数理解析研究所講究録 1396 巻 2004 年 157-162

Huaの不等式に関するPearce-Pečarićの論文への注意

信州大学 理学部　高木　啓行　(Hiroyuki Takagi)
Department of Mathematical Sciences, Faculty of Science, Shinshu University
山形大学 工学部　三浦　毅　(Takeshi Miura)
山形大学 工学部　髙橋　眞映　(Sin-Ei Takahasi)
Department of Basic Technology, Applied Mathematics and Physics, Yamagata University

[4] で, C. Pecaric と J. Pečarić は, Huaの不等式に関連した不等式を 2つ示した.

Pearce-Pečarićの不等式 A ([4, Theorem 2.1]). f を, 区間 $[0,\infty)$ 上の非減少凸関数とする. このとき, 任意の $\alpha>0$, δ, $z_1,\cdots,z_n$, $w_1,\cdots,w_n\in\mathbb{C}$ に対して,

$$f\Big(\Big|\delta-\sum_{i=1}^n z_iw_i\Big|\Big)+\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^n|w_i|f(\alpha|z_i|)\geq\frac{\alpha+\sum_{i=1}^n|w_i|}{\alpha}f\Bigg(\frac{\alpha|\delta|}{\alpha+\sum_{i=1}^n|w_i|}\Bigg)$$

が成り立つ.

Pearce-Pečarićの不等式 B ([4, Theorem 2.2]). 任意の $\alpha>0$, $a_1,\cdots,a_n\in\mathbb{R}$, δ, $z_1,\cdots,z_n\in\mathbb{C}$ に対して,

$$\Big|\delta-\sum_{i=1}^n a_iz_i\Big|^2+\frac{\alpha}{2}\Big(\sum_{i=1}^n|z_i|^2+\Big|\sum_{i=1}^n z_i\Big|^2\Big)\geq\frac{\alpha|\delta|^2}{\alpha+\sum_{i=1}^n a_i^2}\tag{1}$$

が成り立つ.

ここでは, [5] で用いた論点から, これらの不等式をみてみたい. 実際, 不等式Aについては, 設定をノルム空間に一般化する. 不等式Bについては, 誤りのあることを指摘し, 正しい不等式をみちびく.

§1. われわれの不等式

1965年, L. Huaは, 数論の研究の中で次の不等式を用いた.

Huaの不等式 ([3]). 任意の $\delta,\alpha>0$, $x_1,\cdots,x_n\in\mathbb{R}$ に対して,

$$\Big(\delta-\sum_{i=1}^n x_i\Big)^2+\alpha\sum_{i=1}^n x_i^2\geq\frac{\alpha\delta^2}{n+\alpha}$$

が成り立つ.

この不等式は, 次の数学者たちによって, さまざまな形で一般化された.

C.-L. Wang (J. Math. Anal. Appl., **166** (1992), 345–350.)

C.E.M. Pearce and J.E. Pečarić (J. Math. Anal. Appl., **188** (1994), 700–702.)

S.S. Dragomir and G.-S. Yang (Tamkang J. Math., **27** (1996), 227–232.)

J.E. Pečarić (Tamkang J. Math. **33** (2002), 265–268.)

彼らの結果は, ひとつの論法で証明できることを, 講演者たちはつきとめた. その詳細は [5] に述べたが, ここに簡単に再録しよう.

われわれの不等式 ([5, Corollary 2]). $(G,+)$ を半群とし, φ, ψ を, G 上の非負値関数で, 次の2条件をみたすものとする.

- φ は 劣加法的である (つまり, $\varphi(x+y) \leq \varphi(x)+\varphi(y)$ $(x, y \in G)$).
- ある正の定数 λ について, $\varphi(x) \leq \lambda\psi(x)$ $(x \in G)$ が成り立つ.

また, f を $[0,\infty)$ 上の非減少凸関数とする. このとき, 任意の $a, b \in G$ に対して,

$$f(\varphi(a)) + \lambda f(\psi(b)) \geq (1+\lambda) f\left(\frac{\varphi(a+b)}{1+\lambda}\right) \tag{2}$$

が成り立つ.

証明は いたって簡単である.

証明. φ, ψ についての仮定より,

$$\varphi(a+b) \leq \varphi(a)+\varphi(b) \leq \varphi(a)+\lambda\psi(b)$$

がいえる. よって, f が 非減少 かつ 凸であることを用いて,

$$f\left(\frac{\varphi(a+b)}{1+\lambda}\right) \leq f\left(\frac{\varphi(a)+\lambda\psi(b)}{1+\lambda}\right) \leq \frac{f(\varphi(a))+\lambda f(\psi(b))}{1+\lambda}$$

となる. この両端辺に $1+\lambda$ をかければ, (2) になる. □

証明のポイントは 次の2点である.

- φ, ψ に関する不等式 (汎関数の不等式)
- f が凸関数であること (凸関数の定義＝Jensen の不等式)

Hua の不等式を一般化したものの多くは, この2点に着目することで 証明できる. 定理 A, B を この2点に着目してみたら, どういうことが わかるだろうか? それを考えていこう.

§2. Pearce-Pečarić の不等式 A について

Pearce-Pečarić の不等式 A は, 次のように一般化できる.

定理 1. X を ノルム空間とする. また, f を $[0,\infty)$ 上の非減少凸関数とする. このとき, 任意の $\alpha > 0$, $\delta \in \mathbb{C}$, $x_1, \cdots, x_n \in X$, $h_1, \cdots, h_n \in X^*$ (X の共役空間) に対して,

$$f\left(\left|\delta - \sum_{i=1}^{n} h_i(x_i)\right|\right) + \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}\|h_i\| f(\alpha\|x_i\|) \geq \frac{\alpha + \sum_{i=1}^{n}\|h_i\|}{\alpha} f\left(\frac{\alpha|\delta|}{\alpha + \sum_{i=1}^{n}\|h_i\|}\right) \tag{3}$$

が成り立つ.

§1 の論法で 証明する (われわれの不等式を 直接用いる証明も 可能である).

証明. 三角不等式と よく知られた汎関数の不等式より,

$$\begin{aligned} |\delta| = \left|\left(\delta - \sum_{i=1}^{n} h_i(x_i)\right) + \sum_{i=1}^{n} h_i(x_i)\right| &\leq \left|\delta - \sum_{i=1}^{n} h_i(x_i)\right| + \sum_{i=1}^{n} |h_i(x_i)| \\ &\leq \left|\delta - \sum_{i=1}^{n} h_i(x_i)\right| + \sum_{i=1}^{n} \|h_i\|\,\|x_i\| \end{aligned}$$

がいえる. よって, fが 非減少 かつ 凸であることを用いて,

$$f\left(\frac{\alpha|\delta|}{\alpha+\sum_{i=1}^{n}\|h_i\|}\right) \leq f\left(\frac{\alpha\left|\delta-\sum_{i=1}^{n}h_i(x_i)\right|+\sum_{i=1}^{n}\|h_i\|\big(\alpha\|x_i\|\big)}{\alpha+\sum_{i=1}^{n}\|h_i\|}\right) \leq \frac{\alpha f\left(\left|\delta-\sum_{i=1}^{n}h_i(x_i)\right|\right)+\sum_{i=1}^{n}\|h_i\|\,f\big(\alpha\|x_i\|\big)}{\alpha+\sum_{i=1}^{n}\|h_i\|}$$

となる. この両端辺に $\frac{\alpha+\sum_{i=1}^{n}\|h_i\|}{\alpha}$ をかければ, (3) になる. □

定理1において, $X=\mathbb{C}$の場合を考えよう. 各$i=1,\cdots,n$について, $w_i\in\mathbb{C}$とし, $h_i\in\mathbb{C}^*$を $h_i(z)=w_iz$ $(z\in\mathbb{C})$ と定める. このとき, $\|h_i\|=|w_i|$ $(i=1,\cdots,n)$ である. そこで, この h_iと $x_i=z_i\in\mathbb{C}$ $(i=1,\cdots,n)$ を 定理1に あてはめると, Pearce-Pečarićの不等式Aが即座に得られる.

§3. Pearce-Pečarićの不等式Bについて

Pearce-Pečarićの不等式Bによく似た不等式を, S. Dragomir が示している.

Dragomirの不等式 ([1, Theorem 2]). 任意の $\alpha>0$, δ, $a_1,\cdots,a_n$, $z_1,\cdots,z_n\in\mathbb{C}$ に対して,

$$\left|\delta-\sum_{i=1}^{n}a_iz_i\right|^2+\alpha\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2 \geq \frac{\alpha\,|\delta|^2}{\alpha+\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2} \tag{4}$$

が成り立つ.

この不等式は, [1] で証明されているが, §1の方法で 証明することもできるし, 定理1から みちびくこともできる.

Pearce-Pečarićの不等式B (1) と Dragomirの不等式 (4) は, 左辺の第2項だけが異なっていて, $n\geq 2$のとき, それらは 明らかに差異がある. 不等式 (4) は いろいろな方法で証明されているので, 不等式 (1) が あやしく思えてくる. 実際, (1) において, $n\geq 2$とし,

$$\alpha=1,\quad \delta=4,\quad a_1=2,\, a_2=\cdots=a_n=0,\quad z_1=2,\, z_2=-1,\, z_3=\cdots=z_n=0$$

とおくと,

$$\left|\delta-\sum_{i=1}^{n}a_iz_i\right|^2+\frac{\alpha}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2+\left|\sum_{i=1}^{n}z_i\right|^2\right)=3<\frac{16}{5}=\frac{\alpha|\delta|^2}{\alpha+\sum_{i=1}^{n}a_i^2}$$

となって, (1) が成り立たない. よって,

Pearce-Pečarićの不等式Bは 正しくない!!

原論文 [4] では, (1) の証明で 次の不等式を引用している.

引用不等式 (cf. [4, Proposition 2.1]). 任意の $a_1,\cdots,a_n\in\mathbb{R}$, $z_1,\cdots,z_n\in\mathbb{C}$ に対して,

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_iz_i\right|^2 \leq \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2+\left|\sum_{i=1}^{n}z_i\right|^2\right) \tag{5}$$

が成り立つ.

この不等式の出所はよくわからないが, $a_1,\cdots,a_n \in \mathbb{C}$ $((a_1,\cdots,a_n) \neq (0,\cdots,0))$ に対して,

(6) (1) が成立 for $^\forall\alpha > 0,\ \delta,\ z_1,\cdots,z_n \in \mathbb{C} \iff$ (5) が成立 for $^\forall z_1,\cdots,z_n \in \mathbb{C}$

がいえる. 実際, "(1) $\Leftarrow$ (5)" は, [4] の (1) の証明 (この部分は正しい) のとおり, 証明ができる. "(1) $\Rightarrow$ (5)" を示すには, (1) において, $\delta = \sum_{i=1}^{n} a_i z_i$ とし, $\alpha \to 0$ とすればいい. こうして, 同値性 (6) が示せた. (1) は正しくないのだから, 結果として, (5) も正しくない. 論文 [4] の証明のミスは, (5) を引用したところにあった.

さて, 不等式 (1) は正しくないが, すべての $\alpha > 0,\ \delta,\ a_1,\cdots,a_n,\ z_1,\cdots,z_n \in \mathbb{C}$ に対して,

$$(1)' \qquad \left|\delta - \sum_{i=1}^{n} a_i z_i\right|^2 + \frac{\alpha}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2 + \left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right|^2\right) \geq \frac{\alpha|\delta|^2}{\alpha + \sum_{i=1}^{n}|a_i|^2}$$

が成り立たないわけではない. そこで, すべての $\alpha > 0,\ \delta,\ z_1,\cdots,z_n \in \mathbb{C}$ に対して (1)$'$ が成り立つような $(a_1,\cdots,a_n) \in \mathbb{C}^n$ 全体の集合 A_n を考えてみよう. 面倒なので, $n = 2$ の場合を考える. この場合, (1)$'$ は,

$$(7) \qquad \left|\delta - (a_1z_1 + a_2z_2)\right|^2 + \frac{\alpha}{2}\left(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_1+z_2|^2\right) \geq \frac{\alpha|\delta|^2}{\alpha + |a_1|^2 + |a_2|^2}$$

となり,

$$A_2 = \left\{(a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2 : (7)\ \text{が成立 for}\ ^\forall\alpha > 0,\ \delta,\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}\right\}$$

である. A_2 は, 具体的には 次のようになり, $\mathbb{R}^2$ 全体を覆わない.

$$(8) \qquad A_2 = \left\{(a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2 : |a_1|^2 + |a_2|^2 \leq 4\,\mathrm{Re}\,(\overline{a}_1 a_2)\right\}.$$

(8) の証明. (6)より, $(a_1, a_2) \in A_2$ であるための必要十分条件は, すべての $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ に対して,

$$|a_1z_1 + a_2z_2| \leq \frac{1}{2}\left(|a_1|^2 + |a_1|^2\right)\left(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_1+z_2|^2\right)$$

が成り立つことである. この不等式を 整理すると,

$$(9) \qquad |a_2|^2|z_1|^2 + \mathrm{Re}\left(\left(|a_1|^2 + |a_2|^2 - 2a_1\overline{a}_2\right) z_1\overline{z}_2\right) + |a_1|^2|z_2|^2 \ \geq\ 0$$

となる. $a_2 \neq 0$ の場合, (9) は, 左辺を 平方完成して,

$$|a_2|^2\left|z_1 + \frac{|a_1|^2 + |a_2|^2 - 2a_1\overline{a}_2}{2\,|a_2|} z_2\right|^2 - \frac{\left(|a_1|^2 + |a_2|^2\right)\left(|a_1|^2 + |a_2|^2 - 4\mathrm{Re}\,(a_1\overline{a}_2)\right)}{4\,|a_2|^2}|z_2|^2 \geq 0$$

となる. この不等式が, すべての $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ に対して成り立つための必要十分条件は,

$$(10) \qquad |a_1|^2 + |a_2|^2 \leq 4\,\mathrm{Re}\,(a_1\overline{a}_2)$$

である. 一方, $a_2 = 0$ の場合, (9) は, $\mathrm{Re}\left(|a_1|^2 z_1\overline{z}_2\right) + |a_1|^2|z_2|^2 \geq 0$ となり, この不等式が, すべての $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ に対して成り立つための必要十分条件は, $a_1 = 0$ である. また, (10) は, $|a_1|^2 \leq 0$ となり, これも $a_1 = 0$ と同値である. こうして,

$$(a_1, a_2) \in A_2 \iff |a_1|^2 + |a_2|^2 \leq 4\,\mathrm{Re}\,(a_1\overline{a}_2)$$

が示せた. □

§4. Pearce-Pečarić の不等式 B の修正

Pearce-Pečarić の不等式 B を 修正することにしよう. §1 の論法を用いると, 次の不等式が示せる.

定理 2. X を ノルム空間とする．また，$p,q>1$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ とする．このとき，任意の $\alpha>0$, $\delta\in\mathbb{C}$, $x\in X$, $g,h\in X^*$ (X の共役空間) ($g\neq 0$) に対して，

$$(11)\quad \left|\delta-g(x)\right|^p+\alpha\left(\|g-h\|\,\|x\|^p+|h(x)|^p\right)\geq\frac{|\delta|^p}{\left(1+\alpha^{1-q}(1+\|g-h\|)\right)^{p-1}}$$

が成り立つ．

証明. $\alpha>0$, $\delta\in\mathbb{C}$, $x\in X$, $g,h\in X^*$ ($g\neq 0$) とする．すべての $z\in X$ について，

$$|g(z)|\leq|g(z)-h(z)|+|h(z)|\leq\|g-h\|\,\|z\|+|h(z)|$$

だから，関数 $f(t)=t^p$ が 非減少 かつ 凸であることを使って，

$$|g(z)|^p\leq\left(1+\|g-h\|\right)^p\left(\frac{\|g-h\|\,\|z\|+|h(z)|}{1+\|g-h\|}\right)^p\leq\left(1+\|g-h\|\right)^p\frac{\|g-h\|\,\|z\|^p+|h(z)|^p}{1+\|g-h\|}$$

つまり，

$$(12)\qquad |g(z)|\leq\alpha^{1-q}\left(1+\|g-h\|\right)\left(\frac{\alpha^q}{1+\|g-h\|}\left(\|g-h\|\,\|z\|^p+|h(z)|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}}$$

となる．

そこで，$G=X$ とし，G 上の非負値関数 φ, ψ を，

$$\varphi(z)=|g(z)|,\quad \psi(z)=\left(\frac{\alpha^q}{1+\|g-h\|}\left(\|g-h\|\,\|z\|^p+|h(z)|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}}\quad(z\in G)$$

と定義する．すると，明らかに φは 劣加法的である．また，

$$\lambda=\alpha^{1-q}\left(1+\|g-h\|\right)$$

とおくと，(12) より，$\varphi(z)\leq\lambda\psi(z)$ $(z\in G)$ が成り立つ．つぎに，$[0,\infty)$ 上の非減少凸関数 fを，$f(t)=t^p$ ととる．さらに，$g\neq 0$を用いて，$g(y)=\delta$ となる $y\in X=G$をえらび，$a=y-x$, $b=x$ とおいて，§1 の われわれの不等式に あてはめると，不等式

$$\left|g(y)-g(x)\right|^p+\alpha\left(\|g-h\|\,\|x\|^p+|h(x)|^p\right)\geq\frac{|g(y)|^p}{\left(1+\alpha^{1-q}(1+\|g-h\|)\right)^{p-1}}.$$

が得られる．この式は (11) にほかならない． □

定理 2 において，Xを n 次元複素 Euclid 空間 $\mathbb{C}^n$ とし，$p=q=2$ とする．また，αを $\frac{\alpha}{2}$ におきかえ，$x=(z_1,\cdots,z_n)\in X=\mathbb{C}^n$ とする．さらに，$a_1,\cdots,a_n\in\mathbb{C}$ をとり，$g,h\in X^*=(\mathbb{C}^n)^*$ を，

$$g(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^n a_ix_i,\quad h(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^n x_i\quad((x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{C}^n)$$

と定める．このとき，$\|g-h\|=\sqrt{\sum_{i=1}^n|a_i-1|^2}$ であることに留意して，定理 2 を適用すると，次の系が得られる．

系. 任意の $\alpha>0$, $\delta, a_1,\ldots,a_n, z_1,\ldots,z_n\in\mathbb{C}$ ($(a_1,\ldots,a_n)\neq(0,\ldots,0)$) に対して，$\kappa=\sqrt{\sum_{i=1}^n|a_i-1|^2}$ とおくと，

$$\left|\delta-\sum_{i=1}^n a_iz_i\right|^2+\frac{\alpha}{2}\left(\kappa\sum_{i=1}^n|z_i|^2+\left|\sum_{i=1}^n z_i\right|^2\right)\geq\frac{\alpha|\delta|^2}{\alpha+2(1+\kappa)}$$

が成り立つ．

この系は, Pearce-Pečarić の不等式 B の修正版になっている.

付記：ここでは, 煩雑さをさけるため, 不等式の等号成立条件を述べなかった. この講演の内容は, 等号成立条件などの補足事項を含め, 近いうちに別の形で発表する予定である.

最後に：古田 孝之先生は, 私どもの拙い講演を盛り上げてくださいました. また, 藤井 正俊先生は, 暖かいお言葉をくださり, 文献 [2] を 教えてくれました. おふた方の心遣いは, 私どものはかりしれない激励になりました. 感謝いたします.

参考文献

[1] S.S.Dragomir, *Hua's inequality for complex numbers*, Tamkang J.Math., **26** (1995), 257–260.

[2] J.I. Fujii, *Operator inequalities for Schwarz and Hua*, Sci. Math. Jpn. **2** (1999), 263–268.

[3] L.K. Hua, *Additive theory of prime numbers* (Translated by N.B. Ng) in Translations of Math. Monographs, **13**, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1965.

[4] C.E.M.Pearce and J.E.Pečarić, *On Hua's inequality for complex numbers*, Tamkang J.Math., **28** (1997), 193–199.

[5] H. Takagi, T. Miura, T. Kanzo and S.-E. Takahasi, *A reconsideration of Hua's inequality*, *submitted*.