

The concept of anti-optimization is briefly introduced, and a general form of optimization problem with anti-optimization is presented. The basic procedure of response spectrum approach is discussed based on the framework of convex analysis with unknown-but-bounded uncertainty. Examples are presented for optimization of trusses under compliance constraints, and design of flexible structure for specified strain energy and norm of displacements.

1. はじめに

構造物を設計する際には、材料特性のばらつきや、作用する荷重の不確定性を考慮しなければならない。このような不確定性は、構造設計者によって直接意識されることは稀であるが、設計時に参照する設計基準・指針などには、安全率として導入されている。

安全率は、実用的には非常に便利な概念であるが、理論的な根拠は曖昧である。材料や外力の不確定性や不確実性を、より厳密に考慮するためには、確率理論、統計理論、信頼性理論などを用いることができる。しかし、これらの理論を用いて地震荷重などの外力に対する応答量のばらつきを厳密に予測するためには、以下のような問題点がある。

1. 材料特性などのパラメータの確率分布を正確にモデル化するのは困難である。
2. パラメータの確率分布が得られた場合でも、弾塑性の複雑な解析で得られる応答量の確率分布を予測するためには、モンテカルロシミュレーションに頼らなければならず、実用規模の構造物では膨大な計算量を必要とする。
3. 応答量の確率分布の予測を簡略化するために、材料特性などを正規分布で仮定すると、極めて大きいあるいは小さい剛性などの非現実的な値まで考慮することになってしまう。

一方、確率分布は分からなくても、不確定量の存在範囲を経験などによって指定できる場合がある。そのような場合には、応答量の範囲を求める問題は確定的な問題になり、非確率的手法を用いることができる。

材料特性や外力などのパラメータの範囲を指定して、応答量の最大値(最悪値)を求める問題を、反最適化問題(anti-optimization problem)という[1]。不確定なパラメータのベクトルを \mathbf{X} 、最大変位、最大応力などの代表応答量を $R(\mathbf{X})$ とする。実験・計測あるいは経験から、 \mathbf{X} のばらつきの範囲として、上・下限値 $\mathbf{X}^U, \mathbf{X}^L$ を与えることができるものとする。あるいは、 \mathbf{X} の大きさの範囲を、重み行列 \mathbf{W} を用いて $\mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X} \leq 1$ で定義することが可能であるものとする。このような場合、反最適化問題は一般に次のように定式化できる。

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & R(\mathbf{X}) \\ \text{subject to} & \mathbf{X}^L \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{X}^U \quad \text{あるいは} \quad \mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X} \leq 1 \end{array}$$

2. 地震に対する応答評価

パラメータのばらつきを考慮した応答評価法の概念を、地震応答解析を例に考えてみる。地震応答解析には、時刻歴応答解析など種々の方法が存在するが、最も計算効率の良い方法は応答スペクトル法である。地震応答において、1つのモードが卓越する場合には、最大応答を求めるための地震力は、静的荷重に置き換えることができる。また、骨組構造の実務設計において弾塑性応答を評価する際には、地震力を静的外力に置き換えて単調載荷することが多い。したがって、地震力と等価な静的荷重を求めることは、実用上重要である。

構造物の節点変位のベクトルを時間 t の関数として $\mathbf{U}(t)$ とする。応答が弾性であると仮定すると、 $\mathbf{U}(t)$ は非減衰自由振動の i 次固有モード Φ_i とその係数 $c_i(t)$ を用いて

$$\mathbf{U}(t) = c_1(t) \Phi_1 + \dots + c_n(t) \Phi_n$$

のようにモード分解できる。ここで、 n は変位の自由度である。

Φ_i に対応する等価な静的荷重 \mathbf{P}_i を次式で定義する。

$$\mathbf{P}_i = \Omega_i \mathbf{M} \Phi_i$$

ここで、 \mathbf{M} は質量行列、 Ω_i は i 次固有値 (固有円振動数の2乗) である。

いま、1つのモード i の応答が卓越する場合を考える。例えば、ビル形式の骨組では1次モードの応答が卓越する。このとき、剛性行列を \mathbf{K} とすると、モード i に対応する応答変位の最大値 \mathbf{U}_i^{\max} は次式を解いて求められる。

$$\mathbf{K} \mathbf{U}_i^{\max} = c_i^{\max} \mathbf{P}_i$$

ここで、 c_i^{\max} は応答スペクトル法で得られたモード i の最大応答である。

いま、 \mathbf{U} の線形関数として与えられる応力などの代表応答量 R を

$$R = \mathbf{b}^T \mathbf{U}$$

で定義する。モード i の最大応答に対応する R の絶対値の最大値 R_i^{\max} は次式から求められる。

$$R_i^{\max} = |\mathbf{b}^T \mathbf{U}_i^{\max}|$$

ところで、1つのモードが卓越しない場合でも、数個のモードで応答を近似することができる。

例えば3個のモードで近似できるとき、全てのモードの最大応答に対して R が正であると仮定

すると、最悪の応答量は次式で与えられる。

$$R^{\text{worst}} = R_1^{\text{max}} + R_2^{\text{max}} + R_3^{\text{max}}$$

したがって、最悪の荷重は次式で与えられる。

$$\mathbf{P}^{\text{worst}} = c_1^{\text{max}} \mathbf{P}_1 + c_2^{\text{max}} \mathbf{P}_2 + c_3^{\text{max}} \mathbf{P}_3$$

しかし、上式では、全てのモード応答の最大値が同時に発生するものと仮定しており、応答を過大に評価することになる。このような過大評価を避けるため、一般に次式の SRSS 近似が用いられる。

$$R^{\text{SRSS}} = [(R_1^{\text{max}})^2 + (R_2^{\text{max}})^2 + (R_3^{\text{max}})^2]^{1/2}$$

SRSS 法は、ランダム振動論に基づく方法であるが、地震動と構造物の特性に基づいて、 c_i^{max} の組合せの範囲について何らかの条件を定めることができれば、それを反最適化問題の制約条件として与えて、最悪応答量を求めることができる。例えば、線形制約を与えた次のような問題を考えることができる。

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && R(\mathbf{c}^{\text{max}}) \\ & \text{subject to} && R = \mathbf{b}^T \mathbf{U}, \quad \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{P} \\ & && \mathbf{P} = c_1^{\text{max}} \mathbf{P}_1 + c_2^{\text{max}} \mathbf{P}_2 + c_3^{\text{max}} \mathbf{P}_3 \\ & && c_1^{\text{max}} + c_2^{\text{max}} + c_3^{\text{max}} \leq c^U \end{aligned}$$

ここで、 c^U は指定された上限値である。

3. 最悪応答量を考慮した最適設計問題

指定された外力に対する応力や変位などに関する制約の下で、構造コストを最小化する設計を求める問題を最適設計問題という。部材断面積などの設計変数のベクトルを \mathbf{A} 、最小化すべき目的関数を $F(\mathbf{A})$ とし、簡単のため 1 つの代表応答量 $R(\mathbf{A})$ に関する制約を考慮すると、最適設計問題は一般に次のように書ける。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && F(\mathbf{A}) \\ & \text{subject to} && R(\mathbf{A}) \leq R^U \end{aligned}$$

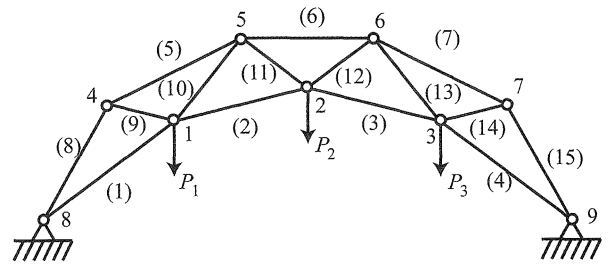


図1 アーチ状トラス

ここで、 R^U は応答量 R に対する上限値である。

通常の最適設計では、荷重や材料パラメータは確定的な量であると考えられる。これらのパラメータの不確定性を考慮した場合には、設計変数の関数としての最大（最悪）応答量が上限値以下とならなければならないので、最適設計問題は次のようになる。

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && F(\mathbf{A}) \\ &\text{subject to} && R^{\text{worst}}(\mathbf{A}) \leq R^U \end{aligned}$$

\mathbf{X} を不確定性を有するパラメータベクトルとすると、 $R^{\text{worst}}(\mathbf{A})$ は、 \mathbf{X} を変数とした反最適化問題

$$\begin{aligned} &\text{find} && R^{\text{worst}}(\mathbf{A}) = \max R(\mathbf{X}) \\ &\text{subject to} && \mathbf{X}^L \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{X}^U \quad \text{あるいは} \quad \mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X} \leq 1 \end{aligned}$$

を解いて求められる。したがって、最適設計解は、2段階の最適化・反最適化問題を解いて得られる。あるいは、構造コストの上限値を F^U として、以下のように定式化することもできる。

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && R^{\text{worst}}(\mathbf{A}) \\ &\text{subject to} && F(\mathbf{A}) \leq F^U \end{aligned}$$

4. 不確定性を有する静的外力に対する設計

図1のようなアーチ状トラスを考える。本節では、荷重の不確定性を考慮した最適設計の概念を解説することを目的とするため、トラスの形状や材料パラメータの詳細は省略する。

節点 1, 2, 3 に作用する荷重を P_1, P_2, P_3 とし、線形制約

$$-D \leq P_1 - P_3 \leq D$$

を与える。ここで、 D は荷重の非対称性の大きさを制限するパラメータであり、 $D = 0$ のとき荷重は対称である。また、表現を簡単にするため、荷重ベクトル $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)^T$ が、2節でのパラメータベクトル \mathbf{c} を表すものとする。

節点 1, 2, 3 の鉛直変位を U_1, U_2, U_3 とすると、節点変位ベクトル $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)^T$ は \mathbf{P} の線形関数であり、以下のように書ける。

$$\mathbf{U} = \mathbf{C} \mathbf{P}$$

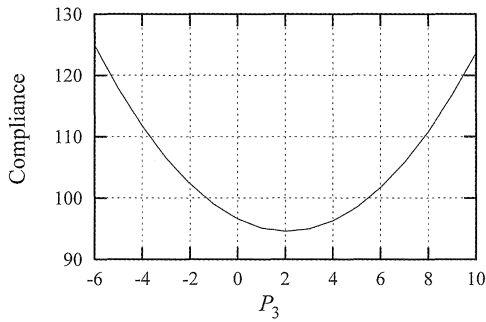


図2 P_1 と P_2 を固定したときの P_3 とコンプライアンスの関係

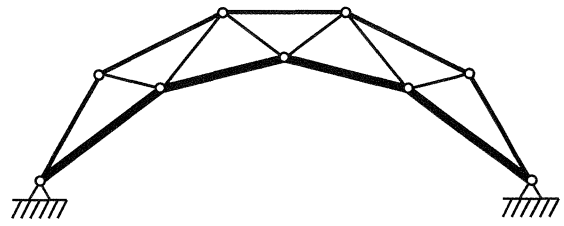


図3 コンプライアンスの最悪値を考慮したアーチの最適断面面積

ここで、 \mathbf{C} は柔行列 ($\mathbf{C} = \mathbf{K}^{-1}$) である。

下弦材，上弦材，斜材の断面積を A_1, A_2, A_3 とし，それらは次の離散値をとるものとする。

$$A_i = k \Delta A, \quad (i = 1, 2, 3; k = 1, 2, \dots)$$

以下の例では $\Delta A = 10$ とする。

最適設計問題で最小化すべき目的関数は，次式で定義されるコンプライアンス（外力仕事あるいはひずみエネルギーの2倍） W とする。

$$W(\mathbf{A}, \mathbf{P}) = \mathbf{P}^T \mathbf{U} = \mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P}$$

ここで、 \mathbf{U} と \mathbf{C} は \mathbf{A} の関数である。 P_i の上・下限値を P_i^U, P_i^L とすると，反最適化問題は \mathbf{P} を変数とした次のような問題になる。

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && W = \mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P} \\ &\text{subject to} && -D \leq P_i - P_3 \leq D \\ &&& P_i^L \leq P_i \leq P_i^U, \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

以下の例では， $P_i^U = 10, P_i^L = -10$ とする。

定義から明らかのように， \mathbf{C} が正定値行列なので，コンプライアンスは荷重の凸関数である。したがって，その最大（最悪）値は，荷重がとり得る領域（許容領域）の頂点での値を列挙することによって得られる。また， W は \mathbf{P} の2次形式なので，1つの成分の符号を正と仮定して，その値を最大値に固定することができる。さらに，例えば $P_2 = 10$ としたとき，全ての部材の断面積が同一であるものとする，トラスの対称性より， $(P_1, P_3) = (10, 10 - D)$ ，と $(P_1, P_3) = (10 - D, 10)$ での W の値は同じなので， P_1 を10あるいは-10に固定できる。以上より，許容領域の頂点 $(P_1, P_2, P_3) = (10, 10, 10), (10, 10, 10 - D)$ ，

$(-10, 10, -10 + D), (-10, 10, -10)$ での W の値を比較すれば良いことがわかる。

例えば， $P_1 = P_2 = 10$ のとき， P_3 を変化させたときのコンプライアンスの変化を図に示す。制約条件より， P_3 の範囲は $P_1 - D \leq P_3 \leq P_1 + D$ なので，図から分かるように， P_3 の最悪値は， $D \leq 14$ のとき10， $D \geq 14$ のとき $10 - D$ である。

コンプライアンス W の上限値を100， $D = 10$ として，汎用最適化プログラムを用いて最適設計解を求めると，図3のようになった。ここで， $(A_1, A_2, A_3) = (170, 90, 60)$ であり，図3は，部材幅が断面積に比例するように描いている。また，最悪荷重は $P_1 = P_2 = P_3 = 10$ である。

5. 最悪変形を考慮した柔 な構造物の設計

建築骨組構造物の設計における基本的考え方は、「剛構造」と「柔構造」に分けられる。「剛構造」では、構造物は外力に対する変形が十分に小さくなるように、十分な剛性を持つように設計される。「柔構造」では、地震などの外乱に対して共振しないように柔に設計される。一方、膜構造物やケーブルネットなどの張力構造物は、外力作用時に大きく変形しても、仕上げ材などに影響がなく、外力除去時に変形が初期状態に戻れば、大変形を許容することができる。本節では、簡単のため、トラスモデルを用いて最悪の荷重パターンを考慮した設計法を解説する [2]。

漸近安定性の定義

荷重を除去したときに初期状態に戻るための条件は、初期状態の漸近安定性を用いて定式化できる。節点変位ベクトルを \mathbf{U} とし、変位ノルムを

$$S(\mathbf{U}) = (\mathbf{U}^T \mathbf{U})^{1/2}$$

で定義する。構造物の性能は、指定された変位ノルム $S(\mathbf{U}) = S^*$ の下でのひずみエネルギー $H(\mathbf{U})$ で定めることができる（ひずみエネルギーが大きいほうが性能が大きい）。また、ひずみエネルギーの勾配 $\text{grad } H(\mathbf{U})$ を用いて $G(\mathbf{U})$ を次式で定義する。

$$G(\mathbf{U}) = \mathbf{U}^T \text{grad } H(\mathbf{U})$$

変位のノルムが S^* 以下であるような許容な変形状態で $G(\mathbf{U}) > 0$ が成立するとき、 $\mathbf{U} = \mathbf{0}$ の無変形状態は漸近安定である。

最適設計問題

変位ノルムが S^* であるような変形状態での諸量の最悪値を $*$ で表すと、それらの量は設計変数ベクトル \mathbf{A} の関数である。例えば、ひずみエネルギーの最悪値（最小値）は $H^*(\mathbf{A})$ のように書ける。ひずみエネルギーを性能指標と考え、その最悪値に対する下限値を H^L とする。すなわち、変位のノルムが指定されたとき、ひずみエネルギーが最小になるような状態を最悪の変形状態とし、その状態で吸収できるひずみエネルギーが、指定された下限値以上となる設計を、許容な設計とする。

さらに、外力を開放したときに無変形状態に戻るために、変位ノルムが指定値以下の領域において、 $G(\mathbf{U}) > 0$ が成立しなければならない。したがって、最適設計問題を以下のように定義する。

$$\begin{array}{ll} \text{OPT} & \text{minimize} & F(\mathbf{A}) = \mathbf{L}^T \mathbf{A} \\ & \text{subject to} & H^*(\mathbf{A}) \geq H^L \\ & & G^*(\mathbf{A}) \geq 0 \end{array}$$

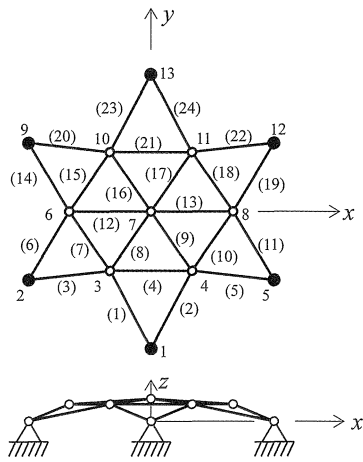


図4 24部材トラス

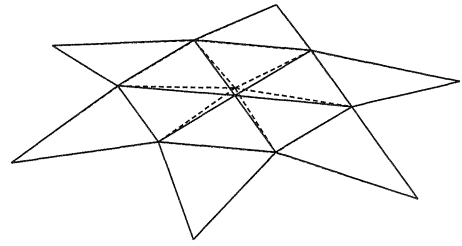


図5 最悪変形状態

ここで、 \mathbf{L} は部材長ベクトルである。この問題を解くために、以下のような2つの子問題(反最適化問題)を解く。

$$\begin{array}{ll} \text{S1} & \text{find} & H^*(\mathbf{A}) = \min H(\mathbf{U}; \mathbf{A}) \\ & \text{subject to} & S(\mathbf{U}) = S^* \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{S2} & \text{find} & G^*(\mathbf{U}) = \min G(\mathbf{U}; \mathbf{A})/S(\mathbf{U}) \\ & \text{subject to} & S(\mathbf{U}) \leq S^* \end{array}$$

ここで、 $G(\mathbf{U}; \mathbf{A})$, $H(\mathbf{U}; \mathbf{A})$ の変数は \mathbf{U} であり、 \mathbf{A} はパラメータである。

最適化の詳細は省略するが、例として、図4に示すような24部材トラスの最適化を行った。頂部の高さは821.6 mmであり、節点座標などの詳細は文献[3]を参照すること。

ひずみエネルギーの指定値を $1.0000 \times 10^6 \text{ N}\cdot\text{mm}$ とする。以下では、力と長さの単位はそれぞれ N, mm として省略する。図4において、頂点に接続する部材をグループ1、周方向部材をグループ2、支点に接続する部材をグループ3とし、それらの断面積を A_1, A_2, A_3 とする。

種々の変形ノルムの指定値 S^* に対する最適化の結果を表1に示す。ここで、 \mathbf{U}^I 及び \mathbf{U}^{II} は、それぞれ子問題 S1 及び S2 の最適解(最悪解)での \mathbf{U} の値である。表より、ひずみと変位ノルムに関する制約は等号で満たされていることが分かる。 S^* が 50, 180 のときには、 $G^*(\mathbf{A})$ は変位ノルムが最大になる状態で最小になっている。しかし、 $S^* = 100$ では、 $G^*(\mathbf{A})$ は領域内部で最小になっている。また、全部材体積は S^* の減少関数であり、 S^* が小さいときにはグループ1の断面積が相対的に大きくなっている。逆に、 S^* が大きいときにはグループ3の断面積が大きくなっている。

$S^* = 180$ のときの子問題 S1 の最悪変形状態を図5に実スケールで示す。ここで、点線は変形前の状態である。変形は対称であり、頂点の鉛直変位が大きい状態が最悪な変形であることが確認できる。

S^*	50.0	100.0	180.0
$F(\mathbf{A})$	3.5598×10^7	1.0905×10^7	5.2154×10^6
A_1	795.19	161.62	110.25
A_2	370.69	168.13	165.88
A_3	476.60	156.93	281.74
$H(\mathbf{U}^I)$	1.0000×10^6	1.0000×10^6	1.0000×10^6
$D(\mathbf{U}^I)$	49.978	99.956	179.92
$D(\mathbf{U}^{II})$	50.040	45.069	179.84
$G^*(\mathbf{A})$	5.6848×10^6	2.4705×10^6	13.121

表1 最適化の結果

漸近安定性について検証するため、大変形動的時刻歴解析を行った。各節点の鉛直方向に、ランダムに初速度を与え、初期の運動エネルギーがひずみエネルギーの指定値に一致するように

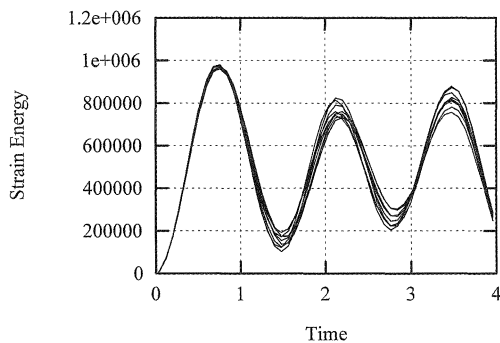


図6 ひずみエネルギーの履歴

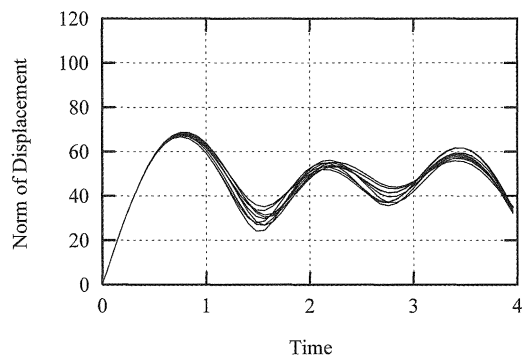


図7 変位ノルムの履歴

する。また、減衰は与えない。 $S^* = 100$ の場合について、ひずみエネルギーと変位ノルムの時刻歴の履歴をそれぞれ図6、7に示す。初速度ベクトルが最悪変形モードに一致していないため、これらの最大値は指定値に達していないが、ひずみエネルギーはほぼ指定値に達している。

6. おわりに

構造物の材料や作用する荷重のばらつきを考慮した設計法の一つとして、非確率的な手法を紹介した。構造物の性能を簡便にかつ正確に評価して、これまでの仕様設計から性能規定設計に移行するためには、安全率に依存した評価法から脱却して、パラメータのばらつきを考慮した評価法を確立することが望まれる。

参考文献

1. Elishakoff, R. T. Haftka, and J. Fang, Structural design under bounded uncertainty-optimization with anti-optimization, Computers & Structures, Vol. 53(6), pp. 1401-1405, 1994.
2. 加藤直樹, 大崎 純, 谷 明勲, 建築システム論, 造形ライブラリー 3, 共立出版, 2002.
3. M. Ohsaki, Optimum design of flexible structures under constraints on strain energy and asymptotic stability, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., Vol. 192, pp. 4487-4496, 2003.