 350-358.
- Reddy, G.M. and Cagan, J. (1995a). "Optimally directed truss topology generation using shape annealing." *J. Mechanical Engng.*, ASME, 117, 206-209.
- Reddy, G.M. and Cagan, J. (1995b). "An improved shape annealing algorithm for truss topology generation." *J. Mechanical Engng.*, ASME, 117, 315-321.
- Ringertz, U.T. (1986). "A branch and bound algorithm for topology optimization of truss structures." *Eng. Opt.*, 10, 111-124.
- Rozvany, G.I.N. (1976). *Optimal Design of Flexural Systems*, Pergamon Press.
- Rozvany, G.I.N. (1989). *Structural Design via optimality Criteria*, Kluwer Academic Publishers.
- Rozvany, G.I.N. (1996). "Difficulties in truss topology optimization with stress, local buckling and system stability constraints." *Structural Optimization*, 11, 213-217.
- Rozvany, G.I.N. (ed.) (1997). *Topology Optimization in Structural Mechanics*, CISM Courses and Lectures 374, Springer.
- Rule, W.K. (1994). "Automatic truss design by optimized growth." *J. Struct. Engng.*, ASCE, 120(10), 3063-3070.
- Sadek, E. (1986). "Dynamic optimization of framed structures with variable layout." *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 23, 1273-1294.
- Saka, M.P. (1980). "Shape optimization of trusses." *Proc. ASCE*, 106(ST5), 1155-1174.
- Seyranian, A.P. Lund, E. and Olhoff, N. (1994). "Multiple eigenvalues in structural optimization problem." *Structural Optimization*, 8, 207-227.
- Shea, K., Cagan, J. and Fenves, S.J. (1997). "A Shape annealing approach to optimal truss design with dynamic grouping of members." *J. Mechanical Engng.*, ASME, 118, 388-394.
- Sheu, C.Y. and Schmit, L.A. (1972). "Minimum weight design of elastic redundant trusses under multiple static loading conditions." *AIAA J.*, 10(2), 155-162.
- Shiraishi, N., Furuta, H. and Ikejima, K. (1981). "Configurational optimization of framed structural systems." *Theoretical and Appl. Mech.* 29, 85-91.
- Smith, O.S. (1996). "An interactive system for truss topology design." *Advances in Engng. Software*, 27, 167-178.
- Sved, G. and Ginos, Z. (1968). "Structural optimization under multiple loading." *Int. J. Mech. Sci.*, 10, 803-805.
- Tagawa, H. and Ohsaki, M. (1999). "A continuous topology transition model for shape optimization of plane trusses with uniform cross-sectional area." Short Paper Proc. of 3rd WCSMO, 254-256.
- Topping, B.H.V. (1984). "Shape optimization of skeletal structures: a review." *J. Struct. Engng.*, ASCE, 109(8), 1933-1951.
- Topping, B.H.V. (1992). "Mathematical programming techniques for shape optimization of skeletal structures." In: *Shape and Layout Optimization of Structural Systems and Optimality Criteria Methods*, Rozvany, G.I.N. (Ed.), 349-375, Springer.
- Topping, B.V.H., Khan, A.I. and Leite, J.P. (1996). "Topological design of truss structures using simulated annealing." *Struct. Engng. Rev.*, 8, 301-314.
- Venkayya, V.B. and Tishler, V.A. (1983). "Optimization of structures with frequency constraints," in: *Computer Methods in Nonlinear Solids Structural Mechanics*, ASME-AMD-54, ASME, New York, 239-259.
- Zou, M. (1996). "Difficulties in truss topology optimization with stress and local buckling constraints." *Structural Optimization*, 11, 134-136.
- Zou, M. and Rozvany, G.I.N. (1991). "The COC algorithm, Part II: Topological, geometrical and generalized shape optimization." *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 89, 309-336.