重複座屈荷重の不整感度解析

Imperfection Sensitivity Analysis of Coincident Critical Points

大崎純 Makoto Ohsaki

An illustrative example is presented to show that a structure with hilltop branching that has bifurcation points at the limit point is naturally generated by optimization. It is shown that imperfection sensitivity of a hilltop branching point is governed by a piecewise linear law even for the case where many bifurcation points exist at a limit point. It is also shown that the maximum load of a column-type frame is not much reduced by an imperfection of a practically acceptable small range.

1. はじめに

構造物に荷重をゆっくり増加させながら作用させたときに，材料の塑性化が生じることなく，突然安定性を失う現象を座屈という。力学や応用数学の分野では，座屈が発生する状態を臨界点といい，そのときの荷重を座屈荷重あるいは臨界点荷重という。座屈現象は，図１に示す柱のように，荷重の方向と直交する方向に変形が進行する分岐型座屈と，図２に示すトラスのように，荷重の方向に変形が増大する極限点型座屈に分類される。これらの座屈現象は，通常単独で発生するが，特殊なプロポーションを持つ構造物では，座屈荷重が重複し，複数の座屈現象が同時に生じる場合がある。

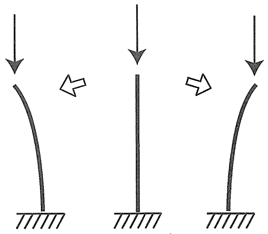

図１：　柱の分岐点型座屈

ところで，柱や円筒などの軸力や面内力を受ける構造物では，初期形状に微小な誤差（元たわみなどの形状不整）が存在すると，座屈荷重が大きく減少することが知られている。このような構造物では，座屈荷重が重複すると，不整敏感性が極端に大きくなる場合がある。

Thompson and Hunt [1] は，柱状のラチス構造において，全体座屈と局部座屈の連成に起因して，不整によって座屈荷重が大きく減少することを示した。しかし，そこでは極めて大きい不整が考慮されており，建築骨組では，実際的

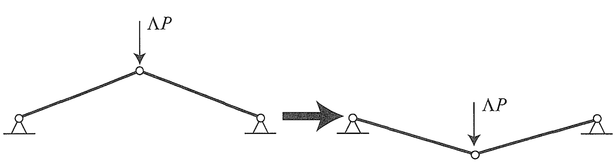

図２：　２部材トラスの極限点型座屈

な不整の範囲で全体座屈と部材座屈の連成によって不整感度敏感性が顕著に大きくなることはない [2,3]。与えられた設計条件を満たすような構造物の部材剛性や形状を求める設計問題において，全体剛性や構造重量などを最大化あるいは最小化する問題を解いて，最適な設計を求めることを，構造最適化あるいは最適設計という [4-6]。座屈現象を考慮して最適化を行うと，臨界点が重複するような最適解が得られることが多いため，座屈に対する最適化の危険性については，円筒シェルなどの不整に敏感な構造物を対象として，多くの論文で論じられている。そのため，一般には，「いかなる構造物も座屈に対して最適化すると不整敏感性が大きくなるので最適化してはいけない」と理解されてしまっている。

一方，極限点と分岐点が重複する頂上分岐点 (hilltop branching point) では，不整系の臨界点荷重は不整パラメータ（元たわみなどの大きさを定める変数）の区分的線形関数であり，分岐点が単独に存在する場合と比べて不整感度は減少する [7-9]。また，Ohsaki [10] は，扁平トラスを座屈に関して最適化すると，頂上分岐点を有する最適解が得られることが多いことを示した。

本稿では，これらの成果をわかりやすく解説し [5]，実際上意味のある不整の範囲では，最大荷重の急激な低下は見られないことを示す。

２．最適化にともなう頂上分岐点

座屈を考慮した最適設計問題における最適解での興味深い現象について紹介するため , 図３に示すような４部材トラスを考える。材料定数などの詳細は，文献 [5,6] を参照すること。４つの部材は同一の断面積Ａを持ち , トラスは xz 平面および yz 平面に関して対称である。頂点に荷重Λｐが作用し，荷重係数Λを漸増させる。

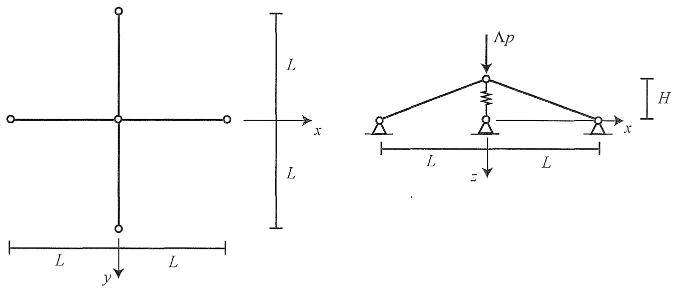

図３：　４部材トラス

全ポテンシャルエネルギーの節点変位に関する２階微分係数の行列である接線剛性行列の固有値を e_i，固有ベクトルを Φ_i とする。$\Lambda=0$ の初期状態では全ての固有値は正であり， Λを増加させると最小固有値 e_1 が減少する。$e_1=0$ が成立するような状態を臨界点あるいは座屈点といい，そのときのΛの値 Λ^c を，臨界点荷重係数あるいは座屈荷重係数という。

座屈荷重係数 Λ^c に関する制約の下で , 全部材体積Ｖを最小化する。設計変数は高さＨと断面積Ａである。最適解の特性について考察する前に , まず , Ａを固定してＨと Λ^c の関係を調べてみると, 図４のようになる。Ｈが小さいときには臨界点は極限点であり , Ｈを増加させると極限点荷重係数は増加し , $H=H^*$ において分岐点荷重係数と一致する。このような臨界点を頂上分岐点という。Ｈが大きいときには臨界点は分岐点であり , $H>H^*$ において分岐点荷重係数はＨの増加とともに減少する。

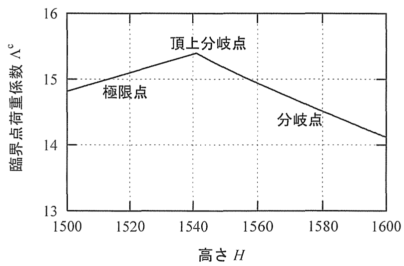

図４：　断面積Ａが一定のときの座屈荷重係数 Λ^c と高さＨの関係

次に , 制約条件 $\Lambda^c \geqq 1$ が与えられたときの最適解を求めてみる。Λ^c, Ｖともに A に比例するので , Ｈを変化させたとき , 最適解において $\Lambda^c=1$ が満たされ , Ｈを与えることによりＡ及びＶを計算できる。$\Lambda^c=1$ のときのＨとＶの関係を図５に示す。図より , $H=H^*$ が最適解であり , 最適なトラスは頂上分岐点を持つことがわかる。

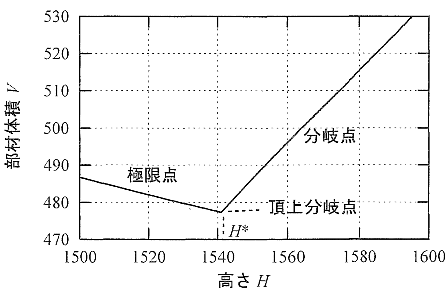

図５：　座屈荷重係数 Λ^c が一定のときの高さＨと全部材体積Ｖの関係

また , 最適解における中央節点の z 軸方向変位 u と接線剛性行列の固有値 e_1, e_2 の関係を図６に示す。図より , ２つの固有値が同時に０になっていることがわかる。ここで , 分岐点モードに対応する固有値は０まで減少したあと負にはならずに再び正の値をとっている。このような分岐点を退化分岐点という [11]。

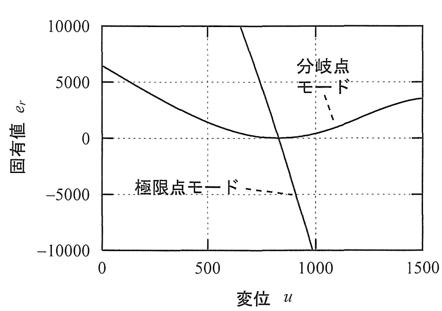

図６：　変位ｕと固有値 e_r の関係

3.

部材座屈と全体座屈が重複するアーチの不整感度特性

図7に示すような，ピン接合アーチ状トラスにおいて，荷重係数Λを増加させると極限点に達し，そのとき m − 1 個の部材が同時に座屈するものとする。部材座屈は分岐点型なので，m − 1 個の分岐点が極限点に存在することになる。臨界点での変位を基準とした Φ_j の方向の一般化変位を q_j ($j = 1, \cdots, m$) とする。ここで，q_m は極限点モード方向の変位である。また，臨界点荷重係数 Λ^c からのΛの増分を λ とすると，全ポテンシャルエネルギーは $q = (q_1, \cdots, q_n)$ と λ の関数として $V(q, \lambda)$ のように書ける。以下では，q_i での微分を下添え字 $(\cdot)_{,i}$ で表す。

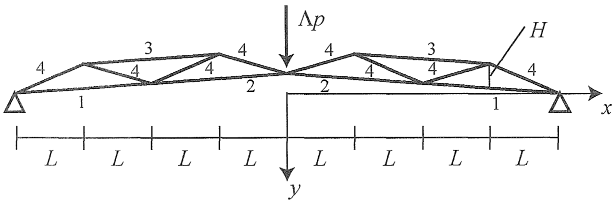

図7：　アーチ状トラス

不整パラメータを ε とし，λ と ε の関係式を導くことを不整感度解析といい，λ の ε に関する微分係数（不整感度）が無限であるような構造物を，不整に敏感な構造物という。詳細は省略するが，極限点において m − 1 個の部材が同時に座屈する構造物の不整系の臨界点荷重係数は次式で現される [12]。

$$\lambda = -\left(V_{,m\varepsilon}/V_{,m\Lambda}\right)\varepsilon - \left(1/V_{,m\Lambda}\right)\left(V_{,mmm}C\right)^{1/2}|\varepsilon| \qquad (1)$$

ここで，$V_{,\varepsilon}$ 及び $V_{,\Lambda}$ はそれぞれ V の ε 及びΛに関する微分であり，C は定数である。

上式は ε の区分的に線形な式であり，頂上分岐点は，多数の分岐点が存在する場合でも不整に対して敏感ではないことがわかる。

図7のピン接合アーチに対して不整感度解析を行った。形状などの詳細は文献 11 を参照すること。中央節点に，鉛直方向下向きに荷重Λ p を作用させる。図の各部材に示した番号は部材グループ番号であり，全体を 4 つのグループに分ける。第 i グループの断面積を A_i，断面 2 次モーメントを I_i とし，それらの関係を $I_i = (h_i)^2 A_i$ で定める。ここで，h_i は定数であり，極限点で 4 つの部材が座屈するように，I_i, A_i, h_i を調整する。

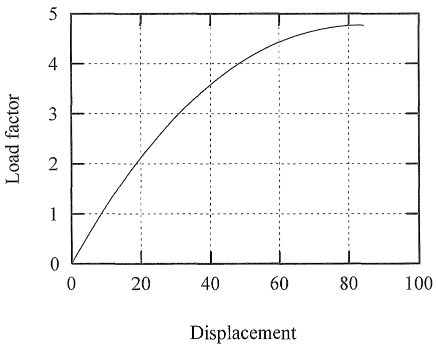

図8：　荷重係数と中央節点の鉛直変位の関係

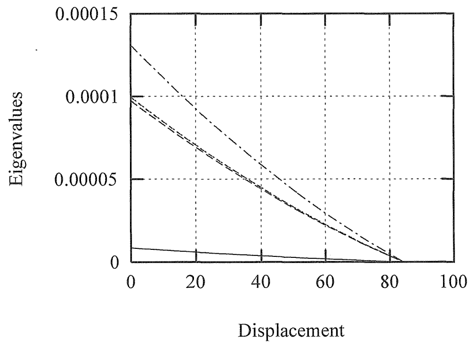

図9：　固有値と変位の関係

荷重係数Λと中央節点の鉛直変位 u の関係を図 8 に示す。図より，荷重を増加させると極限点に達していることがわかる。5 個の固有値 $e_1, \cdots, e_5$ と変位 u の関係を図 9 に示す。ここで，e_3 と e_4 は重複している。この結果より，極限点において 5 個の固有値が 0 になっていることがわかる。

5 個の固有モード $\Phi_1, \cdots, \Phi_5$ を図 10 に示す。ここで，$\Phi_1, \cdots, \Phi_4$ は部材座屈モードであり，Φ_5 は極限点モードである。また，式 (1) より，$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \Phi_5$ の方向の不整と臨界点荷重係数の関係は $\lambda^c = -1.8393 \times 10^{-2}\,\varepsilon - 0.22176\,|\varepsilon|$ のようになり，その関係を図 11 の線分で示す。図 11 において，`+' は不整系の釣合い経路解析で得られた結果であり，区分的線形式 (1) によって，十分な精度で臨界点荷重を予測できている。

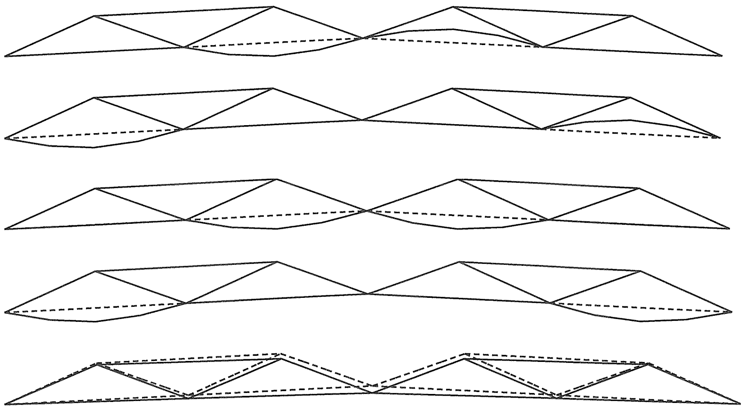

図 10： 4 個の個材座屈モード $\Phi_1, \cdots, \Phi_4$ と極限点モード Φ_5

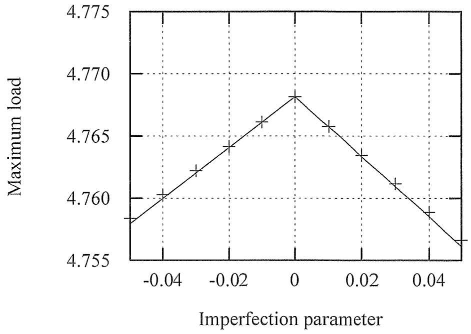

図 11： 5 個のモードを含む不整に関する臨界点荷重と不整パラメータの関係

4. 柱状構造物の局所モードと全体モードの連成

図 12 のような柱状トラスを対象として，全体座屈と部材座屈の連成について考える。水平方向基準荷重 p は 10000 N である。水平材と束材の長さはそれぞれ，2000 mm, 1000 mm である。以下で，力と長さの単位はそれぞれ N, mm とする。

水平材は半径と厚さの比が 10:1 の鋼管であり，節点で剛接合する。束材と斜材はピン接合とし，束材の断面積は十分に大きい値とする。水平材と斜材の断面積が 1000, 14.979 のとき，全体座屈荷重と局所座屈荷重係数が 0.075902 で重複した。それぞれのモードを図 13 及び図 14 に示す。

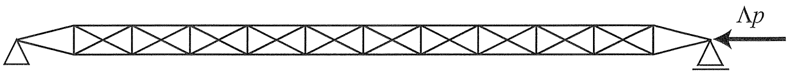

図 12： 柱状トラス

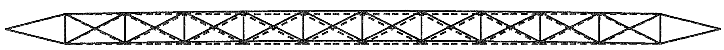

図 13： 柱状トラスの全体座屈モード

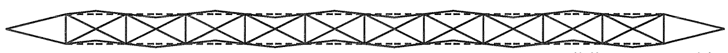

図 14： 柱状トラスの局所座屈モード

節点位置と部材元たわみの不整を正規分布で与える。ここで，標準偏差は節点位置に対して 200（柱の長さの約 /100）, 部材中央の初期たわみに対して 2（部材長の 1/1000）とする。不整ノルムと臨界点荷重係数の関係を図 15 に示す。臨界点荷重係数は，完全系での値 0.075902 から顕著に低下しないことが分かる。また，不整が存在すると，完全系の分岐荷重近傍の臨界点が消失し，臨界点荷重係数が増加する傾向が見られる。以上より，実際に想定されるような不整の範囲では，臨界点荷重の低下は小さく，Thompson and Hunt [1] が指摘したような不整敏感性は存在しない。実際に，文献 1 のラチス柱では，部材の断面半径の 1/2 程度の元たわみがなければ最大荷重の顕著な低下はみられない。

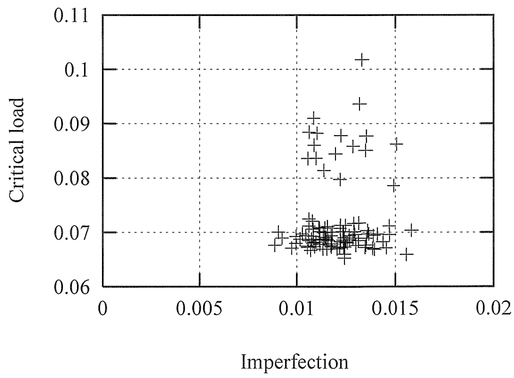

図 15： 不整ノルムと臨界点荷重係数の関係

ところで，現実的なプロポーションの柱では，最大荷重は材料の降伏で決まることが多い。したがって，部材の最大応力と形状不整との関係について，図 16 のような単純モデルを用いて検討してみる。応力制約で定められる最大荷重 Λ^m が不整にともなって低下する要因としては，次の 2 つが考えられる。

1. *部材の局所変形にともなう付加モーメント（P − δ 効果）による局所曲げ変形の影響で，柱の縁応力が増加する。*
2. *骨組の変形にともなう柱の付加軸力（P − Δ 効果）によって柱の軸力が増大し，部材座屈あるいは降伏が早期に発生する。*

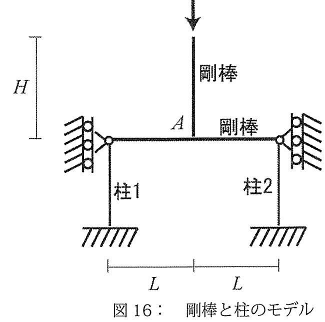

図 16： 剛棒と柱のモデル

まず，両端ピン支持された柱に不整を与えて軸方向の荷重と変位の関係を求めてみる。柱の長さは 1000, 断面半径は 10, 断面積は 10000, 基準荷重は 10000 である。柱の中央節点を材軸から 1 だけ移動

させ，1/500 の不整を与えたときの荷重係数と最大応力比の関係を図 17 に示す。ここで，応力は座屈応力で正規化している。図より，オイラー座屈荷重である 19.72 の 75% 程度で最大応力比が 1 となり，最大支持荷重に達していることが分かる。したがって，上記の要因 1 の効果は 25% 程度である。また，柱の軸力と軸方向変位の関係を図 18 に示す。図より，P − δ 効果によって柱の軸方向剛性は低下しないことが分かる。

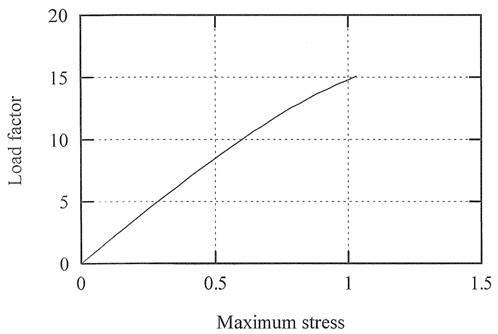

図 17： 柱部材の軸方向荷重と最大応力の関係

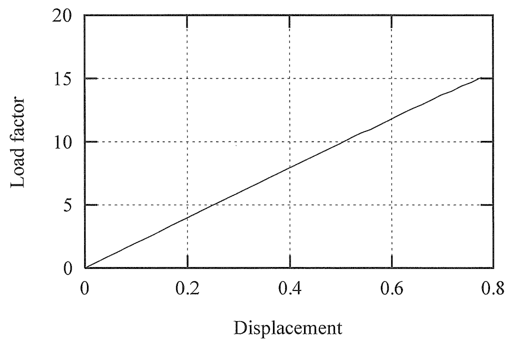

図 18： 柱部材の軸方向荷重と軸方向変位の関係

次に，要因 2 について考察するため，図 16 に示した簡単な剛体・バネモデルを考える。P − δ 効果にともなう柱の軸方向剛性低下は少ないので，柱の軸方向変位と軸力の関係は線形とする。スパンを 2L, 高さを H，鉛直剛棒の不整の角度を R とする。荷重 P による点 A まわりの付加モーメントを M とすると M = PHR であり，それにともなう柱 1, 2 の軸力 N は |N| = (PHR)/(2L) である。例えば，中層骨組のプロポーションを考え，R = 1/500, H/L = 10 のとき，N = P/100 である。荷重 P により，それぞれの柱にもともと軸力 P/2 が存在していたので，P − Δ 効果による軸力増加は微小であり，部材の座屈荷重の低下は無視できる。

5. おわりに

極限点に多くの分岐点が存在する頂上分岐点では，不整系の臨界点荷重係数は不整パラメータの区分的線形関数となる。すなわち，臨界点荷重は不整パラメータに関して敏感ではない。頂上分岐点は最適化の結果生じることが知られている。したがって，最適解の不整敏感性については，その臨界点の分類に基づいて慎重に議論しなければならない。

また，建築骨組構造物や，柱状ラチス構造でも，実際的な大きさの不整の範囲内では，全体座屈と部材座屈が重複することによる不整感度の増加はそれほど顕著ではない。

以上より，座屈荷重の重複と不整感度の関係については，対象としている構造物，荷重条件，不整の大きさなどから総合的に判断しなければならず，「重複座屈は不整に対して敏感である」と短絡的に解釈するべきではない。

参考文献

1. J. M. T. Thompson and G. W. Hunt, A General Theory of Elastic Stability, John Wiley, New York, 1973.
2. 大崎 純，ブレース付き低層骨組の不整感度特性，鋼構造座屈セミナー ー性能設計と統合的評価法ー，日本建築学会・鋼構造運営委員会・鋼構造座屈小委員会，pp. 102--111, 2005.
3. M. Ohsaki, Imperfection sensitivity of optimal symmetric braced frames against buckling, Int. J. Non-linear Mech., Vol. 38, pp. 1103-1117, 2002.
4. 加藤直樹，大崎 純，谷 明勲，建築システム論，造形ライブラリー 3，共立出版，2002.
5. 藤井文夫 , 大崎 純，池田清宏，構造と材料の分岐力学 , コロナ社 , 2005.
6. M. Ohsaki, Design sensitivity analysis and optimization for nonlinear buckling of finite-dimensional elastic conservative structures, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., Vol. 194, pp. 3331-3358, 2005.
7. J. M. T. Thompson and P. A. Schorrock, Bifurcation instability of an atomic lattice, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 23(1), pp. 21-37, 1975.
8. K. Ikeda, M. Ohsaki and Y. Kanno, Imperfection sensitivity of hilltop branching points of systems with dihedral group symmetry, Int. J. Non-Linear Mech., Vol. 40, pp. 755-774, 2005.
9. M. Ohsaki, Sensitivity analysis of an optimized bar-spring model with hill-top branching, Arch. Appl. Mech., Vol. 73, pp. 241-251, 2003.
10. M. Ohsaki, Optimization of geometrically nonlinear symmetric systems with coincident critical points, Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol. 48, pp. 1345-1357, 2000.
11. M. Ohsaki, Sensitivity analysis and optimization corresponding to a degenerate critical point, Int. J. Solids Struct., Vol. 38, pp. 4955-4967, 2001.
12. M. Ohsaki and K. Ikeda, Imperfection sensitivity analysis of hill-top branching with many symmetric bifurcation points, Int. J. Solids Struct., in press.