

カラフル都市の4色問題

青木義次

古代中国の都市では東西南北に四神が対応し、また四神に色や地形が対応していた。つまり、南は朱雀で赤、北は玄武で黒、東は青龍で青、西は白虎で白。都市の中の方位に色が対応するのは、南方に伝わり、インドネシアでは、南は海で赤、北は山で黒、東は日の出で白、西は日没で黄となっている。日本は、ほとんど、そのままの形で中国から伝わり、藤原京、平城京、平安京にそっくり用いられており、江戸の町割りでも、この考え方は生きていた。日本の伝統スポーツである相撲の土俵にも、この方位と色の対応が用いられている。昔は土俵の上にかかる屋根を支える4本の柱に、この色が対応させられ、現在では、屋根は釣る形なので、柱は無くなったが、その代わりに、四隅に房がさげられ、この4色を表している。「千代の富士が黒房下で寄りきった」などとアナウンサーの言葉の中にも登場する。面白いのは、土俵は力士が東西から登場するように、東西南北に方位が合わせてあり、柱や房の位置は、そのため、この方位と45度ずれていることだ。土俵の色については、古代中国の四神の考え方と45度ずらして利用していることになる。そこで、都市も45度ずれて4色を対応させると、どういうことになるかを考えてみよう。まず、都市は一辺 n の正方形をしているとしよう。古代中国では、東西、南北を3つの部分に分割し9個の小地域に分割するという考え方（九田法）が用いられるが、現代都市のことなので、これを東西、南北をそれぞれ、 n 等分し、 $n \times n$ 個の小地域（以下一辺1の長さの正方形を「小地域」と呼ぶ）に分割することにしよう。この結果、都市の内部に東西、南北それぞれに、 $n-1$ 本の通りが出来たこと

になる。この一辺 n の正方形都市の四隅にそれぞれ異なる 4 つの色をつけよう。このとき、古代都市の赤、黒、白、青にこだわらず、もっとカラフルに好きな色をつけてよい。四隅の彩色ルールは、

都市四隅彩色ルール：都市の四隅は、異なる 4 つの色で彩色する。

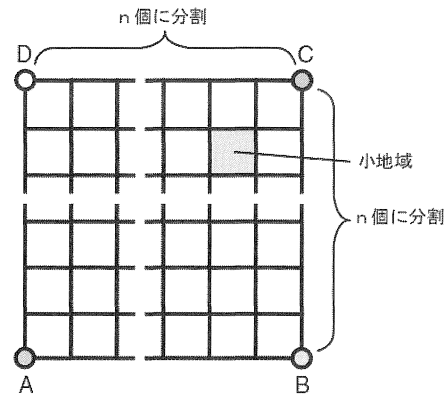


図1. 四隅がA, B, C, Dの四色に彩色された都市

ということにする。ここでは、その 4 色を A, B, C, D と記号で書くことにする（図 1）。

さて、カラフル都市では、都市の境界である東西南北の 4 辺のそれぞれに、 $n-1$ 個の通りがぶつかるので、 $n-1$ の頂点があるが、ここには城門を作り、その城門にも色を付けることにする。ただし、都市にやって来る人がこの城門を通るので、無節操な色は好ましくない。そこで、城門の彩色は以下のルールに従うものとする。

城門彩色ルール：城門が属している都市境界辺の両端には、すでに、A, B, C, D のうちのいずれか 2 色が彩色されているので、この 2 色のどちらかとする。

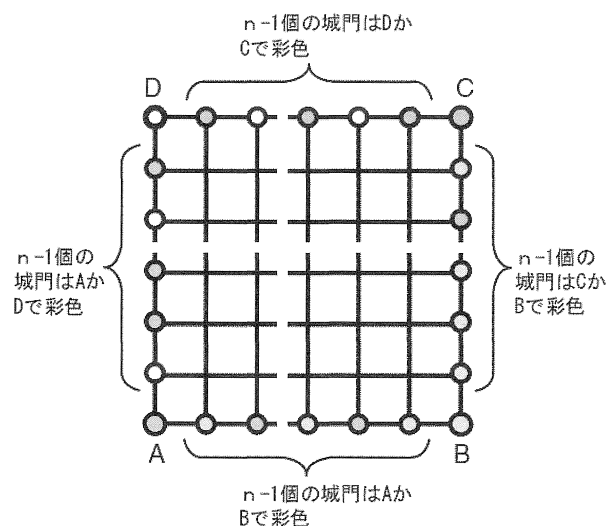


図2. 城門の彩色ルール

さらに、もっとカラフルにするため、東西南北の通りが交わる交差点にも色をつけることにしよう。各小地域に住む人々が好きなように決めるのがよいが、あまりにも変な色だと乱雑なので、先の A, B, C, D の色のいずれかとしよう。

交差点彩色ルール：A，B，C，Dの色のいずれかを交差点の色とする。

さて，都市四隅彩色ルール，城門彩色ルール，交差点彩色ルールで各小地域の四角に色が付けられたことになる。つまり，グリッド状になった都市の $(n+1)^2$ 個の頂点のすべてに色がついている。

このとき，この都市の住人が，奇妙な事実に気がつきました。

『四隅の色が3色以上の小地域が必ずある』

というのです。これは本当でしょうか。すべての小地域の四隅を2色以下で塗ることはできないのでしょうか。

そこで問題です。

問題：都市四角色ルール，城門色ルール，交差点彩色ルールで色付けされたとき，四隅の色が3色以上になっている小地域が必ずあるということが正しいのならば証明しなさい。正しくないのであれば，正しくないことを示しなさい。

解答例

『都市四隅彩色ルール，城門彩色ルール，交差点彩色ルールで色付けされたとき，四角の色が3色以上になっている小地域が必ずある』は正しい。

証明：2次元の問題は難しいので，最初は1次元の問題で，有用な性質をはっきりと確認することから始める。 m 個の線分でつながった $m+1$ 個の頂点に2種類の色を付けてゆく問題を考える。各線分の両端の色が異なる線分の数 k とすると，次の命題が成立する。

命題：最初の点の色と最後の点の色が同じであれば， k は偶数であり，最初の点と最後の点の色が異なっていれば， k は奇数である。

この命題の証明は，次のように考えればやさしい。色が変わる場所の数 k を数える問題だとすれば，色が変わらないところは無視して，図のように色が変わらない点をまとめてしまう。すると，色は交互に並ぶことになる。すると，変わる数 k が奇数なら最初と最後は同じになり，偶数ならば異なるのが分かる。つまり，命題が正しいことが分かる。

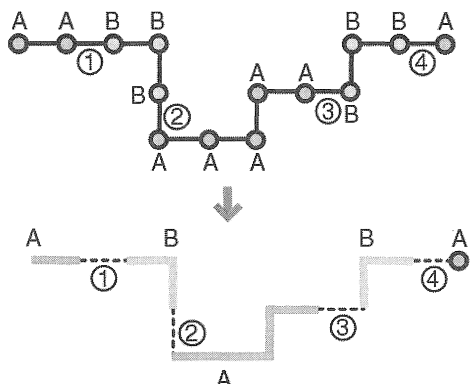


図3. 最初と最後が同色なら色変化は偶数回

さて，上記の命題を使って，本題の証明を行おう。まず，証明すべきことを否定して矛盾を導くという背理法を採用する。このとき，否定命題は，

「どの小地域の四隅の色を2色以下の色で塗ることができる」

である。

どの小地域も2色以下で塗れるというのですから、1色で塗れるか2色で塗れるわけです。最初にどの小地域も1色で塗れるかどうか検討しましょう。

どの小地域も1色で塗れるとし、都市の四隅のひとつ、たとえば左下（南西）の隅に注目します。その色をAとします。このAの色の隅を含む小地域は、すべて色Aの四隅からなる小地域ということになります。その右隣の小地域を考えると、すでに左側の2つの角は色Aでしたし、1色で塗れるのですから右側の2つの隅も色Aということになります。そこで、また、その右側の小地域を考えると同様にして全部色Aでなければなりません。次々にこれを繰り返してゆくと都市全体の右下（南東）の隅を含む小地域になります。この小地域も同様の論法で全部色Aで塗られているはずですが、ところが、この右下（南東）の隅の小地域の右下の隅は、都市全体の南東の隅ですので、都市四隅採色ルールより、南西の隅の色であるAと異なる色でなければならず、矛盾します。つまり、どの小地域の4つの隅を1色だけで塗ることは不可能なのです。

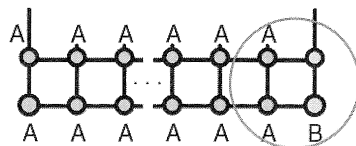
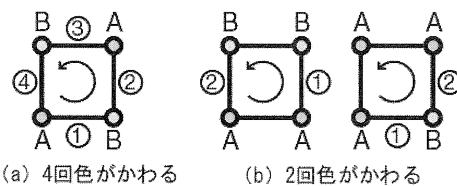


図4. 全小地域を1色で彩色するのは無理

そこで、残された可能性は、全小地域の4つの隅を1色または2色で塗り、かつどれかは2色となっている場合だけです。2色になっている小地域に注目し、そこで用いられた2色を色Aと色Bと考えることにします（色の名前は便宜的ですから、このように考えても一般性を失いません）。この小地域の4つの隅は4つの辺でつながっていますので、たとえば、左下（南西）の隅から右下（南東）、右上（北東）、左上（北西）と通りまた左下（南西）にまで辿ることを考えますと、出発点の左下（南西）と最終点の左下（南西）は同じ点ですから同一の色です。このことは、先に証明した命題の前半部分より、色が変わる辺の数 k は偶数であることになります。もともと、小地域の周りは4つの辺しかなかったので、色が変わる辺の数は2か4しかあり得ません。



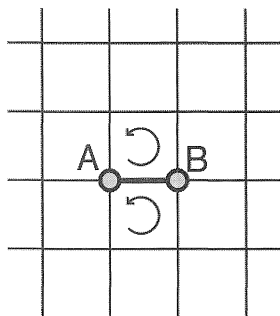
(a) 4回色が変わる (b) 2回色が変わる

図5. 色が変わる回数は2回か4回

以上の小地域についての考察を元に、都市全体を考えることにします。都市全体では、小地域の辺で片方の端点が色Aでもう片方が色Bのものが、先に注目した小地域以外にもあるはずですが、そこでも、小地域の周囲をぐるりとまわるときに色が変わる回数は2回か4回なはずですが。そこで色が変わる回数が2である小地域の数を y_2 、4である小地域の数を y_4 とします。

ここで、都市全体で片方が色Aでもう片方が色Bである辺の総数 L を計算してみます。 $2y_2 + 4y_4$ が総数 L だと考えては間違いです。 y_2 と y_4 は小地域の数ですし、隣接している小地域の共有辺の場合には、このように計算すると2回カウントされてしまうからです。だからと言って、この半分が総数 L だ考えるのも間違いです。というのは、都市の外周にある色Aと色Bを両端に持つ辺はダブルカウントされないからです。そこで、外周上にあって色Aと色Bを両端に持つ辺の数を z として、すべての色Aと色

Bを両端に持つ辺がダブルカウントするように計算すると、



$$2L = 2y_2 + 4y_4 + z$$

ということになります。

図6. 内部の場合、ひとつの辺は2つの小地域でカウントされる

ここで、外周上であって色Aと色Bを両端に持つ辺の数 z について考えてみます。都市外周上で色Aと色Bが用いられるのは、城門彩色ルールより、ひとつの面しかありません。一般性を失うことなく都市の南側の外周面の左（西）の隅が色Aで右（東）の隅が色Bであったと考えても問題ありません。先に述べた外周上の色Aと色Bを両端に持つ辺の数 z というのは、この南外周面だけの数でもあります。そこで、都市のこの南外周面を左（西）の隅から右（東）の隅へと線分を辿ってゆくことを考えます。すると出発点は色Aで最終点は色Bで、途中は城門色ルールより色Aか色Bかのいずれかですので、先に証明した命題の後半部分より、色が変わる辺の数は奇数です。つまり、南側面上に位置する辺で、両端が色Aと色Bとなる辺の数 z は奇数です。

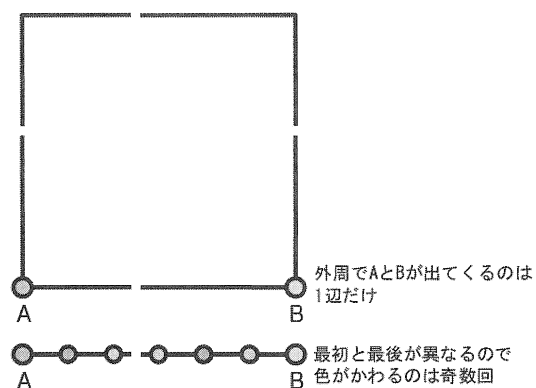


図7. AとBの外周上では色が変わるのは奇数回

z が奇数であることが分かったところで、先に求めたダブルカウント式を眺めてみると、左辺は2倍しているので偶数、一方、右辺の第1項と第2項はそれぞれ2倍、4倍しているので偶数です。偶数に第3項の奇数 z を加えると奇数になります。左辺が偶数で右辺が奇数となるのは、矛盾です。以上のことから、否定命題は矛盾を導くことが分かりました。つまり、元の主張は正しいことが証明できたのです。

上記の証明は、背理法という方法は高校数学レベルかも知れませんが、それ以外は偶数と奇数を区別するという小学校の算数の知識だけでなされています。

カラフル都市には必ず4つの隅の色が3色以上になる小地域があるという事実を以降では『カラフル都市の3色定理』と呼ぶことにしましょう。すると、この定理は、カラフル都市という玩具のような世界だけでなく、経済学の一般均衡理論やゲーム理論、動的システムの平衡状態の解析理論などで基礎と

なる不動点定理を証明する道具にもなるのです。不動点定理というのは、有界な空間からその中への連続写像では、元の値と写像先の値が同一となる不動点という点が必ず存在するという定理です。

矩形を格子状に分割し、4つの色を対応させただけの議論が、そんな立派な役割を持つとは信じがたいことかも知れません。一般に不動点定理は位相数学の面倒な議論をへて証明するのですが、不動点定理に必要な最小限の位相的性質は、この『カラフル都市の3色定理』の中で検討済みになっています。したがって、あとは、微分積分学の最初に議論される $\varepsilon - \delta$ 論法を応用するだけで、不動点定理を導くことができます。

論より証拠で、以下では、不動点定理（ただし、具体性を失わないことと、一般性を持たせるために面倒な表現をすることを回避し、2次元の矩形領域からの写像に限定した不動点定理です）を証明してみましょう。

最初に、次の2次元連続関数に関する連立方程式の解を保証する定理を証明することにしましょう。

定理：2次元の矩形領域 $U^2 = [-1, 1] \times [-1, 1]$ で定義されたふたつの連続関数 f, g を考える。つまり、

$$(x, y) \in \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$$

で定義された連続関数 $f(x, y)$ と $g(x, y)$ です。このふたつの関数が、以下の条件を満足しているとします。

$$y \in [-1, 1] \text{ なるすべての } y \text{ について } f(-1, y) \leq 0 \text{ かつ } f(1, y) \geq 0 \quad (0-1)$$

$$x \in [-1, 1] \text{ なるすべての } x \text{ について } g(x, -1) \leq 0 \text{ かつ } g(x, 1) \geq 0 \quad (0-2)$$

このとき、次の2次元連立方程式は、解

$$(x, y) \in U^2$$

を持つ。

$$f(x, y) = 0, \quad g(x, y) = 0$$

証明：これも、やはり背理法により証明します。すなわち、

$$f(x, y) = 0, \quad g(x, y) = 0$$

となる

$$(x, y) \in U^2$$

は存在しないと仮定します。

I) 上式を同時に満足することがないということと、関数 f, g の連続性から

$$\{f(x, y)\}^2 + \{g(x, y)\}^2 > \varepsilon^2 \quad (1)$$

となる ε が存在することになります。さらに、適当な δ をとり、

$$|x_a - x_b| - |y_a - y_b| < \delta \quad (2)$$

を満足する U^2 内の2点 $(x_a, y_a), (x_b, y_b)$ に対し,

$$|f(x_a, y_a) - f(x_b, y_b)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (3-1)$$

$$|g(x_a, y_a) - g(x_b, y_b)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (3-2)$$

とすることができます。(いわゆる $\varepsilon - \delta$ 論法です)

II) 次に U^2 を格子状に分割します。つまり, 正の整数 N として,

$$x_i = -1 + \frac{2(i-1)}{N} \quad (4-1)$$

$$y_j = -1 + \frac{2(j-1)}{N} \quad (4-2)$$

として, $(N+1)^2$ 個の格子点 (x_i, y_j) を定義します。さらに4点 $(x_i, y_j), (x_{i+1}, y_j), (x_{i+1}, y_{j+1}), (x_i, y_{j+1})$ で囲まれた(境界も含む)正方形の領域を Z_{ij} とします。

ここで正の整数 N を十分大きくとれば, 格子点間隔 $2/N$ は

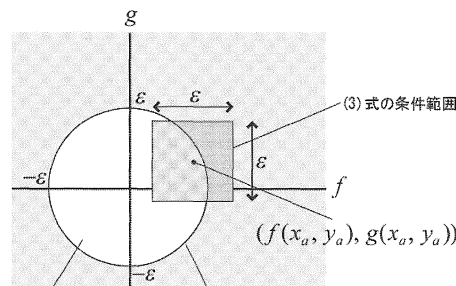
$$2/N < \delta/2 \quad (5)$$

とすることができます。したがって, ゾーン Z_{ij} 内の任意の2点 $(x_a, y_a), (x_b, y_b)$ に対して (2) 式を満足することになりますので, I) の結果より (3) 式が成立していることがわかります。

ここで, 関数 f, g の値の空間を考えます。すると, 点 (x_a, y_a) に対する関数の値 $f(x_a, y_a), g(x_a, y_a)$ は (1) 式を満足していますので, 当然,

$$\{f(x_a, y_a)\}^2 + \{g(x_a, y_a)\}^2 > \varepsilon^2 \quad (6)$$

を満足しています。すると, 図のように, f, g 空間では, 点 $(f(x_a, y_a), g(x_a, y_a))$ は, 原点を中心とする半径 ε の円の外側ということになります。一方, 点 (x_a, y_a) と点 (x_b, y_b) がともにゾーン Z_{ij} 内にあるときは, (3) 式を満足しますので, f, g 空間での点 $(f(x_b, y_b), g(x_b, y_b))$ は, 図のように点 $(f(x_a, y_a), g(x_a, y_a))$ から上下左右 $\varepsilon/2$ ずれた矩形領域になければならないことになります。この矩形領域は, (6), (3) 式の制約から原点を含むことはあり得ないことに注意して下さい。したがって, $f(x_a, y_a)$ と $f(x_b, y_b)$ の符号が異なり, 同時に $g(x_a, y_a)$ と $g(x_b, y_b)$ の符号も異なっているということは起きません。すなわちゾーン Z_{ij} 内にある任意の2点の関数 f, g の符号が同時に異なることはあり得ません。



(6) 式の条件はこの円の外
 $\{f(x, y)\}^2 + \{g(x, y)\}^2 > \varepsilon^2$
 図8.

Ⅲ) 先に定義した格子点 (x_i, y_j) に対して, その関数 f, g の符号を以下のように簡単に表現することにします。つまり, 格子点 (x_i, y_j) に c_{ij} という値を定義します。

$$f(x_i, y_j) \leq 0 \text{ かつ } g(x_i, y_j) \leq 0 \text{ のとき } c_{ij} = (-1, -1) \quad (7-1)$$

$$f(x_i, y_j) \leq 0 \text{ かつ } g(x_i, y_j) > 0 \text{ のとき } c_{ij} = (-1, 1) \quad (7-2)$$

$$f(x_i, y_j) > 0 \text{ かつ } g(x_i, y_j) \leq 0 \text{ のとき } c_{ij} = (1, -1) \quad (7-3)$$

$$f(x_i, y_j) > 0 \text{ かつ } g(x_i, y_j) > 0 \text{ のとき } c_{ij} = (1, 1) \quad (7-4)$$

ここで, 矩形領域 U^2 の4つの隅の点を考えます。(4) より

$$(x_1, y_1) = (-1, -1)$$

となりますが, 最初に与えられた条件 (0) より

$$f(x_1, y_1) = f(-1, -1) \leq 0$$

$$g(x_1, y_1) = g(-1, -1) \leq 0$$

なので,

$$c_{1,1} = (-1, -1) \quad (8-1)$$

となります。同様の議論で, 以下ようになります。

$$c_{1,N+1} = (-1, 1) \quad (8-2)$$

$$c_{N+1,1} = (1, -1) \quad (8-3)$$

$$c_{N+1,N+1} = (1, 1) \quad (8-4)$$

さらに, 矩形領域 U^2 の外周の4つの辺上にある格子点について考えます。最初に下辺上の格子点 (x_i, y_1) , $(i=2 \sim N)$ を考えます。この場合も (4) より

$$y_1 = -1$$

なので, 最初の条件 (0) より,

$$g(x_i, y_1) = g(x_i, -1) \leq 0$$

となり, したがって,

$$c_{i,1} = (1, -1) \text{ または } (-1, -1) \quad (9-1)$$

となることが分かります。同様にして

$$c_{i,N+1} = (1, 1) \text{ または } (-1, 1) \quad (9-2)$$

$$c_{1,j} = (-1, 1) \text{ または } (-1, -1) \quad (9-3)$$

$$c_{N+1,j} = (1, 1) \text{ または } (1, -1) \quad (9-4)$$

となります。

次に矩形領域 U^2 の内部つまり外周以外の格子点 (x_i, y_j) , $(i=2 \sim N, j=2 \sim N)$ について考えます。これらは、何も制約がありませんし、(7) の場合分けはすべてをつくしていますので、

$$c_{ij} = (-1, -1) \text{ または } (-1, 1) \text{ または } (1, -1) \text{ または } (1, 1) \quad (10)$$

です。

ここまでたどり着いたところで、4つの値 $(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1)$ を4つの色だとして、カラフル都市の問題と比較して下さい。すると、『カラフル都市の3色定理』より、周囲の4隅が3色以上となるゾーン Z_{ij} が必ずあるというのですから、ゾーン Z_{ij} の4隅の格子点の c_{ij} の値に、 $(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1)$ のうちの3つ以上現れるゾーンが必ずあるということになります。

Ⅳ) 一方、Ⅱ) の結果より、ゾーン Z_{ij} 内（境界も含む）では、 f, g の符号は同時に異なることはないという結論でしたので、ゾーン Z_{ij} の周囲の4つの格子点の c_{ij} の値は高々2種類しかあり得ません。

Ⅴ) 上記のⅢ) とⅣ) の結果は相反するものです。すなわち、証明すべき命題の否定命題を仮定することから矛盾が生じました。したがって、背理法から、

$$f(x, y) = 0, g(x, y) = 0$$

を満足する解

$$(x, y) \in U^2$$

が存在することが証明できました。

さて、この定理が証明できると、2次元の矩形領域からの写像に限定した不動点定理を証明するのは、簡単です。

定理：〔2次元矩形領域での不動点定理〕

$U^2 = [-1, 1] \times [-1, 1]$ から U^2 への連続写像 ϕ は、

$$\phi(x^*, y^*) = (x^*, y^*) \quad (11)$$

なる不動点 (x^*, y^*) を持つ。

証明：まず

$$\phi(x, y) = (\phi_x(x, y), \phi_y(x, y)) \quad (12)$$

とふたつの関数 $\phi_x(x, y)$ と $\phi_y(x, y)$ に分けて考えます。 $\phi(x, y)$ は U^2 から U^2 への写像でしたから、それぞれの関数の値は $[-1, 1]$ の中に入っています。つまり、

$$\phi_x(x, y) \in [-1, 1] \quad (13-1)$$

$$\phi_y(x, y) \in [-1, 1] \quad (13-2)$$

です。そこで、新たなふたつの関数 f, g を以下のように定義します。

$$f(x, y) = x - \phi_x(x, y) \quad (14-1)$$

$$g(x, y) = y - \phi_y(x, y) \quad (14-2)$$

関数 f, g は $U^2 = [-1, 1] \times [-1, 1]$ から $U = [-1, 1]$ への連続関数であることに注意して下さい。すると、

$$f(-1, y) = -1 - \phi_x(x, y)$$

ですが、この第2項は(13)より-1から1の範囲なので、上式の右辺は正になることはありません。つまり、

$$f(-1, y) \leq 0 \quad (15-1)$$

となります。同様の議論で、

$$f(1, y) \geq 0 \quad (15-2)$$

$$g(x, -1) \leq 0 \quad (15-3)$$

$$g(x, 1) \geq 0 \quad (15-4)$$

となります。したがって、先の2次元連続関数の連立方程式の解を保証した定理の条件に一致しているので、

$$f(x, y) = 0, \quad g(x, y) = 0 \quad (16)$$

を満足する解 (x^*, y^*) が存在することになります。

ここで、関数 f, g の定義(14)にもどれば、

$$x^* - \phi_x(x^*, y^*) = 0 \quad (17-1)$$

$$y^* - \phi_y(x^*, y^*) = 0 \quad (17-2)$$

ということになります。したがって、

$$\phi(x^*, y^*) = (\phi_x(x^*, y^*), \phi_y(x^*, y^*)) = (x^*, y^*) \quad (18)$$

となり、不動点定理が証明できました。

都市における色の配置という日常的なこと、単純なことの中に、多くの学問や技術を支える定理が潜んでいたのです。そうした思いで、あなたのまわりの都市を見てあげてはどうでしょうか。