

## 曲線の滑らかさと力学

### Fairness and Mechanics of Curves

大崎 純

Makoto Ohsaki

Qualitative evaluation methods of fairness of curves are first reviewed based on the curvature which is an intrinsic property of the curve. More advanced and complicated fairness metrics based on the derived curves are also introduced and their limitations are discussed. As an example of using fairness metric in engineering design, an optimization method is presented for generating trade-off designs between roundness and stiffness of arches, where the center of curvature is effectively used for controlling the shape of the round arch.

#### 1. はじめに

ビル形式の骨組とは異なり、シェルや空間骨組などの大空間を覆う構造物には、曲線や曲面形状の構造要素が多く用いられる。それらの形状は、要求される力学的性能を実現するように決定されなければならないが、デザインの観点からは、滑らかかつ美しい形状であるとともに、外観的にあるいは利用者に対して心地よい (pleasing) 印象を与える必要もある。しかし、「美しさ」や「心地よさ」は極めて主観的な尺度のであり、定量化は難しい。最近話題になっている感性工学でも、定量化の試みや、感性に関する制約 (aesthetical constraint) を満足するための種々の設計法が提案されているが、建築の分野で適用されるには至っていない [1, 2]。

「美しさ」や「心地よさ」の定量化が困難ならば、少し限定して、「滑らかさ」はどのように定義されるであろうか。曲線や曲面の滑らかさ (fairness) については、数値制御加工の分野で古くから議論されている。古典的には、滑らかさは曲率に基づいて定義され、「美しさ」と比べて定量化が容易であるばかりでなく、加工の効率化のためにも滑らかな曲線を描くことは重要である。一方、自動車工学や造船工学の分野では、随伴曲線や随伴曲面を用いて、汎関数 (積分量) としての滑らかさの計量 (fairness metric) も提案されている。

本稿では、本質的な理解を助けるため、曲面は除外して、曲線のみを対象として滑らかさの定量化に関する研究の概要を紹介し、その限界について議論する。さらに、滑らかな形状を生成するための最適化手法及び、滑らかさと力学的特性のトレードオフを考慮した多目的最適化手法について述べる。

#### 2. 滑らかさの古典的な定義

パラメータ  $t$  で定義された  $(x, y)$  平面内の曲線を  $\mathbf{p}(t) = (x(t), y(t))$  とする。本節では、簡単のため平面曲線のみを対象とする。例えば、パラメトリック曲線の1つである3次のベジエ曲線は、バーンスタイン基底関数  $B_i^3(t)$ , ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) を用いて次のように定義できる [3-5]。

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{R}_i B_i^3(t) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} B_0^3(t) &= (1-t)^3, & B_1^3(t) &= 3t(1-t)^2, \\ B_2^3(t) &= 3t^2(1-t), & B_3^3(t) &= t^3 \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{R}_i$  は定義頂点の位置ベクトルである。図1に3次ベジエ曲線の例を示す。点A, B, C, D が定義頂点であり、 $t = 0, 1$  の端点は、それぞれ定義頂点A, D に一致する。

ところで、パラメトリック曲線において、一般にパラメータ  $t$  の定義には任意性が存在する。図 1 の曲線は  $t$  の区間  $[0,1]$  で定義されているが、 $t \leftarrow 2t^*$  のようにパラメータ変換したとき、両端でのパラメータ値は 0 と  $1/2$  になるが、曲線の形状は変わらない。しかし、曲線の特性量の中には、パラメータ変換によって保存されない量も存在する。パラメータに関する微分を  $(\dot{\quad})$  で表わしたとき、図 2 に示すように、接線ベクトル  $\dot{\mathbf{p}}(t^*)$  の長さは  $\mathbf{p}(t)$  の長さの 2 倍になるので、接線ベクトルのようにパラメータの定義に依存するような特性量で曲線の性質を議論するのは望ましくない。

曲線が存在する平面の座標及び距離が定義されたとき、曲線の長さに対応するパラメータを弧長パラメータという。弧長パラメータ  $s$  と  $t$  の間には次の関係が成り立つ。

$$ds = |\dot{\mathbf{p}}(t)|dt = \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2}dt = g(t)dt \quad (3)$$

ここで、 $|\cdot|$  はベクトルの長さである。以下では、簡単のため変数の記号は引数  $t, s$  に関わらず同一とし、引数が特に重要な場合及び微分演算を行なうときのみ引数を記述する。

$s$  は初期値 (1つの端点での値) を定めれば一意に決定され、曲線固有のパラメータである。 $s$  に関する微分を  $(\prime)$  で表わすと、

$$|\mathbf{p}'(s)| = \sqrt{[x'(s)]^2 + [y'(s)]^2} = 1 \quad (4)$$

であり、 $\mathbf{p}'(s)$  は単位接線ベクトルである。図 3 に示すように、曲線の単位法線ベクトルを  $\mathbf{n}$  とすると、曲率  $\kappa$  は  $\mathbf{p}''(s)$  の  $\mathbf{n}$  方向の成分として次式で定義される。

$$\kappa = \mathbf{p}''(s) \cdot \mathbf{n} \quad (5)$$

$\mathbf{n}$  はパラメータ  $t$  の定義に依存しない曲線固有の特性量 (intrinsic property) なので、 $\kappa$  も固有の特性量である。したがって、曲率を用いて曲線の滑らかさなどの特性を定量化することができる。

曲率を用いた古典的な滑らかさの計量としては、次のようなものが挙げられる。

### 1. 曲率のノルムが最小

Minimum curvature curve ともいう。曲線の両端の位置と方向が与えられたとき、3次スプラインは次のような曲率のノルム  $K$  を最小化することが知られている。

$$K = \int_0^l \kappa^2 ds \quad (6)$$

ここで、 $l$  は曲線の長さである。

### 2. 曲率変化のノルムが最小

次のような曲率変化のノルムを最小化する曲線であり、minimum variation curve ともいう。

$$K' = \int_0^l (\kappa')^2 ds \quad (7)$$

明らかに、図 4(a) に示すような円弧では  $K'$  は 0 となる。

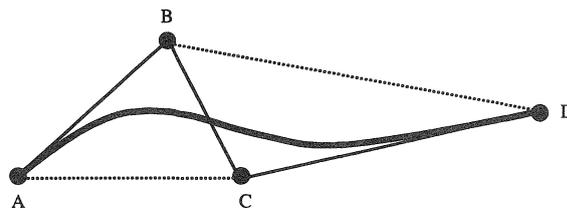


図 1 3 次のベジエ曲線

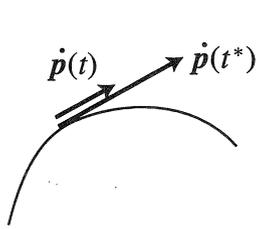


図 2 接線ベクトル

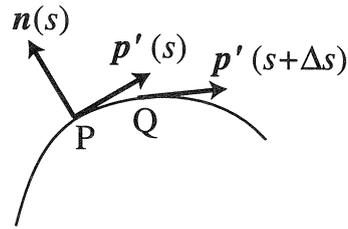


図 3 隣接する 2 点の接線ベクトル

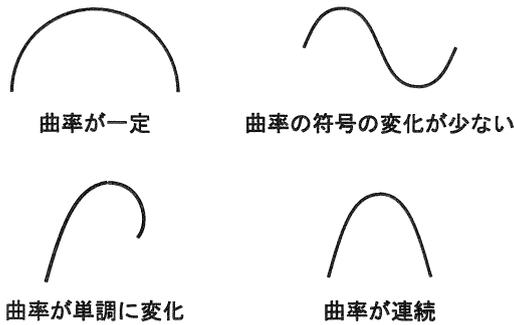


図 4 平面曲線の例



図 5: 曲率が同じで形状が異なる double circular arches

3. 曲率の符号が一定あるいは変化の回数が少ない

図 4(b) のような曲線であり、このような S 字形の部分をもつ曲線を ogee という。

4. 曲率の単調に変化

図 4(c) のような曲線であり、数値制御加工ではスムーズな加工のためにこのような曲線が望まれる。

5. 曲率が連続

図 4(d) に示す曲線であり、見た目には単位接線ベクトルが連続であれば十分であるが、数値制御加工の面からは、曲率の不連続性は望ましくない。

「平面曲線の基本定理」によると、 $s$  の関数として曲率  $\kappa(s)$  を定めれば、剛体移動を除いて曲線の形は一意的に決定される [6, 7]。したがって、望ましい曲率分布を与えれば、曲線の形状を決めることができる。しかし、2 次曲線などの単純な解析曲線を除いては、曲率分布関数を与えるのは極めて困難である。

そこで、ベジエ曲線などを用いて曲線の自由度を限定し、望ましい曲率分布からの誤差を最小化することが考えられる。誤差としては、曲線上に離散的に与えられた点での曲率の偏差、あるいは曲率や曲率変化率の積分量で定められる汎関数などが考えられる。誤差が定義できれば、例えばベジエ曲線を用いる場合には、定義頂点の座標を変数として、最適化問題を解いて望ましい曲線を得ることができる。

上述のように、曲率分布が与えられれば、それを実現する曲線を、剛体移動の自由度を残して唯一に決定できる。しかし、建築の設計では、境界条件が明確に与えられない場合や、複数の曲線を連結する場合も多い。例えば、図 5 に示すように、与えられたスパンを 2 つの曲線を連結して結ぶものとする。図 5 の実線及び点線で表わされた double circular arch は、同一の曲率を持っているが異なる曲線である。このように、曲線は曲率だけでは決定できないので、端点での位置と接線ベクトルなどの境界条件を与える必要がある。しかし、前述のように、接線ベクトルはパラメータの定義に依存し、さらに、曲線の形状は接線ベクトルの大きさに依存するので、望ましい形状になるように接線ベクトルを与えることは極めて困難である。

以上のように、曲率のみを用いて滑らかな曲線を実現することには限界があり、次節に示すような種々の計量が提案されるようになった。

### 3. 随伴曲線による滑らかさの計量

曲線の単位接線ベクトル, 単位法線ベクトル, 曲率などの特性量を用いて定義される曲線を随伴曲線 (derived curve) という。曲率を直接用いるのではなく, 随伴曲線の性質を用いて間接的に滑らかさを表現しようとする試みがなされている [8]。曲線の滑らかさは, デザイナーの好み, 構造物の大きさ, 滑らかさを評価する人の視点からの距離, 構造物の使用目的など, 種々の条件に依存する。このように, 滑らかさは状況によって変化し, かつ主観的な量ではあるが, これまでに丸さ (roundness), 平面性 (flatten), 直線性 (straighten) などの種々の滑らかさの計量 (metric) が, 随伴曲線を用いて提案されている。曲面についても同様であるが, ここでは, 本質的理解を助けるため, 3次元空間内の曲線のみを対象とする。

表 1 曲線の滑らかさの計量 [8]

	随伴曲線	滑らかさの計量	2次元	3次元
$\mu_1$	$\mathbf{p} + \rho\mathbf{n}$	$\int[\rho^2\tau^2 + (\rho')^2]^{1/2}ds$	滑らか	丸い
$\mu_2$	$\kappa\mathbf{b}$	$\int[\kappa\tau^2 + (\kappa')^2]^{1/2}ds$	滑らか	平面的
$\mu_3$	$\kappa\mathbf{n}$	$\int[\kappa\tau^2 + (\kappa')^2 + \kappa^4]^{1/2}ds$	滑らか	平面的
$\mu_4$	$\kappa\mathbf{a}$	$\int[\kappa^4 + (\kappa')^2]^{1/2}ds$	直線的	平面的
$\mu_5$	$\rho\mathbf{b}$	$\int[\rho^2\tau^2 + (\rho')^2]^{1/2}ds$	滑らか	丸い
$\mu_6$	$\mathbf{n}$	$\int[\tau^2 + \kappa^2]^{1/2}ds$	直線的	平面的
$\mu_7$	$\rho^2\mathbf{n}$	$\int[4\rho^2(\rho')^2 + \rho^4\tau^2 + \rho^2]^{1/2}ds$	丸い	丸い
$\mu_8$	$\rho^2\mathbf{a}$	$\int[4\rho^2(\rho')^2 + \rho^2]^{1/2}ds$	丸い	丸い

3次元空間内の曲線  $\mathbf{p}(t)$  の接線ベクトルを  $\mathbf{a}(t)$ , 単位主法線ベクトルを  $\mathbf{n}(t)$ , 曲率を  $\kappa(t)$ , 曲率半径を  $\rho(t) = 1/\kappa(t)$  で表わす。 $\mathbf{p}(t)$  の曲率中心の軌跡で定義される曲線  $\mathbf{c}_1(t)$  は, 次のように書ける。

$$\mathbf{c}_1(t) = \mathbf{p}(t) + \rho(t)\mathbf{n}(t) \quad (8)$$

$\mathbf{p}(t)$  が平面内の円弧であるときは, 明らかに  $\mathbf{c}_1(t)$  は  $t$  に関わらず1つの点 (円弧の中心) であり, その長さは0となる。したがって, 一般の曲線において,  $\mathbf{c}_1(t)$  の長さ  $\mu_1$  を最小化することによって, 円弧に近く丸い曲線を生成できるため,  $\mu_1$  を丸さの計量とすることができる。

弧長パラメータを用いると,  $\mu_1$  は次式で定義できる。

$$\mu_1 = \int_0^l |\mathbf{c}'_1| ds \quad (9)$$

以下では簡単のため引数  $s$  は省略する。

$\mathbf{p}(t)$  の単位従法線ベクトルを  $\mathbf{b}(t)$  で表わすと, フレネ・セレーの公式より次式を得る [3, 6]。

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{p}' \\ \mathbf{a}' &= \kappa\mathbf{n} \\ \mathbf{n}' &= -\kappa\mathbf{a} + \tau\mathbf{b} \\ \mathbf{b}' &= -\tau\mathbf{n} \end{aligned} \quad (10)$$

ここで,  $\tau$  は  $\mathbf{p}$  の捩率である。

(8),(10) 及び  $\mathbf{n}$  と  $\mathbf{b}$  の直交性より,

$$|\mathbf{c}'_1| = [\rho^2\tau^2 + (\rho')^2]^{1/2} \quad (11)$$

が得られ,  $\mu_1$  は次式で計算できる。

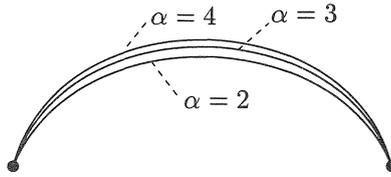


図 6  $\alpha = 2, 3, 4$  の場合の最適なベジエ曲線

$$\mu_1 = \int_0^l [\rho^2 \tau^2 + (\rho')^2]^{\frac{1}{2}} ds \quad (12)$$

ここで、 $\mu_1$  はパラメータに依存しない特性量  $\rho$ ,  $\rho'$  及び  $\tau$  で決定される。すなわち、 $\mu_1$  は  $t$  の定義に依存しない。

平面曲線では  $\tau = 0$  であり、円弧では  $\rho' = 0$  が成立するため  $\mu_1 = 0$  である。したがって、 $\mu_1$  を最小化することによって円弧に近い形状が得られる。しかし、曲線が完全な円弧である場合には  $\mu_1$  はその半径に依存せず 0 となる。一方、曲線の丸さは曲率半径にも依存するものと考えられるから、その影響を考慮に入れた定式化が望ましい。

丸さの計量としては、 $\mu_1$  以外にも、表 1 に示すような種々の計量が提案されている。例えば、 $\mu_7$  を用いて丸い曲線を求めてみる。平面内の円弧では  $\tau = 0$  かつ  $\rho$  が一定なので、 $\mu_7$  の定義における被積分関数の第 1 項と第 2 項は 0 である。したがって、第 3 項の  $\rho^2$  を最小化することにより、曲率半径が小さい円弧が得られる。しかし、支点間距離が定められた場合には、 $\rho$  が小さくなると曲線の長さ  $l$  が大きくなるため、積分区間が長くなり、 $\rho^2$  と  $l$  のトレードオフによって最適な曲線が得られる。

3 次ベジエ曲線に対して  $\mu_7$  を最小化すると、図 6 の  $\alpha = 2$  のような曲線を得る。ところで、丸さは主観的計量であるため、デザイナーは図 6 の  $\alpha = 2$  で示されるような曲線が十分に丸いとは思わず、より曲率半径の小さい曲線を希望するかもしれない。種々の曲率分布を有する丸い曲線は、パラメータ  $\alpha$  に依存する次のような随伴曲線の長さを最小化することにより得られる [9]。

$$c_7^*(t) = (\rho)^\alpha n \quad (13)$$

ここで、パラメータ  $\alpha$  は実数であってもよい。 $c_7^*(t)$  の弧長  $\mu_7^*$  は次のように書ける。

$$\mu_7^* = \int_0^l \rho^{2(\alpha-1)} [\alpha^2 (\rho')^2 + \rho^2 \tau^2 + 1]^{\frac{1}{2}} ds \quad (14)$$

ここで、平面曲線では  $\tau = 0$  であり、 $\alpha$  を増加させることにより、曲率半径に対するペナルティーが大きくなるので、 $c_7^*(t)$  の弧長を最小化するような最適な曲線の曲率半径は減少する。

以上のように、随伴曲線で定義される計量を用いると、丸い曲線や滑らかな曲線を最適化問題を解くことによつて得ることができる。しかし、表 1 に示した計量は単純なものではない。 $\kappa$  は  $s$  の 2 階微分で定義されるが、曲線が弧長パラメータではないパラメータ  $t$  で定義されている場合には、 $t$  に関する 3 階微分が必要になる。さらに、平面に対しては、同様の計量を適用するための計算量を極めて大きくなる。

#### 4. 曲率中心を与える方法

前節で示したように、曲率を指定した場合には曲線が唯一に定められない場合がある。本節では、曲率ではなく曲率中心を指定して丸い形状を生成する手法を示す。詳細は文献 10, 11 を参照すること。

曲率中心の目標点を  $f_0$  とする。曲線をベジエ曲線を用いて定義するものとし、その定義頂点ベクトルを並べたベクトル  $R$  の関数を  $(\cdot; R)$  で表わす。図 7 及び図 8 は、5 次のベジ

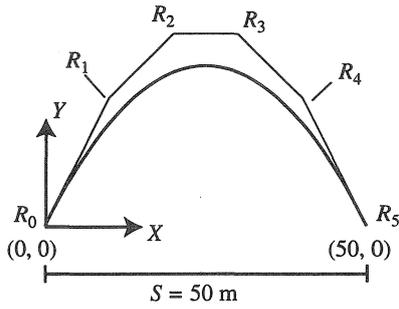


図7 初期曲線 (a)

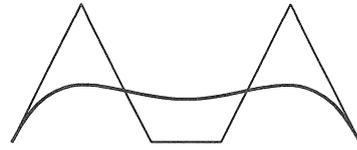


図8 初期曲線 (b)

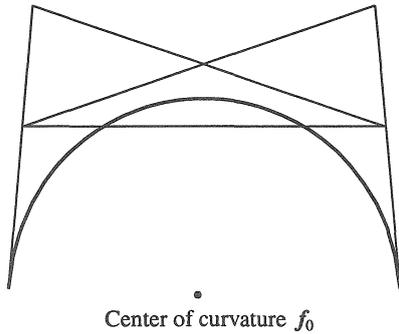


図9  $f_0 = (25, 0)$  のときの最適形状

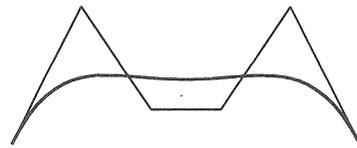


図10 最適化途中の解

エ曲線の例であり、折れ線は定義多角形である。曲線の曲率中心  $f(t; \mathbf{R})$  と指定値  $f_0$  の距離は

$$d(t; \mathbf{R}) = |f(t; \mathbf{R}) - f_0|^2 \quad (15)$$

で定義できる。ここで、 $g(t)$  の定義は (3) に示したとおりである。

最適化問題は、単純に次のように定義できる。

$$\begin{aligned} \text{P1:} \quad & \text{Minimize} \quad \int_0^1 d(t; \mathbf{R})g(t; \mathbf{R})dt \\ & \text{subject to:} \quad \mathbf{R}^L \leq \mathbf{R} \leq \mathbf{R}^U \end{aligned} \quad (16)$$

ここで、 $\mathbf{R}^U$  及び  $\mathbf{R}^L$  は  $\mathbf{R}$  の上・下限値である。

初期解 (a) から出発すると、P1 を解いて図9に示すような最適形状が得られる。ところが、初期解 (b) から出発すると、図9に達する前に図10のような形状を通過しなければならない。このとき、例えば  $t=0.5$  の中央点での曲率中心は  $f_0$  とは大きく異なり、曲線の反対側にある。したがって、目的関数値が最小になるような解に到達する前に、目的関数値が無限大に発散するような形状を通過しなければならず、初期解 (b) からは、P1 を解いて図9を得ることはできない。

そこで、 $\kappa(t) < 0$  が満たされるような  $t$  の領域（上に凸の領域）を  $T$  とする。詳細は省略するが、曲率中心の偏差量を最小化するのではなく、その逆数を領域  $T$  のみで積分した量を最大化することにより、曲率中心の偏差量を最小化することと凸な領域を大きくすることの相乗効果によって、初期解 (b) からでも最適形状図9が得られる。

数値解析によって積分を実行するため、 $t$  の領域を長さ  $\Delta t$  の区間に分割し、区間  $i$  の中心での  $t$  の値を  $t_i$  とする。以上より、最適化問題は次のように定式化できる。

$$\begin{aligned} \text{P2:} \quad & \text{Maximize} \quad \sum_{t_i \in T} \min \left\{ \frac{1}{d(t; \mathbf{R})}, \bar{d} \right\} g(t_i; \mathbf{R})\Delta t \\ & \text{subject to:} \quad \mathbf{R}^L \leq \mathbf{R} \leq \mathbf{R}^U \end{aligned} \quad (17)$$

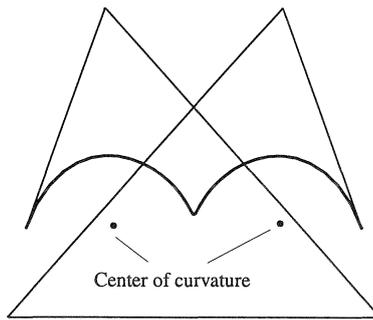


図 11 曲率中心を 2 つ与えたときの最適形状

ここで、 $\bar{d}$  は曲率が 0 に近い点の存在による発散を防ぐための微小な量である。

曲率中心を 2 つ与え、近い方との距離を最小化すると、図 11 のような形状が得られる。本手法の特徴は次のようにまとめられる。

1. 曲率中心を直接指定するので、望ましい曲線を容易に指定することができ、対話的修正も可能である。
2. 最適形状の初期値依存性が小さい。
3. アーチを連ねたような曲線も容易に生成できる。

## 5. 力学的性能とのトレードオフ

建築構造物は、いうまでもなく力学的な制約条件（設計条件）を満たしていなければならない。しかし、前節の方法を用いて得られる丸い形状は、必ずしも力学的には優れているとはいえない。そこで、力学的指標として、静的外力作用時のコンプライアンス（ひずみエネルギーの 2 倍あるいは外力仕事を）を考える。コンプライアンスは柔性を表わす量であり、それを最小化することによって剛性の高い構造物が得られる。

アーチを直線梁で折れ線近似する。静的荷重  $\mathbf{F}$  に対する節点変位を  $\mathbf{U}$  とすると、

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (18)$$

である。ここで、 $\mathbf{K}$  は剛性行列であり、 $\mathbf{R}$  の関数である。このとき、コンプライアンス  $W$  は

$$W = \mathbf{F}^T \mathbf{U} \quad (19)$$

で定義される。

アーチの部材体積を指定して、コンプライアンスを最小化する問題を考える。部材体積の指定値を  $\bar{V}$ 、アーチの全長を  $L$  とすると、部材断面積は  $A = \bar{V}/L$  で得られる。したがって、 $\mathbf{R}$  を与えれば  $A$  が得られ、 $W$  を計算することができ、設計変数は  $\mathbf{R}$  のみとなる。以上より、最適化問題は次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{P3:} \quad & \text{Minimize} && W(\mathbf{R}) \\ & \text{subject to:} && \mathbf{R}^L \leq \mathbf{R} \leq \mathbf{R}^U \end{aligned} \quad (20)$$

弾性係数  $E$  を 200.0 GPa、密度を 80.0 kN/m<sup>3</sup> とする。サンドイッチ断面を仮定し、フランジ間距離を  $h$  で表わす。伸び剛性は  $EA$ 、曲げ剛性は  $EAh^2/4$  である。以下では  $h = 1$  m とする。支持条件はピンとし、アーチを 20 の梁に分割する。アーチの単位長さあたりの鉛直方向荷重を 2.0 kN とする。 $\bar{V} = 20.0$  m<sup>3</sup> としたときの最適形状を図 12 に示す。ここで、 $W = 9.3117 \times 10^2$  kNm である。

図 12 からわかるように、コンプライアンスを最小化する形状は放物線に近く、円弧のような丸い形状とは異なっている。したがって、曲線の丸さと剛性は競合する目的であり、多

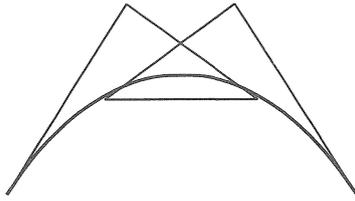


図 12 コンプライアンスを最小化する形状  
( $W = 7.5503 \times 10^3$  kNm).

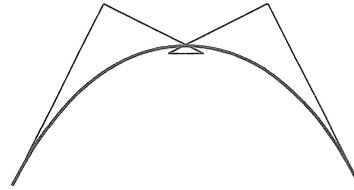


図 13  $W = 1.0 \times 10^4$  kNm,  $f_0 = (25, 0)$  に対する最適形状

目的最適化問題を解いて、妥協解（トレードオフ解）を求める必要がある。多目的最適化の手法にはいくつか存在するが、ここでは、制限法 (constraint method) を用いることにする [12]。 $W$  に対する上限値を  $\bar{W}$  とし、最適化問題を次のように定義する。

$$\begin{aligned}
 \text{P4:} \quad & \text{Maximize} && \sum_{t_i \in T} \min \left\{ \frac{1}{d(t_i; \mathbf{R})}, \bar{d} \right\} g(t_i; \mathbf{R}) \Delta t \\
 & \text{subject to:} && W(\mathbf{R}) \leq \bar{W} \\
 & && \mathbf{R}^L \leq \mathbf{R} \leq \mathbf{R}^U
 \end{aligned} \tag{21}$$

図 9 及び図 11 での  $W$  の値は  $7.5503 \times 10^3$  kNm 及び  $9.8876 \times 10^4$  kNm である。したがって、 $f_0 = (25.0, 0)$ ,  $\bar{W} = 1.0 \times 10^3$  kNm として P4 を解いてみる。得られた形状を図 13 に示す。図 13 より、図 9 と図 12 の中間的な形状が得られていることがわかる。より丸い形状を希望すれば、 $W$  の制限を緩めればよく、逆により剛性の高い形状を希望すれば、 $W$  の制限を厳しくして再度 P4 を解けばよい。

## 6. まとめ

最適化問題を解いて滑らかな曲線を自動的に生成する方法及び、力学的性能と滑らかさのトレードオフを考慮した形状設計法を紹介した。いうまでもなく滑らかさは設計者の主観的に依存する量であるから、明確な数式として与えることはできない。したがって、「望ましい形状」は対話的に得られるべきである。このような目的のため、最適化手法や多目的最適化手法を有効に用いることができる。

## 参考文献

- [1] 矢川元基, 吉村 忍, 松田聡浩, 感性と設計, 培風館, 1999.
- [2] 篠原 昭, 清水義雄, 坂本 博, 感性工学への招待, 森北出版, 1996.
- [3] G. Farin, CAGD のための曲線・曲面理論, 共立出版, 1991.
- [4] D.F. Rogers and J.A. Adams, コンピュータグラフィックス, 日刊工業新聞社, 1993.
- [5] 加藤直樹, 大崎 純, 谷 明勲, 建築システム論, 造形ライブラリー 3, 共立出版, 2002.
- [6] 安達忠次, 微分幾何学概説, 培風館, 1976.
- [7] 田澤義彦, 曲線論・曲面論, ピアソン, 1999.
- [8] J.A. Roulier and T. and Rando, Measures of fairness for curves and surfaces, In: N.S. Spadis (ed.), Designing Fair Curves and Surfaces, SIAM, pp. 75-122, 1994.
- [9] M. Ohsaki and M. Hayashi, Fairness metrics for shape optimization of ribbed shells, J. Int. Assoc. Shells and Spatial Struct., Vol. 41(1), pp. 31-39, 2000.
- [10] M. Ohsaki, T. Ogawa and R. Tateishi, Multiobjective shape optimization of shells considering roundness and elastic stiffness, Proc. Fifth International Conference on Space Structures, Surrey, UK, G. Parke and P. Disney (eds.), Thomas Telford, London, pp. 377-385, 2002.
- [11] M. Ohsaki, T. Ogawa and R. Tateishi, Shape optimization of curves and surfaces considering fairness metrics and elastic stiffness, Struct. Multidisc. Optim., in press.
- [12] 市川惇信 編, 多目的決定の理論と方法, 計測自動制御学会, 1979.