数理解析研究所講究録 1396 巻 2004 年 1-8

不完全な量子テレポーテーションによる情報伝達について

柳 研二郎 (Kenjiro Yanagi)
山口大・工
(Department of Applied Science, Yamaguchi University)
碇 穂高 (Hodaka Ikari)
山口大・理工
(Graduate School of Science and Engineering, Yamaguchi University)

1 量子テレポーテーション

完全に縺れ合った 2 量子ビット状態である Bell 状態を用いた理想的な量子テレポーテーションを述べる．送信者 A (Alice と呼ぶ) が 1 量子ビットの未知の量子状態 $|\psi^A>$ を受信者 B (Bob と呼ぶ) に送らなければならないとする．一般に送信者 A の任意の 1 量子ビットの状態 $|\psi^A>$ は次の式で与えられる．

$$|\psi^A>=\alpha|0^A>+\beta|1^A>. \tag{1}$$

ここで α,β は規格化条件 $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$ を満たす複素数である．また状態ベクトル $|0^A>$ と $|1^A>$ は送信者 A の 2 次元 Hilbert 空間 $\mathcal{H}_2^A$ の基底ベクトルを表す．この 1 量子ビットの量子状態 $|\psi^A>$ を量子テレポーテーションによって送信者 A から受信者 B へ伝送するためには，その準備として送信者 A と受信者 B の間で完全に縺れ合った Bell 状態を前もって共有しておく必要がある．ここでは，次の式で与えられる Bell 状態 $|\Phi_+^{AB}>$ が受信者 A と送信者 B の間で前もって共有されていると仮定する．

$$|\Phi_+^{AB}>=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0^A>\otimes|0^B>+|1^A>\otimes|1^B>). \tag{2}$$

このとき送信者 A と受信者 B からなる全システムの量子状態は Hilbert 空間 $\mathcal{H}_2^A\otimes\mathcal{H}_2^A\otimes\mathcal{H}_2^B$ の規格化されたベクトル $|\psi^A>\otimes|\Phi_+^{AB}>$ で与えられる．(1) と (2) から簡単な計算によって，この全体の量子状態は次のように書き換えることができる．

$$\begin{aligned}
&|\psi^A>\otimes|\Phi_+^{AB}>\\
=\;&\frac{1}{2}|\Phi_+^{AA}>\otimes(\alpha|0^B>+\beta|1^B>)+\frac{1}{2}|\Phi_-^{AA}>\otimes(\alpha|0^B>-\beta|1^B>)\\
+\;&\frac{1}{2}|\Psi_+^{AA}>\otimes(\alpha|1^B>+\beta|0^B>)+\frac{1}{2}|\Psi_-^{AA}>\otimes(\alpha|1^B>-\beta|0^B>)
\end{aligned} \tag{3}$$

ただし，量子状態 $|\Phi_{\pm}^{AA}>$ と $|\Psi_{\pm}^{AA}>$ は次の式で与えられる Hilbert 空間 $\mathcal{H}_2^A \otimes \mathcal{H}_2^A$ の Bell 状態である．

$$|\Phi_{\pm}^{AA}>= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0^A> \otimes|0^A> \pm|1^A> \otimes|1^A>),$$

$$|\Psi_{\pm}^{AA}>= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0^A> \otimes|1^A> \pm|1^A> \otimes|0^A>).$$

これらの 4 つの Bell 状態は互いに直交し，4 次元 Hilbert 空間において完全系を張る．したがって送信者 A は適当な量子測定を行うことによって，自分が持っている 2 個の量子ビットの量子状態が 4 つの Bell 状態の内の何れであるかを誤り無く正確に知ることができる．このような 4 つの Bell 状態を区別する量子測定は Bell 測定と呼ばれる．(3) 式の各項の係数はすべて等しいので，送信者 A が Bell 状態を行った場合に得られる結果は全くランダムである．このため送信者 A は 4 つの Bell 状態 $|\Phi_+^{AA}>, |\Phi_-^{AA}>, |\Psi_+^{AA}>, |\Psi_-^{AA}>$ を等確率 $(P = \frac{1}{4})$ で得ることになる．送信者 A が Bell 測定を行った後の送信者 A と受信者 B からなる全システムの量子状態は，Bell 測定の結果に依存して次の 4 つの量子状態の何れかである．

$$|\Psi^{AAB}>= |\Phi_+^{AA}> \otimes(\alpha|0^B> +\beta|1^B>),$$
$$|\Psi^{AAB}>= |\Phi_-^{AA}> \otimes(\alpha|0^B> -\beta|1^B>),$$
$$|\Psi^{AAB}>= |\Psi_+^{AA}> \otimes(\alpha|1^B> +\beta|0^B>),$$
$$|\Psi^{AAB}>= |\Psi_-^{AA}> \otimes(\alpha|1^B> -\beta|0^B>).$$

次に送信者 A は Bell 測定によって 4 つの Bell 状態の内のどの Bell 状態が得られたかを受信者 B に古典通信によって知らせる．一方受信者 B は次の式で与えられる 4 つの unitary 変換を用意する．

$$U_B(\Phi_+) = |0^B><0^B| + |1^B><1^B|,$$
$$U_B(\Phi_-) = |0^B><0^B| - |1^B><1^B|,$$
$$U^B(\Psi_+) = |1^B><0^B| + |0^B><1^B|,$$
$$U^B(\Psi_-) = |0^B><1^B| - |1^B><0^B|.$$

そして送信者 A から 2 ビットの古典情報を受け取った受信者 B は受信した情報の内容に従って，以下のような 4 つの unitary 変換の中から 1 つを選んで受信者が保持している量子状態に作用させる．その結果は次のようになる．

$$|\Phi_+^{AA}> \Longrightarrow U^B(\Phi_+)(\alpha|0^B> +\beta|1^B>) = |\psi^B>,$$
$$|\Phi_-^{AA}> \Longrightarrow U^B(\Phi_-)(\alpha|0^B> -\beta|1^B>) = |\psi^B>,$$
$$|\Psi_+^{AA}> \Longrightarrow U^B(\Psi_+)(\alpha|1^B> +\beta|0^B>) = |\psi^B>,$$
$$|\Psi_-^{AA}> \Longrightarrow U^B(\Psi_-)(\alpha|1^B> -\beta|0^B>) = |\psi^B>.$$

送信者 A が行った Bell 測定の結果が何であろうと，受信者 B の最終的に得る量子状態は送信者 A が送ろうとした未知の量子状態 $|\psi^A>$ に他ならない．

2 不完全な量子テレポーテーション

送信者 A と受信者 B が不完全に縺れ合った量子状態を共有している場合に量子テレポーテーションを行ったとき, 量子ビットの状態がどの程度正確に送信者 A から受信者 B に伝えられるかを述べる. 送信者 A と受信者 B は Bell 状態 $|\Phi_+^{AB}>$ の代わりに次の式で与えられる不完全に縺れ合った量子状態 $|\Phi_u^{AB}>$ を共有していると仮定する.

$$|\Phi_u^{AB}> = \sqrt{1-u}|0^A> \otimes |0^B> + \sqrt{u}|1^A> \otimes |1^B>, (0 \le u \le 1)$$

送信者 A が送るべき未知の量子状態 $|\psi^A>$ が (1) で与えられたとき, 送信者 A と受信者 B からなる全系の量子状態 $|\psi^A> \otimes |\Phi_u^{AB}>$ は次のように表すことができる.

$$\begin{aligned}
& |\psi^A> \otimes |\Phi_u^{AB}> \\
= & \frac{1}{2}|\Phi_+^{AA}> \otimes (\alpha\sqrt{1-u}|0^B> + \beta\sqrt{u}|1^B>) \\
+ & \frac{1}{2}|\Phi_-^{AA}> \otimes (\alpha\sqrt{1-u}|0^B> - \beta\sqrt{u}|1^B>) \\
+ & \frac{1}{2}|\Psi_+^{AA}> \otimes (\alpha\sqrt{u}|1^B> + \beta\sqrt{1-u}|0^B>) \\
+ & \frac{1}{2}|\Psi_-^{AA}> \otimes (\alpha\sqrt{u}|1^B> - \beta\sqrt{1-u}|0^B>)
\end{aligned}$$

送信者 A は不完全に縺れ合った量子状態 $|\Phi_u^{AB}>$ にある 1 個の量子ビットと未知に量子状態 $|\psi^A>$ の量子ビットからなる 2 量子ビット系に対して Bell 測定を行う. このとき測定結果 $(\Phi_+, \Phi_-, \Psi_+, \Psi_-)$ が得られる確率とそれらの結果が得られた場合の受信者 B の量子状態はそれぞれ次のようになる. 確率

$$P(\Phi_\pm) = \frac{1}{2}\{|\alpha|^2(1-u) + |\beta|^2 u\}$$

で

$$|\phi^B(\Phi_\pm)> = \frac{\alpha\sqrt{1-u}|0^B> \pm \beta\sqrt{u}|1^B>}{\sqrt{|\alpha|^2(1-u) + |\beta|^2 u}}.$$

同様に確率

$$P(\Psi_\pm) = \frac{1}{2}\{|\alpha|^2 u + |\beta|^2(1-u)\}$$

で

$$|\phi^B(\Psi_\pm)> = \frac{\alpha\sqrt{u}|1^B> \pm \beta\sqrt{1-u}|0^B>}{\sqrt{|\alpha|^2 u + |\beta|^2(1-u)}}.$$

Bell 測定を行った後, 送信者 A は測定結果を受信者 B に古典通信を用いて知らせる. そして測定結果を受け取った受信者 B は自分が保持している量子ビットに対して適

当な unitary 変換を行うことによって, 確率 $P(\Phi)$ と $P(\Psi)=1-P(\Phi)$ で次のような量子状態 $|\phi^B(\Phi)>$ および $|\phi^B(\Psi)>$ を得る. 確率

$$P(\Phi)=|\alpha|^2(1-u)+|\beta|^2u$$

で

$$|\phi^B(\Phi)>=\frac{\alpha\sqrt{1-u}|0^B>+\beta\sqrt{u}|1^B>}{\sqrt{|\alpha|^2(1-u)+|\beta|^2u}}.$$

同様に確率

$$P(\Psi)=|\alpha|^2u+|\beta|^2(1-u)$$

で

$$|\phi^B(\Psi)>=\frac{\alpha\sqrt{u}|1^B>+\beta\sqrt{1-u}|0^B>}{\sqrt{|\alpha|^2u+|\beta|^2(1-u)}}.$$

受信者 B の量子状態 $|\phi^B(\Phi)>$ と $|\phi^B(\Psi)>$ は完全な量子テレポーテーションが行われた場合に受信者 B が受け取るはずであった量子状態 $|\psi^B>=\alpha|0^B>+\beta|1^B>$ と異なっている. 2つの量子状態がどの程度異なっているかは忠実度と呼ばれる量によって定量化される. 量子状態 $|\psi>$ と $|\phi>$ の忠実度は $F=|<\psi|\phi>|^2$ で与えられる. 2つの量子状態が一致していれば $F=1$ であり, 完全に異なって直交していれば $F=0$ である. 忠実度は大きければ大きいほど, 2つの量子状態が似ていることになる. 今考えている量子テレポーテーションの場合に, 送信者 A が送るべき未知の量子状態と実際に受信者 B が得た量子状態を計算すると次のようになる.

$$P(\Phi)=|<\psi^B|\phi(\Phi)>|^2=1-\frac{|\alpha|^2|\beta|^2(1-2\sqrt{u(1-u)})}{|\alpha|^2(1-u)+|\beta|^2u}$$

$$P(\Psi)=|<\psi^B|\phi(\Psi)>|^2=1-\frac{|\alpha|^2|\beta|^2(1-2\sqrt{u(1-u)})}{|\alpha|^2u+|\beta|^2(1-u)}$$

これらの忠実度の値は確率 $P(\Phi)$ と $P(\Psi)$ で達成される. したがって不完全に縺れ合った量子状態 $|\Phi_u^{AB}>$ を用いた量子テレポーテーションによって伝送された量子状態の平均忠実度 F は次の式で与えられる.

$$F=P(\Phi)F(\Phi)+P(\Psi)F(\Psi)=1-2|\alpha|^2|\beta|^2(1-2\sqrt{u(1-u)})$$

3 エントロピーの導入

この論文では受信者 B の量子状態 $|\phi^B(\Phi)>$ と $|\phi^B(\Psi)>$ は完全な量子テレポーテーションが行われた場合に受信者 B が受け取るはずであった量子状態 $|\psi^B>=\alpha|0^B>+\beta|1^B>$ と異なっている. 2つの量子状態がどの程度異なっているかを忠実度ではなく, 古典的エントロピー (Shannon entropy) で測ることにする. まず完全な量子テレポーテーションが行われた場合に受信者 B が受け取るはずであった量子状態

$$|\psi^B>=\alpha|0^B>+\beta|1^B>

のエントロピーを Shannon entropy を用いて表すと

$$S(A) = -|\alpha|^2 \log |\alpha|^2 - |\beta|^2 \log |\beta|^2$$

となる．一方，不完全な量子テレポーテーションが行われた場合に受信者 B が受け取る量子状態は次のように表される．詳しくは2章を見よ．確率

$$P(\Phi) = |\alpha|^2(1-u) + |\beta|^2 u$$

で

$$|\phi^B(\Phi)> = \frac{\alpha\sqrt{1-u}|0^B> + \beta\sqrt{u}|1^B>}{\sqrt{|\alpha|^2(1-u)+|\beta|^2 u}}.$$

同様に確率

$$P(\Psi) = |\alpha|^2 u + |\beta|^2(1-u)$$

で

$$|\phi^B(\Psi)> = \frac{\alpha\sqrt{u}|1^B> + \beta\sqrt{1-u}|0^B>}{\sqrt{|\alpha|^2 u+|\beta|^2(1-u)}}.$$

したがって確率 $P(\Phi) = |\alpha|^2(1-u) + |\beta|^2 u$ で $|\phi^B(\Phi)>$ の entropy $S(\Phi)$ は次のように表される．

$$\begin{aligned} S(\Phi) &= -\frac{|\alpha|^2(1-u)}{|\alpha|^2(1-u)+|\beta|^2 u}\log\frac{|\alpha|^2(1-u)}{|\alpha|^2(1-u)+|\beta|^2 u} \\ &\quad -\frac{|\beta|^2 u}{|\alpha|^2(1-u)+|\beta|^2 u}\log\frac{|\beta|^2 u}{|\alpha|^2(1-u)+|\beta|^2 u} \end{aligned}$$

同様に確率 $P(\Psi) = |\alpha|^2 u + |\beta|^2(1-u)$ で $|\phi^B(\Psi)>$ の entropy $S(\Psi)$ は次のように表される．

$$\begin{aligned} S(\Psi) &= -\frac{|\alpha|^2 u}{|\alpha|^2 u+|\beta|^2(1-u)}\log\frac{|\alpha|^2 u}{|\alpha|^2 u+|\beta|^2(1-u)} \\ &\quad -\frac{|\beta|^2(1-u)}{|\alpha|^2 u+|\beta|^2(1-u)}\log\frac{|\beta|^2(1-u)}{|\alpha|^2 u+|\beta|^2(1-u)} \end{aligned}$$

これより平均エントロピーは

$$S(B) = (|\alpha|^2(1-u) + |\beta|^2 u)S(\Phi) + (|\alpha|^2 u + |\beta|^2(1-u))S(\Psi)$$

になることがわかる．これを変形していくと次のようになる．

$$\begin{aligned} &S(B) \\ = &-|\alpha|^2(1-u)\log\frac{|\alpha|^2(1-u)}{|\alpha|^2(1-u)+|\beta|^2 u} - |\beta|^2 u\log\frac{|\beta|^2 u}{|\alpha|^2(1-u)+|\beta|^2 u} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -|\alpha|^2 u \log \frac{|\alpha|^2 u}{|\alpha|^2 u + |\beta|^2(1-u)} - |\beta|^2(1-u)\log\frac{|\beta|^2(1-u)}{|\alpha|^2 u + |\beta|^2(1-u)} \\
= & -|\alpha|^2(1-u)\log|\alpha|^2(1-u) + |\alpha|^2(1-u)\log\{|\alpha|^2(1-u)+|\beta|^2 u\} \\
& -|\beta|^2 u \log|\beta|^2 u + |\beta|^2 u\log\{|\alpha|^2(1-u)+|\beta|^2 u\} \\
& -|\alpha|^2 u\log|\alpha|^2 u + |\alpha|^2 u\log\{|\alpha|^2 u + |\beta|^2(1-u)\} \\
& -|\beta|^2(1-u)\log|\beta|^2(1-u) + |\beta|^2(1-u)\log\{|\alpha|^2 u + |\beta|^2(1-u)\} \\
= & -|\alpha|^2(1-u)\log|\alpha|^2 - |\alpha|^2(1-u)\log(1-u) + |\alpha|^2(1-u)\log\{|\alpha|^2(1-u)+|\beta|^2 u\} \\
& -|\beta|^2 u\log|\beta|^2 - |\beta|^2 u\log u + |\beta|^2 u\log\{|\alpha|^2(1-u)+|\beta|^2 u\} \\
& -|\alpha|^2 u\log|\alpha|^2 - |\alpha|^2 u\log u + |\alpha|^2 u\log\{|\alpha|^2 u+|\beta|^2(1-u)\} \\
& -|\beta|^2(1-u)\log|\beta|^2 - |\beta|^2(1-u)\log(1-u) + |\beta|^2(1-u)\log\{|\alpha|^2 u+|\beta|^2(1-u)\} \\
= & -|\alpha|^2\log|\alpha|^2 - (1-u)\log(1-u) - |\beta|^2\log|\beta|^2 - u\log u \\
& +|\alpha|^2\log\{|\alpha|^2(1-u)+|\beta|^2 u\} - (|\alpha|^2-|\beta|^2)u\log\{|\alpha|^2(1-u)+|\beta|^2 u\} \\
& +|\beta|^2\log\{|\alpha|^2 u+|\beta|^2(1-u)\} + (|\alpha|^2-|\beta|^2)u\log\{|\alpha|^2 u+|\beta|^2(1-u)\} \\
= & \; S(A) - u\log u - (1-u)\log(1-u) \\
& +\{|\alpha|^2(1-u)+|\beta|^2 u\}\log\{|\alpha|^2(1-u)+|\beta|^2 u\} \\
& +\{|\alpha|^2 u+|\beta|^2(1-u)\}\log\{|\alpha|^2 u+|\beta|^2(1-u)\}
\end{aligned}
$$

ここで平均相対エントロピーを導入すると次のようになる.

$$
\begin{aligned}
S(B\|A) = & \; P(\Phi)S(P_\Phi\|P) + P(\Psi)S(P_\Psi\|P) \\
= & \; (|\alpha|^2(1-u)+|\beta|^2 u)S(P_\Phi\|P) + (|\alpha|^2 u+|\beta|^2(1-u))S(P_\Psi\|P) \\
= & \; |\alpha|^2(1-u)\log\frac{1-u}{|\alpha|^2(1-u)+|\beta|^2 u} + |\beta|^2 u\log\frac{u}{|\alpha|^2(1-u)+|\beta|^2 u} \\
& +|\alpha|^2 u\log\frac{u}{|\alpha|^2 u+|\beta|^2(1-u)} + |\beta|^2(1-u)\log\frac{1-u}{|\alpha|^2 u+|\beta|^2(1-u)} \\
= & \; |\alpha|^2(1-u)\log(1-u) - |\alpha|^2(1-u)\log\{|\alpha|^2(1-u)+|\beta|^2 u\} \\
& +|\beta|^2 u\log u - |\beta|^2 u\log\{|\alpha|^2(1-u)+|\beta|^2 u\} \\
& +|\alpha|^2 u\log u - |\alpha|^2 u\log\{|\alpha|^2 u+|\beta|^2(1-u)\} \\
& +|\beta|^2(1-u)\log(1-u) - |\beta|^2(1-u)\log\{|\alpha|^2 u+|\beta|^2(1-u)\} \\
= & -|\alpha|^2\{-u\log u-(1-u)\log(1-u)\} - |\beta|^2\{-u\log u-(1-u)\log(1-u)\} \\
& -\{|\alpha|^2(1-u)+|\beta|^2 u\}\log\{|\alpha|^2(1-u)+|\beta|^2 u\} \\
& -\{|\alpha|^2 u+|\beta|^2(1-u)\}\log\{|\alpha|^2 u+|\beta|^2(1-u)\} \\
= & \; u\log u + (1-u)\log(1-u) \\
& -\{|\alpha|^2(1-u)+|\beta|^2 u\}\log\{|\alpha|^2(1-u)+|\beta|^2 u\} \\
& -\{|\alpha|^2 u+|\beta|^2(1-u)\}\log\{|\alpha|^2 u+|\beta|^2(1-u)\}
\end{aligned}
$$

したがって

$$
S(A) = S(B) + S(B\|A)
$$

4 考察

この章では数学的構造について述べる.

Proposition 1 $Q_j = (q_{1j}, q_{2j}, \ldots, q_{nj}), (j = 1, 2, \ldots, N)$ を N 個の n 次確率ベクトルとする. このとき $\sum_{j=1}^{N} \lambda_j = 1$ なる $\lambda_j \geq 0 (1 \leq j \leq N)$ に対して

$$S(\sum_{j=1}^{N} \lambda_j Q_j) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j S(Q_j) + \sum_{j=1}^{N} \lambda_j S(Q_j \| \sum_{k=1}^{N} \lambda_k Q_k)$$

が成立する.

Proof.

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{N} \lambda_j S(Q_j \| \sum_{k=1}^{N} \lambda_k Q_k) \\
= \ & \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \sum_{i=1}^{n} q_{ij} \{\log q_{ij} - \log \sum_{k=1}^{N} \lambda_k q_{ik}\} \\
= \ & -\sum_{j=1}^{N} \lambda_j S(Q_j) - \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \sum_{i=1}^{n} q_{ij} \log \sum_{k=1}^{N} \lambda_k q_{ik} \\
= \ & -\sum_{j=1}^{N} \lambda_j S(Q_j) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{N} \lambda_j q_{ij} \log \sum_{k=1}^{N} \lambda_k q_{ik} \\
= \ & -\sum_{j=1}^{N} \lambda_j S(Q_j) + S(\sum_{j=1}^{N} \lambda_j Q_j).
\end{aligned}$$

Remark 1 *Proposition 1* は密度作用素 $\rho_j (1 \leq j \leq N)$ と $\sum_{j=1}^{N} \lambda_j = 1$ なる $\lambda_j \geq 0 (1 \leq j \leq N)$ に対して

$$S(\sum_{j=1}^{N} \lambda_j \rho_j) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j S(\rho_j) + \sum_{j=1}^{N} \lambda_j S(\rho_j \| \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \rho_k)$$

が成立することもわかる. ただし $S(\rho) = -Tr[\rho \log \rho]$ は *von Neumann entropy*, $S(\phi \| \psi) = Tr[\phi(\log \phi - \log \psi)]$ は *relative entropy* である. 前章の $S(A) = S(B) + S(A \| B)$ はちょうど数学的構造が *Proposition 1* と同様であることがわかる.

References

[1] C.H.Bennett, G.Brassard, C.Crepeau, R.Jozsa, A.Peres and W.K.Wootters, Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels, Phys. Rev. Lett. 70(1993), 1895-1899.

[2] C.H.Bennet, G.Brassard, S.Popescu, R.Schumacher, J.A.Smolin and W.K.Wootters, Purification of noisy entanglement and faithful teleportation via noisy channels, Phys. Rev. Lett. 76(1996), 722-725.

[3] K.Inoue, M.Ohya and H.Suyari, Characterization of quantum teleportation processes by nonlinear quantum channel and quantum mutual entropy, Physica D, 120(1998), 117-124.