

テンセグリティ入門

Introduction to Tensegrity Structures

大崎 純

Makoto OHSAKI

History and overview of the tensegrities are first presented.

The basic strategies of form-finding such as force density method for tension structures are briefly described, and difficulties of extending those methods to tensegrities are discussed.

It is shown that the shape and forces can be effectively controlled by the author's method of directly assigning the force components of the members.

## 1. テンセグリティの歴史

テンセグリティ (tensegrity) は、張力のみを受けるケーブルと、主に圧縮力を受けるストラット (棒材) からなる構造物であり、その軽快さ、柔軟性、組立ての容易さなどから、多くの建築家や技術者の興味を惹き、また、子供向けの玩具としても利用されてきた。テンセグリティの考案者については、多くの議論があり、一般的な結論は得られていない [1]。1950 年頃学生であった Kenneth Snelson のアイデアを、Buckminster Fuller 教授が拡張・一般化したという見方もできれば、それ以前に Fuller によって発明されていたという意見もある。さらに、両者とは独立して、David G. Emelson によって提案されたと考えることもできる。このような議論が生じる原因としては、テンセグリティの定義の曖昧さが挙げられる。厳密には、写真 1 に示すように、互いに接続していない棒材 (圧縮材) を、連続したケーブル (引張り材) で接続し、張力によって安定化され、支点からの反力を必要とせず自立する構造 (self-standing structure) をテンセグリティという。しかし、多少の圧縮材が接続していても、self-standing であればテンセグリティに含める場合もある。いずれにしろ、tension + integrity を意味する造語として、tensegrity という言葉を作ったのは Fuller である。

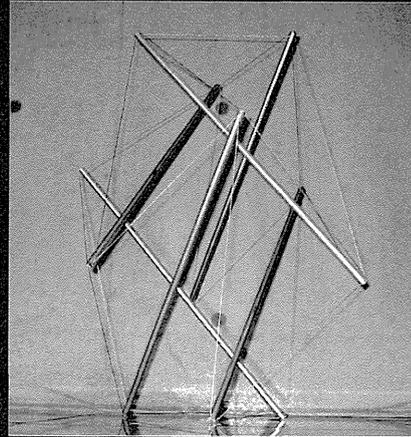


写真 1: テンセグリティの例 (木村 駿・製作, 撮影) [2]

## 2. 張力構造の設計

### 2.1 張力導入による安定化

テンセグリティの魅力と、その設計の困難さについて述べる前に、一般の張力構造 (tension structure) の設計について考えてみる。張力が存在しないとき不安定であり、張力導入によって安定化される膜構造、ケーブルネット、テンセグリティなどの構造を、総称して張力構造という。図 1(a) に示すように、2つの支点間に直線状にトラス部材を配置し、それらをピン接合した構造 (2部材トラス) は不安定であり、中央節点に力を作用させることなく変形が生じる。中央節点の  $y$  軸方向に作用する荷重を  $P$ 、 $x, y$  軸方向変位を  $u, v$  とし、部材の弾性係数を  $E$ 、部材長を  $L$  とすれば、2部材トラスの剛性方程式は次のようになる。

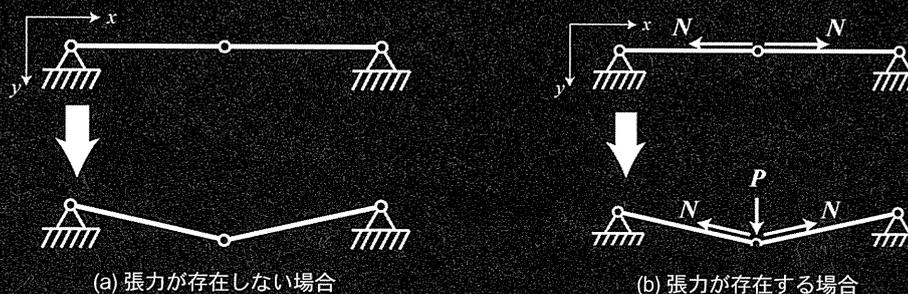


図 1: 直線状に配置された 2 部材トラスの変形状態

$$\frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \end{Bmatrix} \quad (1)$$

したがって、 $u_y$  は不定であり、 $y$  軸の方向に不安定であることが確認できる。

ところで、図 1(b) に示すように張力  $N$  を作用させると、 $y$  軸方向に変形させるためには、力を作用させなければならない。すなわち、図 1(b) に示すように、節点の変位することにより、外力  $P$  と張力  $N$  が釣り合うことができる。このように、幾何学的な変形効果によって生じる剛性を幾何剛性といい、剛性方程式は

$$\left( \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{N}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \end{Bmatrix} \quad (2)$$

のようになる。ここで、左辺括弧内の第 1 項が線形剛性行列、第 2 項が幾何剛性行列である。

## 2.2 不安定構造の特性

張力が作用していない状態で不安定であるような構造物について、釣合い式の特性を考察してみる。図 1(a) の 2 部材トラスには、図 1(b) 上図のような軸力を作用させることができる。このように、外力の作用なしに存在することのできる部材軸力を並べたベクトルを自己釣り合い軸力モードといい、自己釣り合い状態での釣合い式は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

式 (3) の左辺の行列を、釣り合い行列という。

行列が与えられたとき、その独立な行の数（あるいは独立な列の数でも同じ）をランクという。式 (3) において、釣り合い行列は  $2 \times 2$  行列であるが、そのランクは 1 である。構造物の節点変位の自由度を  $n$ 、釣り合い行列のランクを  $r$  としたとき、 $h=n-r$  を不安定次数といい、 $h$  個の機構（メカニズム）が存在する。図 1 の 2 部材トラスの不安定次数は 1 であり、図 1(a) に示すような機構が存在する。また、部材数を  $m$  とすると、 $s=m-r$  を不静定次数といい、 $s$  個の独立な自己釣り合い軸力モードが存在する。図 1 の例では  $s=1$  であり、図 1(b) の上図に示すようなモードが存在する。

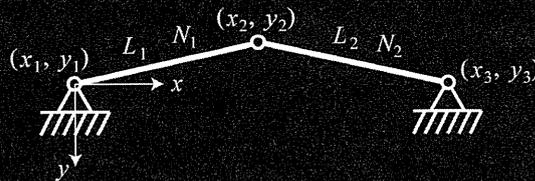


図 2: 2 部材トラスの一般形状

## 2.3 釣り合い形状解析

以上のように、張力構造は不安定かつ不静定であり、自己釣り合い状態が存在するような節点の位置は限定される。例えば図 1 の 2 部材トラスでは、図 2 に示すように、中央節点を上下に移動させて 2 つの部材が直線上に存在しなくなると、自己釣り合い状態を得ることはできない。したがって、張力構造の設計では、まず、次のような自己釣り合い状態での釣合い式を満たす張力（軸力）ベクトル  $N$  と、

節点座標ベクトル  $X$  を求めるための釣合い形状解析を実行する必要がある。

$$DN = 0 \quad (4)$$

ここで、行列  $D$  は釣合い行列であり、 $X$  の非線形関数である。釣合い形状解析には、次のような方法が存在する。

a. 軸力を指定する方法

①  $F=DN$  とし、 $N$  を指定すると、 $F$  は  $X$  の非線形関数となる。したがって、 $X$  の一部（支点の座標など）を指定し、Newton 法を用いて非線形方程式  $F=0$  を解くことにより、釣合い形状が得られる。しかし、 $N$  や  $X$  の指定値が現実的でないと、形状が退化してしまったり、極端に長い部材や短い部材が存在するような望ましくない形状が得られることがある。

② 全ポテンシャルエネルギー最小化問題を解いて、釣合い形状を求めることもできる。全部材の断面積と軸力が等しい場合には、minimum-length network（膜構造の極小曲面に対応）が得られる。例えば図 1 の 2 部材トラスにおいて、図 2 に示すように、中央節点の座標が一般に 0 でないものとし、左右の部材の長さを  $L_1, L_2$  とする。2 つの部材の断面積を  $A$ 、弾性係数を  $E$ 、軸力の指定値  $\bar{N}$  をとすると、全ポテンシャルエネルギー（外力が存在しないのでひずみエネルギーと等しい） $\Pi$  は次式で与えられる。

$$\Pi = \frac{1}{2} \frac{\bar{N}^2}{AE} (L_1 + L_2) \quad (5)$$

したがって、 $L_1 + L_2$  を最小にする解が得られ、 $y_2 = 0$  となる。ただし、中央節点の  $x$  座標  $x_2$  は不定である。2 つの軸力が一致しないと、 $\Pi$  を最小化することにより、軸力が大きい部材の長さが 0 になり、節点 2 は支点に重なってしまう。

b. ケーブルの自然長を指定する

張力導入前の部材長（自然長あるいは無応力長）を指定し、境界での強制変位条件と、内部節点での適合条件を満たすような節点位置を求める問題であり、通常の大変形変位指定解析問題である。したがって、種々の大変形解析法を用いることができる。とくに、仮定の質量と減衰を与えて動的問題として解く方法を、dynamic relaxation 法という。

c. 軸力密度（force density）を指定する

軸力  $N$  の部材長  $L$  に対する比  $q=N/L$  を force density といい、全部材の  $q$  を並べたベクトルを  $\mathbf{q}$  とすると、釣合い式は、

$$G(\mathbf{q})X = 0 \quad (6)$$

のように書ける。ここで、 $\mathbf{q}$  を与えて  $G(\mathbf{q})$  を定めると、境界での  $X$  成分を指定することにより、線形方程式 (6) を解いて内部節点座標を求めることができる。このような方法を force density 法といい、極めて簡便であるが、部材長を直接制御できず、また、全部材で  $\mathbf{q}$  が同一の場合には軸力が部材長に比例するという欠点を持つ。例えば、図 2 の例では式 (6) は

$$\begin{bmatrix} -q_1 - q_2 & 0 \\ 0 & -q_1 - q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 q_1 - x_3 q_2 \\ -y_1 q_1 - y_3 q_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

となる。境界節点座標を、 $(x_1, y_1) = (0, 0)$ 、 $(x_3, y_3) = (1, 0)$  とすると、 $x_2 = q_2 / (q_1 + q_2)$ 、 $y_2 = 0$  となり、内部節点座標は force

density の指定値に依存する。

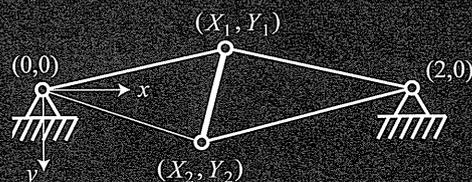


図3: ケーブル・ストラット構造

### 3. テンセグリティの釣合い形状解析

ケーブルネットの釣合い形状解析の手法を拡張してテンセグリティの自己釣合い形状を求めるためには、種々の問題点が存在する [4,5,6]。例えば、簡単な例として、厳密なテンセグリティではないが、支点で支持されたケーブル・ストラット構造を考える [7]。中央の太線がストラット、細線がケーブルである。この構造は、2つの支点を結ぶ補助ストラットを導入することにより、テンセグリティに変換することもできる [8]。したがって、以下ではこのような構造もテンセグリティと呼ぶことにする。

Force density 法を用いるならば、自由節点 1,2 の  $x, y$  座標を求めるための式はそれぞれ次のようになる。

$$\begin{bmatrix} -q_1 - q_4 - q_5 & q_5 \\ q_5 & -q_2 - q_3 - q_5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2q_4 \\ -2q_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -q_1 - q_4 - q_5 & q_5 \\ q_5 & -q_2 - q_3 - q_5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

例えば、 $q_1=1, q_2=2, q_3=3, q_4=4, q_5=-5$  とすると、 $x_1=5/8, x_2=6/8, y_1=y_2=0$  となる。また、 $q_1=q_2=q_3=q_4=1, q_5=-1$  のとき、 $x_1+x_2=2, y_1+y_2=0$  となり、形状は不定である。しかし、 $q_1=1, q_2=2, q_3=2, q_4=3, q_5=-2$  とすると、解は存在しない。このように、テンセグリティでは、ケーブルネットとは異なり、正と負の軸力が混在するので、意味のある Force density を定めるのが困難である。

### 4. 軸力ベクトルの成分を未知数とした形状解析法

#### 4.1 手法の概要

上記のような問題点を解決し、テンセグリティの形状を直接コントロールするため、軸力の大きさではなく、軸力ベクトルの成分を未知数とした手法を提案する [8,9]。( $x, y, z$ ) 空間内のテンセグリティを考え、部材  $k$  の軸力ベクトルを  $\mathbf{v}_k = (v_k^x, v_k^y, v_k^z)^T$  とする。ここで、部材  $k$  が節点  $i$  と  $j$  を接続し、 $i < j$  であり、軸力が正 (引張り) のとき、 $\mathbf{v}_k$  は節点  $i$  から  $j$  へ向かうベクトルである。逆に軸力が負 (圧縮) のとき、 $\mathbf{v}_k$  は節点  $j$  から  $i$  に向かうベクトルである。部材数を  $m$  とすると、部材の軸力ベクトルをならべたベクトル  $\mathbf{v}$  は、次式で定義される。

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1^T, \mathbf{v}_2^T, \dots, \mathbf{v}_m^T)^T \quad (9)$$

$\mathbf{v}$  に関する釣合い行列を  $\mathbf{B}$  とすると、 $\mathbf{B}$  はテンセグリティを有向グラフと考えたときの接続行列から作成できる。自己釣合い状態での釣合い式は次のように書ける。

$$\mathbf{B}\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (10)$$

上式での未知数は、軸力の大きさのベクトルではなく軸力成分のベクトルなので、 $\mathbf{v}_k$  を指定することにより、部材の方向を指定できる。また、対称性などの条件も指定できる。例えば、 $x, y$  平面内の部材  $k$  と  $k+1$  を考え、 $\mathbf{v}_{k+1}$  が  $\mathbf{v}_k$  を  $\alpha$  だけ回転させて得られるとき、

次式が成立する。

$$\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{M}\mathbf{v}_k \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

その他の鏡影対称性についても、同様の表現を書くことができる。このように、軸力ベクトルによって、幾何学的制約を与えることができ、これらの制約は、 $\mathbf{v}$ に関する線形制約として次のように書ける。

$$\mathbf{S}\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (12)$$

以上より、式(10)と式(12)をまとめて次のようになる。

$$\mathbf{C}\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{C} = [\mathbf{B}^T, \mathbf{S}^T]^T \quad (13)$$

各部材の軸力ベクトルに対して方向と対称性条件が適切に与えられれば、式(13)を解いて $\mathbf{v}$ を求めることができる。

部材 $k$ に対し、長さが部材長に等しく、方向が部材の方向に一致するベクトルを $\mathbf{d}_k = (d_k^x, d_k^y, d_k^z)^T$ とする。ここで、部材 $k$ が節点 $i$ と $j$ を接続し、 $i < j$ のとき、 $\mathbf{d}_k$ は節点 $i$ から $j$ に向かうベクトルである。 $\mathbf{d}_k$ と $\mathbf{v}_k$ の方向は同じなので、これらの外積が0となることから次式を得る。

$$[\text{diag}(\bar{\mathbf{T}}\mathbf{v}_k) - \text{diag}(\mathbf{v}_k)\bar{\mathbf{T}}] \mathbf{d}_k = \mathbf{0} \quad \bar{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

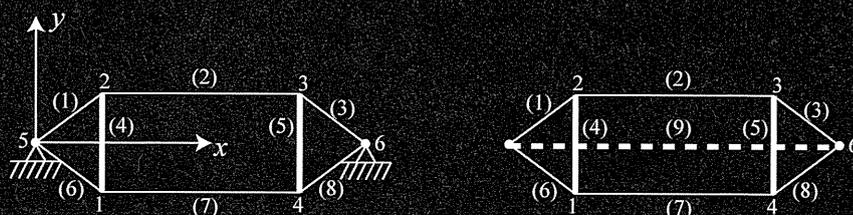
式(14)を全部材に対してまとめ、 $\mathbf{d}_k$ を節点座標ベクトル $\mathbf{X}$ で表すことにより、 $\mathbf{X}$ に対して次のような線形条件を得る。

$$\mathbf{F}\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (15)$$

ここで、 $\mathbf{v}$ が得られた後で、 $\mathbf{H}$ は既知行列であり、 $\mathbf{X}$ の成分(支点の座標など)が適切に与えられれば、式(15)を解いて $\mathbf{X}$ を求めることができる。

#### 4.2 形状解析例

図4のような平面テンセグリティ構造の形状設計を行う。図4(a)は支点を持つので、図4(b)のように補助部材9を導入して支点を除去する。部材5の方向を、 $d_5^x : d_5^y = v_5^x : v_5^y = 1 : 2$ のように与える。また、3つの部材の組(1,3)、(2,7)及び(6,8)は対称に配置され、補助部材は水平に配置される。すなわち $v_9^y = 0$ である。



(a) ピン支持された構造

(b) 補助部材を含む構造

図4: 平面テンセグリティ構造

表 1: 平面テンセグリティの軸力ベクトル

部材	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
$v_i^x$	-1	1.5	1	0.5	0.5	-2	1.5	2	3
$v_i^y$	-1	0	-1	-1	1	1	0	1	0

式 (13) を解いて得られた軸力ベクトルを表 1 に示す。これらの軸力成分から  $\mathbf{H}$  を構成すると、 $\text{rank}(\mathbf{H}) = 8$  である。ここで、 $n = 12$  なので、4 つの座標成分を指定することができる。 $(x_2, x_3, y_3, x_6) = (1, 0, 0, 8)$  としたときの形状及び節点座標を表 2 及び図 5 に示す。

表 2: 平面テンセグリティの節点座標

節点	1	2	3	4	5	6
$x$	2	1	7	6	0	8
$y$	-1	1	1	-1	0	0

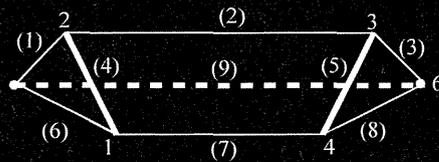
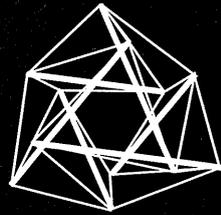


図 5: 平面テンセグリティの釣合い形状

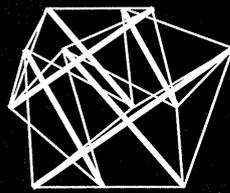
以上のように、本手法を用いると、部材の方向を直接制御できる。ところで、部材数が多い複雑な形状の 3 次元のテンセグリティに対しては、必要な数だけの部材の軸力ベクトルを全て指定するのは困難である。そのような場合には、軸力ベクトルの目標値を指定して、その値との誤差が最小となり、釣合い条件と、対称性などの自明な制約条件を満たす軸力ベクトルを、2 次計画問題を解いて求めることができる。そのようにして得られた 3 次元のテンセグリティの例を図 6, 7, 8 に示す [2,9]。

参考文献

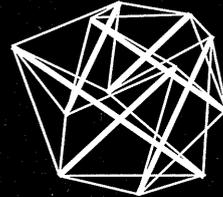
[1] H. Lalvani (Ed.), Oringing of tensegrity: Views of Emmerich, Fuller and Snelson, *Int. J. Space Struct.*, Vol. 11, pp. 27-55, 1996.  
 [2] 木村 駿, 軸力最適化によるテンセグリティの形状決定, 京都大学卒業論文, 工学研究科建築学専攻, 2005.  
 [3] 寒野善博, 大崎 純, 非線形計画法を用いたケーブルドームの応力指定形状設計法, 第 5 回最適化シンポジウム講演論文集, 日本機械学会, pp. 153-158, 2002.  
 [4] J. Y. Zhang, Optimization problems for design and maintenance of forces and shape of tensegrity structures Master's thesis, Kyoto University, Dept. of Architecture and Architectural Eng., 2005.  
 [5] J. Y. Zhang and M. Ohsaki, Adaptive force density method for form-finding problem of tensegrity structures, submitted to *Int. J. Solids Struct.*  
 [6] G. Tibert and S. Pellegrino, Review of form-finding methods for tensegrity structures. *Int. J. Space Struct.*, Vol. 18(4), pp. 209-223, 2003.  
 [7] N. Vassart and R. Motro, Multiparametered form-finding method: application to tensegrity systems *Int. J. Space Struct.* Vol. 14(2), pp. 147-154.  
 [8] J. Y. Zhang, M. Ohsaki and Y. Kanno, A direct approach to design of geometry and forces of tensegrity systems, *Int. J. Solids, Struct.*, in press.  
 [9] 木村 駿, 最適化手法によるテン セグリティ構造の軸力・形状決定, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 2005.



平面図

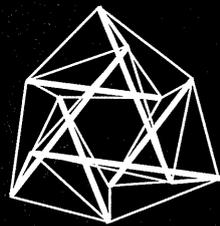


立面図



鳥瞰図

図6： テンセグリティの例1



平面図

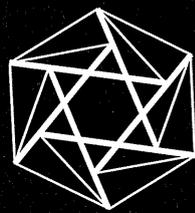


立面図



鳥瞰図

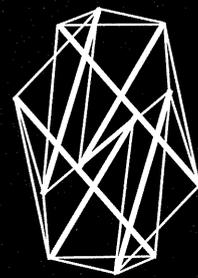
図7： テンセグリティの例2



平面図



立面図



鳥瞰図

図8： テンセグリティの例3