数理解析研究所講究録 1398 巻 2004 年 40-81



# 関数体上のLanglands予想について

東京大学大学院数理科学研究科博士課程 1 年　三枝 洋一 (Yoichi Mieda)
Graduate School of Mathematical Sciences,
The University of Tokyo

## 0 はじめに

本稿の目標は，Lafforgue によってなされた関数体上の Langlands 予想の証明を解説することである．直接関係のある論文 [Laf1], [Laf2], [Laf3] だけで 600 ページ近くあることから分かるように，Lafforgue の証明はかなり大規模なものであり，そのすべてを数十ページの講究録で完全に扱うのはもちろん不可能である．その一方で，[Laf4] や [Lau] など，証明の全体的な流れを概観した優れた解説は既に存在する．そこで本稿では，Lafforgue の証明のうち Lefschetz 跡公式の部分のみに焦点を当て，詳細な解説を行うことにした．証明の数あるステップのうち Lefschetz 跡公式を選んだのは，筆者が比較的詳しいこともあるが，

- Langlands 予想に関わる論文ではほとんど見られない議論が行われており，Lafforgue の独自性が発揮されていると思われる
- Lafforgue の仕事の解説を行った文献において（筆者の知る限り）まだ扱われていない

などの理由によるものである．

このようにテーマを狭く絞り込んだため，Lefschetz 跡公式以外の部分についての扱いはかなり軽いものにせざるを得なかった．特に shtuka のレベル構造・Hecke 対応の定義やモジュライスタック $\mathrm{Cht}_N^r$ の性質を始めとする基本的な事柄，コンパクト化の構成やその境界の記述などの興味深いトピックに全く触れられなかったのは心残りである．また，解説記事としては触れるべきであろう，関数体の Langlands 予想の解決にいたるまでの歴史も紙数の関係で割愛した．これらについては [Laf4], [Lau] などの解説記事などを参照されたい．

最後に，本稿の全体的な構成について簡単に述べておく．まず第 1 節では，Langlands 予想の正確な主張を述べ，非常に大雑把な証明のあらすじを紹介する．第 2 節では，shtuka とそのモジュライスタックについて必要最低限の説明を行う．第 3 節は Lefschetz 跡公式の概説に充てられている．Lefschetz 跡公式は数論幾何において極めて重要な位置を占めるものだと思われるが，そのまとまった解説記事はあまりないようである．そのため第 3 節では，Lefschetz-Verdier 跡公式および Deligne 予想について細かい解説を行い，可能な限り証明をつけることにした．第 4 節では，Lafforgue による Lefschetz 跡公式について証明付きで詳しく述べる．最後に，第 5 節では，第 4 節の内容をいかにして shtuka のモジュライスタックのコホモロジーの計算に応用するかを概観する．

**謝辞**　筆者に講演および講究録執筆の機会を与えてくださった渡部隆夫氏（阪大理），ならびに筆者を推薦してくださった織田孝幸氏（東大数理）に深く感謝する．また，伊藤哲史氏（京大理）には，本原稿について多くの有益なコメントをいただいた．ここに感謝の意を捧げる．

**記号** $\mathbb{F}_q$ を有限体とし，$\ell$ を $q$ を割らない素数とする．$C$ を $\mathbb{F}_q$ 上 proper smooth かつ幾何学的に連結な曲線とし，$F$ を $C$ の関数体とする．$\overline{F}$ を $F$ の分離閉包，$G_F = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ を $F$ の絶対 Galois 群とする．また，$F$ の素点 $x \in |C|$ に対し，$F_x$ を $F$ の $x$ における完備化とし，その整数環を $\mathcal{O}_x$，剰余体を $\kappa_x$ と書く．$\kappa_x$ の $\mathbb{F}_q$ 上の拡大次数を $x$ の次数と呼び，$\deg x$ と書く．

$\mathbb{A}_F$ を $F$ のアデール環とし，$\mathcal{O}_{\mathbb{A}_F} = \prod_{x\in|C|} \mathcal{O}_x$ をその整数環とする．$a = (a_x)_{x\in|C|} \in \mathbb{A}$ に対し，$\deg a = \sum_{x\in|C|} \deg x \cdot v_x(a_x)$ とおく（これは本質的には有限和である）．ただし，$v_x$ は $\mathcal{O}_x$ の正規化された離散付値とする．

コホモロジーといえば常に $\ell$ 進エタールコホモロジーを指すものとする．

# 1 Langlands 予想とは

よく知られているように，Langlands 予想とは $G_F$ の $r$ 次元 $\ell$ 進表現と $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_F)$ の保型表現が対応するであろうという予想である．ここではまず両者の設定を明確にし，Langlands 予想を定式化する．

## 1.1 ガロア表現

$r \geq 1$ に対し，$\mathcal{G}_\ell^r(F)$ を $G_F$ の連続な既約 $r$ 次元 $\ell$ 進表現 $\sigma\colon G_F \longrightarrow \mathrm{GL}_r(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ で，条件

- 有限個の素点を除いて不分岐である
- $\det\sigma$ が有限位数，すなわちある $n \neq 0$ に対して $(\det\sigma)^{\otimes n}$ が自明な指標となる

を満たすものの同型類の集合とする．

$\sigma \in \mathcal{G}_\ell^r(F)$ はある開集合 $V \subset C$ 上の smooth な $\ell$ 進層，あるいは $C$ 上の構成可能な $\ell$ 進層とみなすことができる．

**定義 1.1**

$x \in |C|$ に対し，$F$ 上の埋め込み $\overline{F} \longrightarrow \overline{F}_x$ を 1 つ固定し，$\mathrm{Gal}(\overline{F}_x/F_x) \subset G_F$ とみなす．$\sigma$ の $\mathrm{Gal}(\overline{F}_x/F_x)$ への制限を $\sigma_x$ とする．また，$x$ における惰性群を $I_x$ と書く．このとき，$\sigma$ の $x$ における局所 $L$ 因子を，

$$L_x(\sigma_x, Z) = \frac{1}{\det\left(\mathrm{Id} - \mathrm{Frob}_x \cdot Z^{\deg x}; \sigma^{I_x}\right)}$$

と定める．ただし，$\mathrm{Frob}_x$ は $x$ における幾何的 Frobenius 元である．これは上で固定した埋め込みによらない．また，$\sigma$ の大域的 $L$ 関数を

$$L(\sigma, Z) = \prod_{x\in|C|} L_x(\sigma_x, Z)$$

と定める．

**注意 1.2**

$L(\sigma, Z)$ は $Z$ の有理式であり，関数等式をもつことが $\ell$ 進コホモロジーの一般論を用いることにより証明される（合同ゼータ関数の有理性，関数等式の証明と全く同じである）．

$x \in V$ のときは，$\sigma_x$ の $I_x$ の制限は自明なので，$\sigma_x(\mathrm{Frob}_x)$ の固有値を $z_1(\sigma_x), \ldots, z_r(\sigma_x)$ と書くと，次が成立する：

$$L_x(\sigma_x, Z) = \prod_{1 \le i \le r} \frac{1}{1 - z_i(\sigma_x) Z^{\deg x}}.$$

## 1.2 保型表現

写像 $\varphi$: $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_F) \longrightarrow \mathbb{C}$ で次の 4 条件を満たすもの全体を $\mathrm{Aut}_c^r$ と書く：

i) $\varphi$ は $\mathrm{GL}_r(F)$ の作用で左不変.

ii) $\varphi$ はある $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_F)$ の開部分群の作用で右不変.

iii) $\deg a \neq 0$ となる $a \in \mathbb{A}_F^\times$ が存在して，任意の $g \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_F)$ に対して $\varphi(ag) = \varphi(g)$.

iv) $\mathrm{GL}_r$ の標準的放物部分群 $P$ に対して，

$$\int_{N_P(F) \backslash N_P(\mathbb{A}_F)} \varphi(n_P g)\, dn_P = 0$$

が成り立つ．ここで $N_P$ は $P$ の冪単根基であり，$dn_P$ は $N_P$ の Haar 測度である．

$\mathrm{Aut}_c^r$ は $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_F)$ の表現，あるいは $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_F)$ の Hecke 環 $\mathcal{H}_F^r$ 上の加群になるが，これを既約表現に分解したときに現れる表現を尖点的保型表現という．$\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_F)$ の尖点的保型表現で中心指標が有限位数であるもの全体を $\mathcal{A}^r(F)$ と書く．

$\pi \in \mathcal{A}^r(F)$ に対して，局所 $L$ 因子 $L_x(\pi_x, Z)$ および大域的 $L$ 関数 $L(\pi, Z)$ が定義され，解析接続と関数等式をもつ．さらに，$\pi$ が $x \in |C|$ で不分岐ならば，$z_1(\pi_x), \ldots, z_r(\pi_x)$ を Hecke 固有値とすると，次が成り立つ：

$$L_x(\pi_x, Z) = \prod_{1 \le i \le r} \frac{1}{1 - z_i(\pi_x) \cdot Z^{\deg x}}.$$

## 1.3 Langlands 予想

**定義 1.3**

$\sigma \in \mathcal{G}_\ell^r(F)$ と $\pi \in \mathcal{A}^r(F)$ が「(Langlands の意味で) 対応する」とは，次が成立することをいう：

$\sigma, \pi$ がともに不分岐である素点 $x \in |C|$ において，$\sigma_x$ の Frobenius 固有値と $\pi_x$ の Hecke 固有値が (順序を除いて) 一致する，すなわち $L_x(\sigma_x, Z) = L_x(\pi_x, Z)$ が成り立つ．

**注意 1.4**

strong multiplicity one theorem より，$\sigma$ に対応する $\pi$ は高々 1 つである．また，Chebotarev 密度定理より，$\pi$ に対応する $\sigma$ は高々 1 つである．

次が Lafforgue の主定理である：

**定理 1.5**（$F$ **に対する Langlands 予想**）
次が成り立つ：

i)（Langlands 対応）
$\pi \in \mathcal{A}^r(F)$ に対して，対応する $\sigma_\pi \in \mathcal{G}_\ell^r(F)$ が定まり，$\pi \longmapsto \sigma_\pi$ は全単射である．さらに，$\pi_x$ が不分岐である素点の集合と $(\sigma_\pi)_x$ が不分岐である素点の集合は一致する．

ii)（局所因子の一致）
任意の $x \in |C|, \pi \in \mathcal{A}^r(F), \pi' \in \mathcal{A}^{r'}(F)$ に対して，次が成り立つ：

$$L_x(\pi_x \times \pi'_x, Z) = L_x\big((\sigma_\pi)_x \otimes (\sigma_{\pi'})_x, Z\big),$$
$$\varepsilon_x(\pi_x \times \pi'_x, Z, \psi_x) = \varepsilon_x\big((\sigma_\pi)_x \otimes (\sigma_{\pi'})_x, Z, \psi_x\big).$$

ここで左辺は「pair の局所 $L$ 因子」「pair の局所 $\varepsilon$ 因子」を表す．

iii)（Ramanujan-Petersson 予想）
$\pi \in \mathcal{A}^r(F)$ と $\pi_x$ が不分岐である素点 $x \in |C|$ に対し，$\big|z_i(\pi_x)\big| = 1$.

## 1.4 証明の方針

ここでは定理 1.5 の証明の方針について簡単に述べる．

まず注意すべきことは，定理 1.5 は $r$ についての帰納法で証明されるということである．すなわち，$r$ についての定理 1.5 の主張を $\mathrm{MT}_r$ と書くと，次が成り立つ：

**命題 1.6**

i) $r' < r$ について $\mathrm{MT}_{r'}$ が成立するならば，$\sigma \in \mathcal{G}_\ell^r(F)$ に対してそれと対応する $\pi_\sigma \in \mathcal{A}^r(F)$ が存在し，$x \in |C|$ に対し，$\sigma_x$ が不分岐ならば $(\pi_\sigma)_x$ も不分岐である．

ii) さらに，全ての $\pi \in \mathcal{A}^r(F)$ に対して，それと対応する $\sigma_\pi \in \mathcal{G}_\ell^r(F)$ で，$\pi_x$ が不分岐ならば $(\sigma_\pi)_x$ も不分岐であり，かつ重さ 0 であるものが構成できるなら，$\mathrm{MT}_r$ は従う．

この命題の本質的な部分はガロア表現から対応する保型表現を構成する部分であるが，ガロア表現の大域的 $L$ 関数は解析接続および関数等式をもつので，逆定理（[C-P], [Laf1] Appendice B）を用いることによってそれと同じ大域的 $L$ 関数をもつ保型表現が得られる（より正確には，$\varepsilon$ 因子の積公式も必要である）．これは代数体の場合とは著しく異なる部分である．

したがって，保型表現 $\pi \in \mathcal{A}^r(F)$ から出発してそれに対応するガロア表現を構成する方法を与えればよい．Langlands 予想に関する多くの仕事と同様に，数論幾何学的な構成を行う．すなわち，Hecke 環 $\mathcal{H}_F^r$ が作用する $F$ 上のモジュラー多様体 Cht を考え，その $\ell$ 進

コホモロジー $H_c^*(\mathrm{Cht}_{\overline{F}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ を $G_F$ および $\mathcal{H}_F^r$ の作用で分解することによって対応を構成するのである．これが Langlands の意味での対応になっていることは，Selberg 跡公式と Cht についての Lefschetz 跡公式を比較することによって得られる．

この方針は現在 Langlands 対応を構成するアプローチの 1 つとして広く用いられており特に珍しいものではないが，Lafforgue の証明において用いられるモジュラー多様体 Cht は有限型ではなく，したがってコホモロジーの次元や固定点の個数などが無限になってしまうため，その取り扱いに著しい困難が生じるのである．

## 2 shtuka とそのモジュライスタック

ここでは，shtuka の定義について簡単に復習する．[Laf4] や [Lau] など，優れた解説が少なからず存在するので，詳細はそちらをご覧いただきたい．

**shtuka の定義**

**定義 2.1**

$S$ を $\mathbb{F}_q$ 上のスキームとする．$S$ 上の階数 $r$ の shtuka とは，次の条件を満たす図式

$$\widetilde{\mathcal{E}} = (\mathcal{E} \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{E}' \overset{t}{\hookleftarrow} {}^\tau\mathcal{E})$$

のことである：

- $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ は $C \times S$ 上の階数 $r$ の局所自由 $\mathcal{O}_{C\times S}$ 加群層である．
- ${}^\tau\mathcal{E} = (\mathrm{Id} \times \mathrm{Frob}_S)^*\mathcal{E}$．ただし $\mathrm{Frob}_S$ は $q$ 乗 Frobenius 射である．
- $j, t$ は単射であり，その余核はある射 $\infty, 0\colon S \longrightarrow C$ のグラフ上にサポートをもち，グラフ上では可逆 $\mathcal{O}_S$ 加群層である．

関手 $S \longmapsto$ ($S$ 上の階数 $r$ の shtuka) は Deligne-Mumford スタックになる．これを $\mathrm{Cht}^r$ と書く（Cht は shtuka のフランス語表記 chtouca の頭文字である）．shtuka の定義より，射 $(\infty, 0)\colon \mathrm{Cht}^r \longrightarrow C \times C$ が定まる．これは smooth であり，相対次元は $2r-2$ となる．

**レベル構造**

$N \hookrightarrow C$ を $C$ の有限部分スキームとするとき，shtuka のレベル $N$ 構造を考えることができる．ここでは簡単のため，$\infty, 0$ が $N$ と交わらない場合のみ定義する．

$S$ 上の shtuka $\widetilde{\mathcal{E}} = (\mathcal{E} \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{E}' \overset{t}{\hookleftarrow} {}^\tau\mathcal{E})$ のレベル $N$ 構造とは，$\mathcal{E}$ の $N \times S$ 上の自明化

$$u\colon \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_N = \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_{C\times S}} \mathcal{O}_{N\times S} \cong \mathcal{O}_{N\times S}^{\oplus r}$$

であって，次の図式を可換にするものである：

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_N \arrow[r, "\cong"] \arrow[dr, "u"'] & \mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_N & {}^\tau\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_N \arrow[l, "\cong"'] \arrow[dl, "{}^\tau u"] \\
& \mathcal{O}_{N\times S}^{\oplus r} &
\end{tikzcd}$$

レベル $N$ 構造つき shtuka のモジュライスタックを $\mathrm{Cht}_N^r$ と書く．また，レベル構造を忘れる自然な射 $\mathrm{Cht}_N^r \longrightarrow \mathrm{Cht}^r \times_{C\times C} (C\setminus N)\times(C\setminus N)$ は表現可能であり，Galois 群が $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)$ である有限 Galois étale 被覆となる．

**Hecke 対応**

$K_N = \mathrm{Ker}\big(\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_{\mathbb{A}_F}) \longrightarrow \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)\big)$ とし，$K_N$ で両側不変な $\mathcal{H}$ の元全体を $\mathcal{H}_N$ とおく．$\mathcal{H}_N$ は $\mathrm{Cht}_N^r$ に correspondence の線型和として作用する．より正確に述べると，次のようになる：

$f \in \mathcal{H}_N$ に対し，$f_x$ が $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_x)$ の特性関数 $\mathbf{1}_{\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_x)}$ の定数倍でないような素点 $x$ の集合を $T_f$ と書く．$f$ は $g_i \in \prod_{x\notin T_f} \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_x) \times \prod_{x\in T_f} \mathrm{GL}_r(F_x)$ を用いて $f = \sum_i \lambda_i \mathbf{1}_{K_N\cdot g_i\cdot K_N}$ と表すことができる．各 $g_i$ に対して， étale な correspondence

$$\Gamma_N^r(g_i) \longrightarrow (\mathrm{Cht}_N^r \times_{C\times C} \mathrm{Cht}_N^r) \times_{C\times C} (C\setminus T_f)\times(C\setminus T_f)$$

を定めることができ（[Laf2], I.4c, Proposition 3 参照），$f$ の作用はこの線型結合とする．

**truncation**

shtuka $\widetilde{\mathcal{E}} = (\mathcal{E} \xhookrightarrow{j} \mathcal{E}' \xhookleftarrow{t} {}^\tau\mathcal{E})$ のうち，$\deg\mathcal{E} = d$ を満たすものを分類する代数スタックを $\mathrm{Cht}^{r,d}$ と書く．このとき，$\mathrm{Cht}^r = \coprod_{d\in\mathbb{Z}} \mathrm{Cht}^{r,d}$ である．

$\mathrm{Cht}^{r,d}$ は，$r \geq 2$ のとき有限型ではない．これは階数 2 以上のベクトル束のモジュライ空間が有限型でないことに起因する．そこでベクトル束のモジュライの場合に倣い，shtuka に対して Harder-Narasimhan フィルトレーションの類似物を用いることで，$\mathrm{Cht}^{r,d}$ を有限型の開部分スタックの合併として書くことを考える．

$k$ を $\mathbb{F}_q$ 上の代数閉体とすると，$k$ 上の shtuka $\widetilde{\mathcal{E}} = (\mathcal{E} \xhookrightarrow{j} \mathcal{E}' \xhookleftarrow{t} {}^\tau\mathcal{E})$ に対して，その Harder-Narasimhan フィルトレーションと呼ばれる $\widetilde{\mathcal{E}}$ のフィルトレーションと，canonical polygon と呼ばれる上に凸な折れ線写像 $\overline{p}^{\widetilde{\mathcal{E}}}\colon [0,r] \longrightarrow \mathbb{R}$ ($\overline{p}^{\widetilde{\mathcal{E}}}(0) = \overline{p}^{\widetilde{\mathcal{E}}}(r) = 0$) を対応させることができる（[Laf2] II.2b, Théorème 8）．$\overline{p}^{\widetilde{\mathcal{E}}}$ は $\overline{p}$ と略記することも多い．

$p\colon [0,r] \longrightarrow \mathbb{R}$ を $p(0) = p(r) = 0$ を満たす折れ線写像とするとき，$\mathrm{Cht}^r$ の開部分スタック $\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}$ で次の条件を満たすものが唯一存在する：

> $k$ 上の shtuka $\widetilde{\mathcal{E}}$ について，$\overline{p}^{\widetilde{\mathcal{E}}} \leq p$ であることと $\widetilde{\mathcal{E}}$ で決まる射 $\mathrm{Spec}\,k \longrightarrow \mathrm{Cht}^r$ が $\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}$ を経由することは同値である．

さらに，$\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\le p} = \mathrm{Cht}^{r,d} \cap \mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\le p}$ は $\mathbb{F}_q$ 上有限型になる．これにより，$\mathrm{Cht}^{r,d} = \bigcup_p \mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\le p}$ と有限型開部分スタックの合併で書くことができる．

レベルつきの場合も同様にして $\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}$, $\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\le p}$ を定めることができ，後者は有限型になる．

**注意 2.2**

ここで定めた $\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\le p}$ は Hecke 対応では保たれない．後にまた述べるが，これが Lefschetz 跡公式の適用を困難にする 1 つの要因である．

### 固定点の個数

$a \in \mathbb{A}_F^\times$ で $\deg a = 1$ となるものを固定する．このとき，$\mathrm{Cht}_N^r/a^{\mathbb{Z}} = \coprod_{0\le d\le r-1} \mathrm{Cht}_N^{r,d}$ である．このスタックのコホモロジー層（$C\setminus N \times C \setminus N$ への自然な射による高次順像）の交代和として得られる $\mathcal{H}_N/a^{\mathbb{Z}} \times \pi_1(C\setminus N \times C\setminus N)$ の virtual 表現

$$V_N = \sum_{\nu=0}^{4r-4} (-1)^\nu H_c^\nu\big(\mathrm{Cht}_N^r/a^{\mathbb{Z}}\big)$$

を考える．$V_N$ を分解することで，

$$\pi \in \{\pi\}_N^r = (N \text{ の外で不分岐な尖点的保型表現全体})$$

に対応する $\sigma_\pi$ を構成したい．このためには，$f \times \mathrm{Frob}_x^n \in \mathcal{H}_N \times \pi_1(C\setminus N \times C\setminus N)$ の $V_N$ への作用のトレースを求めることが重要なステップである．以下では，幾何学的点 $x \in (C\times C)(\overline{\mathbb{F}}_q)$ でのファイバー $(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}/a^{\mathbb{Z}})_x$ における $f \times \mathrm{Frob}_x^n$ の固定点の個数（より正確には，$\Gamma_N^r(g_i) \times \mathrm{Frob}_x^n$ の固定点の個数の線型和）

$$\#\,\mathrm{Fix}_x^{r,\overline{p}\le p}(f \times \mathrm{Frob}_x^n)$$

を表す式を紹介する．この式と $f \times \mathrm{Frob}_x^n$ の $V_N$ への作用のトレースを Lefschetz 跡公式によって結びつけるのが次節以降の目標になる．

$\infty, 0 \in |C \setminus T_f|$ に対し，$s$ を $\deg\infty$ と $\deg 0$ の公倍数とし，$s = \deg\infty \cdot s' = \deg 0 \cdot u'$ と書く．また，$\overline{\infty}, \overline{0} \in C(\overline{\mathbb{F}}_q)$ を $\infty, 0$ の上にある幾何学的点とし，$x = (\overline{\infty}, \overline{0}) \in (C\times C)(\overline{\mathbb{F}}_q)$ とする．このとき，次が成り立つ：

**定理 2.3**

$f \in \mathcal{H}_N$ を固定する．折れ線写像 $p$ が十分上に凸であるとき，有限個の実数 $c_\iota, \lambda_\iota \ge 0$, 整数 $m_\iota \ge 0$, $0 < r_\iota, r'_\iota < r$ と $\mathrm{GL}_{r_\iota}(\mathbb{A}_F)$, $\mathrm{GL}_{r'_\iota}(\mathbb{A}_F)$ の尖点的保型表現 $\pi^\iota$, $\pi'^\iota$ が存在して，$\deg\infty$, $\deg 0$, $s$ が十分大きいとき，周期関数

$$n \longmapsto \#\,\mathrm{Fix}^{r,\overline{p}\le p}_{\mathrm{Frob}^n(\overline{\infty}),\overline{0}}\big(f \times \mathrm{Frob}^{s/\deg x}_{\mathrm{Frob}^n(\overline{\infty}),\overline{0}}\big)$$

の平均は次の式で与えられる：

$$\sum_{\pi\in\{\pi\}^r_N} \mathrm{Tr}_\pi(f)q^{(r-1)s}\bigl(z_1(\pi_\infty)^{-s'}+\cdots+z_r(\pi_\infty)^{-s'}\bigr)\bigl(z_1(\pi_0)^{u'}+\cdots+z_r(\pi_0)^{u'}\bigr)$$
$$+\sum_\iota c_\iota s^{m_\iota}\lambda_\iota^s\bigl(z_1(\pi'^{\iota}_\infty)^{-s'}+\cdots+z_{r'_\iota}(\pi'^{\iota}_\infty)^{-s'}\bigr)\bigl(z_1(\pi^\iota_0)^{u'}+\cdots+z_{r_\iota}(\pi^\iota_0)^{u'}\bigr).$$

この定理は，

i) $(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p})_x$ の $f\times\mathrm{Frob}_x^n$ による固定点のアデール表示

ii) $\mathrm{GL}_r$ についての fundamental lemma

iii) Arthur-Selberg 跡公式

の3つをまとめて書いたものであり，[Laf2] の主定理である．i), ii) については，Drinfeld や Laumon らの仕事がほとんどそのまま拡張できるため，さほど難しくはない．iii) は，shtuka の Harder-Narasimhan フィルトレーションによる truncation と Selberg 跡公式における Arthur の truncation が対応していることを証明する必要があり，かなり難解なものとなっている．

# 3　Lefschetz 跡公式の復習

ここでは，$k$ を分離閉体とし，すべてのスキームは $k$ 上有限型であり，直積は $k$ 上のファイバー積を指すものとする．スキーム $X_1$, $X_2$ に対し，proper な射 $a\colon\Gamma\longrightarrow X_1\times X_2$ を $X_2$ から $X_1$ への correspondence（代数的対応）と呼ぶ．$a_i=\mathrm{pr}_i\circ a$ とおく．

proper な射 $f\colon X_2\longrightarrow X_1$ は $\gamma_f=f\times\mathrm{Id}\colon X_2\longrightarrow X_1\times X_2$ によって $X_2$ から $X_1$ への correspondence とみなせる．また，第1成分と第2成分を入れかえる射 $X_1\times X_2\longrightarrow X_2\times X_1$ を $a\colon\Gamma\longrightarrow X_1\times X_2$ に合成したものは $X_1$ から $X_2$ への correspondence になる．これを ${}^ta$ と書き，$a$ の転置と呼ぶ．

## 3.1　最も簡単な場合

まず，位相幾何学などでもよく出てくる，「普通の」Lefschetz 跡公式を紹介する（後の都合上，少し一般化した形で述べる）．$X_1$, $X_2$ を $k$ 上 proper かつ smooth なスキームとする．$d_i=\dim X_i$ とする．$a\colon\Gamma\longrightarrow X_1\times X_2$ を（$X_2$ から $X_1$ への）correspondence とし，$\Gamma$ は $k$ 上 smooth かつ $d_2$ 次元であると仮定する．このとき，$a$ は $X_i$ の定数層係数コホモロジー $H^\nu(X_i,\mathbb{Q}_\ell)$ 間に次のように準同型を誘導する（これも $a$ で表すことにする）：

$$H^\nu(X_1,\mathbb{Q}_\ell)\xrightarrow{a_1^*}H^\nu(\Gamma,\mathbb{Q}_\ell)\xrightarrow{a_{2*}}H^\nu(X_2,\mathbb{Q}_\ell).$$

ここで $a_{2*}$ は $a_2^*\colon H^{2d_2-\nu}(X_2,\mathbb{Q}_\ell(d_2))\longrightarrow H^{2d_2-\nu}(\Gamma,\mathbb{Q}_\ell(d_2))$ の Poincaré 双対である．

また，$\mathrm{cl}(\Gamma)=a_*(1)\in H^{2d_1}(X_1\times X_2,\mathbb{Q}_\ell(d_1))$ を $\Gamma$ の cycle class とすると，projection formula より $a_{2*}(a_1^*(x))=\mathrm{pr}_{2*}(a_*a^*(\mathrm{pr}_1^*(x)))=\mathrm{pr}_{2*}(\mathrm{pr}_1^*(x)\cup\mathrm{cl}(\Gamma))$ を得る．

**定理 3.1**

$a\colon \Gamma_1 \longrightarrow X_1 \times X_2$, $b\colon \Gamma_2 \longrightarrow X_1 \times X_2$ を correspondence とする．$\Gamma_1$, $\Gamma_2$ はそれぞれ $d_2$ 次元，$d_1$ 次元で smooth であるとするとき，次が成り立つ：

$$\mathrm{Tr}\big({}^t b \circ a; H^*(X_1, \mathbb{Q}_\ell)\big) = \big\langle \mathrm{cl}(\Gamma_2), \mathrm{cl}(\Gamma_1)\big\rangle_{X_1 \times X_2}.$$

ここで $\langle\ ,\ \rangle_{X_1 \times X_2}$ はカップ積による pairing を表し，$\mathrm{Tr}\big({}^t b \circ a; H^*(X_1, \mathbb{Q}_\ell)\big)$ はトレースの交代和 $\sum_{\nu=0}^{2d_1}(-1)^\nu \,\mathrm{Tr}\big({}^t b \circ a; H^\nu(X_1, \mathbb{Q}_\ell)\big)$ を表す．

**注意 3.2**

上の定理において $X_1 = X_2$, $a = \gamma_f$, $b = \Delta_X = \gamma_{\mathrm{Id}_X}$ とすると，${}^t b \circ a = f^*$ であり，$\big\langle \mathrm{cl}(\Gamma_2), \mathrm{cl}(\Gamma_1)\big\rangle_{X \times X}$ は重複度を込めた $f$ の固定点の個数であるから，上の定理は位相幾何学などでよく知られている Lefschetz の固定点定理に他ならない．

この定理は Poincaré 双対定理と Künneth 分解定理から形式的に従う．

**注意 3.3**

より一般に，$u \in H^{2d_1}(X_1 \times X_2, \mathbb{Q}_\ell)$ は $x \longmapsto \mathrm{pr}_{2*}\big(\mathrm{pr}_1^*(x) \cup u\big)$ によってコホモロジー間の写像 $u_*\colon H^\nu(X_1, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^\nu(X_2, \mathbb{Q}_\ell)$ を定める．$v \in H^{2d_2}(X_1 \times X_2, \mathbb{Q}_\ell)$ は $x \longmapsto \mathrm{pr}_{1*}\big(\mathrm{pr}_2^*(x) \cup v\big)$ によって $v_*\colon H^\nu(X_2, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^\nu(X_1, \mathbb{Q}_\ell)$ を定める．これらについても，次の跡公式が成立する：

$$\mathrm{Tr}\big(v_* \circ u_*; H^*(X_1, \mathbb{Q}_\ell)\big) = \langle u, v\rangle_{X_1 \times X_2}$$

## 3.2 Lefschetz-Verdier 跡公式

上に述べた定理 3.1 では，$X_i$ および $\Gamma_i$ の smoothness という強い仮定がついていたが，Poincaré 双対定理の代わりに Verdier 双対定理を利用することで Lefschetz 跡公式を大きく一般化することができる．それがここで述べる Lefschetz-Verdier 跡公式である．

### 3.2.1 圏 $D^b_{\mathrm{ctf}}(X, \Lambda)$ と 6 つの関手

以下では $\Lambda$ を $\mathbb{Z}/\ell^k$, $\mathbb{Z}_\ell$, $\mathbb{Q}_\ell$, $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ のいずれかとする．スキーム $X$ に対し，$X$ 上の $\Lambda$ 加群層の複体でコホモロジーが有界かつ構成可能層であるもののなす導来圏を $D^b_c(X, \Lambda)$ と書く．また，そのなかで torsion 次元が有限である複体のなす充満部分圏を $D^b_{\mathrm{ctf}}(X, \Lambda)$ と書く．$D^b_{\mathrm{ctf}}(X, \Lambda)$ は 6 つの関手で保たれる．すなわち，有限型である射 $f\colon X \longrightarrow Y$ に対し，$f_*$, $f_!$ は $D^b_{\mathrm{ctf}}(X, \Lambda)$ から $D^b_{\mathrm{ctf}}(Y, \Lambda)$ の関手になり，$f^*$, $f^!$ は $D^b_{\mathrm{ctf}}(Y, \Lambda)$ から $D^b_{\mathrm{ctf}}(X, \Lambda)$ の関手になる．また，$L_1, L_2 \in \mathrm{obj}\, D^b_{\mathrm{ctf}}(X, \Lambda)$ に対し，$R\,\underline{\mathrm{Hom}}(L_1, L_2), L_1 \overset{\mathbb{L}}{\otimes} L_2 \in \mathrm{obj}\, D^b_{\mathrm{ctf}}(X, \Lambda)$ である．

$K \in D^b_{\mathrm{ctf}}(\mathrm{Spec}\, k, \Lambda)$ は射影的 $\Lambda$ 加群の有界複体と同型であり，したがって $K$ の自己準同型のトレースを考えることができる．この事実は主に $L \in D^b_{\mathrm{ctf}}(X, \Lambda)$ であるときに，$R\Gamma(X, L)$ あるいは $R\Gamma_c(X, L)$ に適用する．

$X$ をスキームとし，構造射を $f: X \longrightarrow \operatorname{Spec} k$ とする．このとき，$K_X = f^! \Lambda$ とおく．また，$D_X(L) = R\,\underline{\mathrm{Hom}}(L, K_X)$ とおく．上に述べたことから，$D_X$ は圏 $D^b_{\mathrm{ctf}}(X, \Lambda)$ を保つ．

以下で用いる Künneth 同型を復習しよう．$f_1: X_1 \longrightarrow Y_1$, $f_2: X_2 \longrightarrow Y_2$ を有限型である射とし，$f = f_1 \times f_2: X_1 \times X_2 \longrightarrow Y_1 \times Y_2$ をその直積とする．$L_i \in D^b_{\mathrm{ctf}}(X_i, \Lambda)$ に対し，$L_1 \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} L_2 = \mathrm{pr}_1^* L_1 \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathrm{pr}_2^* L_2 \in D^b_{\mathrm{ctf}}(X_1 \times X_2, \Lambda)$ と定める．

**命題 3.4**
$L_i \in D^b_{\mathrm{ctf}}(X_i, \Lambda)$, $K_i \in D^b_{\mathrm{ctf}}(Y_i, \Lambda)$ に対し，次が成り立つ：
i) $f^*(K_1 \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} K_2) \cong (f_1^* K_1) \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} (f_2^* K_2)$.
ii) $f^!(K_1 \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} K_2) \cong (f_1^! K_1) \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} (f_2^! K_2)$.
iii) $f_*(L_1 \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} L_2) \cong (f_{1*} L_1) \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} (f_{2*} L_2)$.
iv) $f_!(L_1 \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} L_2) \cong (f_{1!} L_1) \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} (f_{2!} L_2)$.

### 3.2.2 cohomological correspondence

**定義 3.5**
$X_1$, $X_2$ をスキームとし，$L_i \in \operatorname{obj} D^b_{\mathrm{ctf}}(X_i, \Lambda)$ とするとき，$\mathrm{Hom}(\mathrm{pr}_1^* L_1, \mathrm{pr}_2^! L_2)$ の元を $L_1$ から $L_2$ への cohomological correspondence という．その全体を $\text{Coh-corr}(L_1, L_2)$ と書くことにする．

**注意 3.6**
上の設定において，

$$\begin{aligned} D_{X_1} L_1 \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} L_2 &= R\,\underline{\mathrm{Hom}}(L_1, K_{X_1}) \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} R\,\underline{\mathrm{Hom}}(\Lambda, L_2) = R\,\underline{\mathrm{Hom}}(L_1 \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} \Lambda, K_{X_1} \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} L_2) \\ &= R\,\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{pr}_1^* L_1, \mathrm{pr}_2^! L_2) \end{aligned}$$

である (最後の等号に命題 3.4 ii) を用いた) から，cohomological correspondence は $D_{X_1} L_1 \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} L_2$ の $X_1 \times X_2$ 上の section とみなすこともできる．

**定義 3.7**
$a: \Gamma \longrightarrow X_1 \times X_2$ を correspondence とするとき，$\mathrm{Hom}(a_1^* L_1, a_2^! L_2)$ の元を $a$ にサポートをもつ $L_1$ から $L_2$ への cohomological correspondence という．その全体を $\text{Coh-corr}(a; L_1, L_2)$ と書くことにする．

自然な写像

$$\begin{aligned}\text{Coh-corr}(a; L_1, L_2) &= \text{Hom}(a_1^* L_1, a_2^! L_2) = \text{Hom}(\text{pr}_1^* L_1, a_* a^! \text{pr}_2^! L_2) \\ &= \text{Hom}(\text{pr}_1^* L_1, a_! a^! \text{pr}_2^! L_2) \longrightarrow \text{Hom}(\text{pr}_1^* L_1, \text{pr}_2^! L_2) \\ &= \text{Coh-corr}(L_1, L_2)\end{aligned}$$

により，$\text{Coh-corr}(a; L_1, L_2)$ の元は $\text{Coh-corr}(L_1, L_2)$ の元を定める．

$R\,\underline{\text{Hom}}(a_1^* L_1, a_2^! L_2) = a^! R\,\underline{\text{Hom}}(\text{pr}_1^* L_1, \text{pr}_2^! L_2) = a^!(D_{X_1} L_1 \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} L_2)$ であるから，$a$ にサポートをもつ cohomological correspondence は $a^!(D_{X_1} L_1 \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} L_2)$ の $\Gamma$ 上の section とみなすこともできる．

### 3.2.3 押し出し

$f_i\colon X_i \longrightarrow X_i'$ を射とし，$a\colon \Gamma \longrightarrow X_1 \times X_2$, $a'\colon \Gamma' \longrightarrow X_1' \times X_2'$ を correspondence とし，下図左のような可換図式が存在するとする．このとき，$\Gamma'' = (X_1' \times X_2') \times_{X_1 \times X_2} \Gamma$ とおき，下図右の通りに $i$, $a''$, $g'$ を定める：

$$\begin{tikzcd} X_1 \times X_2 \arrow[d, "f_1 \times f_2"] & \Gamma \arrow[l, "a"'] \arrow[d, "g"] \\ X_1' \times X_2' & \Gamma', \arrow[l, "a'"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X_1 \times X_2 \arrow[d, "f_1 \times f_2"] & \Gamma'' \arrow[l, "a''"'] \arrow[d, "g'"'] & \Gamma \arrow[l, "i"'] \arrow[dl, "g"] \arrow[ll, bend right, "a"'] \\ X_1' \times X_2' & \Gamma' \arrow[l, "a'"'] & \end{tikzcd}$$

そして，$L_1, L_2 \in \text{obj}\, D_{\text{ctf}}^b(X', \Lambda)$ に対し，押し出し

$$(f_1 \times f_2)_*\colon \text{Coh-corr}(a'; L_1, L_2) \longrightarrow \text{Coh-corr}(a; f_{1!} L_1, f_{2*} L_2)$$

を次で定める：

$$\begin{aligned}\text{Coh-corr}(a; L_1, L_2) &= H^0(\Gamma, a^!(D_{X_1} L_1 \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} L_2)) = H^0(\Gamma'', i_! i^! a''^!(D_{X_1} L_1 \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} L_2)) \\ &\xrightarrow{\text{adj}} H^0(\Gamma'', a''^!(D_{X_1} L_1 \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} L_2)) = H^0(\Gamma', g'_* a''^!(D_{X_1} L_1 \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} L_2)) \\ &\cong H^0(\Gamma', a'^!(f_1 \times f_2)_*(D_{X_1} L_1 \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} L_2)) \cong H^0(\Gamma', a'^!(f_{1*} D_{X_1} L_1 \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} f_{2*} L_2)) \\ &\cong H^0(\Gamma', a'^!(D_{X_1'}(f_{1!} L_1) \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} f_{2*} L_2)) = \text{Coh-corr}(a'; f_{1!} L_1, f_{2*} L_2).\end{aligned}$$

**注意 3.8**

特に $X_1 = X_2 = \text{Spec}\, k$，$a = a' = \text{Id}_{\text{Spec}\, k}$ のときは，上の構成によって

$$\text{Coh-corr}(L_1, L_2) \longrightarrow \text{Hom}(R\Gamma_c(X_1, L_1), R\Gamma(X_2, L_2))$$

を得る（この写像は実は同型である）．これによる $u \in \text{Coh-corr}(L_1, L_2)$ の像を $u_*$ と書く．

さらに $X_1$ が $k$ 上 proper である場合は，$u_*$ は次の合成と一致する：

$$\begin{aligned} R\Gamma(X_1,L_1) &\xrightarrow{\mathrm{pr}_1^*} R\Gamma(X_1\times X_2,\mathrm{pr}_1^* L_1) \xrightarrow{u_*} R\Gamma(X_1\times X_2,\mathrm{pr}_2^! L_2) \\ &= R\Gamma(X_2,\mathrm{pr}_{2*}\mathrm{pr}_2^! L_2) \xrightarrow{\mathrm{adj}} R\Gamma(X_2,L_2). \end{aligned}$$

### 3.2.4 pairing

$a\colon \Gamma_1 \longrightarrow X_1\times X_2$, $b\colon \Gamma_2 \longrightarrow X_1\times X_2$ を 2 つの correspondence とし，$\Xi = \Gamma_1 \times_{X_1\times X_2} \Gamma_2$ とおく．$c\colon \Xi \longrightarrow X_1\times X_2$ を自然な射とし，$L_i \in \operatorname{obj} D^b_{\mathrm{ctf}}(X_i,\Lambda)$ とする．このとき，以下のように pairing

$$\langle\ ,\ \rangle_\Xi\colon \text{Coh-corr}(a;L_1,L_2)\otimes \text{Coh-corr}({}^t b;L_2,L_1) \longrightarrow H^0(\Xi,K_\Xi)$$

を定める：

$P = D_{X_1}L_1 \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} L_2$, $Q = L_1 \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} D_{X_2}L_2$ とおく．Künneth 同型 $c_!(a^!P \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} b^!Q) \cong a_!a^!P \overset{\mathbb{L}}{\otimes} b_!b^!Q$ と adjunction map $a_!a^!P \overset{\mathbb{L}}{\otimes} b_!b^!Q \longrightarrow P \overset{\mathbb{L}}{\otimes} Q$ を合成することで，射 $c_!(a^!P \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} b^!Q) \longrightarrow P \overset{\mathbb{L}}{\otimes} Q$ ができる．これから adjoint により $a^!P \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} b^!Q \longrightarrow c^!(P \overset{\mathbb{L}}{\otimes} Q)$ が得られ，$c_*$ を施してもう一度 Künneth 同型を使うと，$a_*a^!P \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} b_*b^!Q \longrightarrow c_*c^!(P \overset{\mathbb{L}}{\otimes} Q)$ が得られる．また，

$$\begin{aligned} P \overset{\mathbb{L}}{\otimes} Q &= (D_{X_1}L_1 \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} L_2) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} (L_1 \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} D_{X_2}L_2) = (D_{X_1}L_1 \overset{\mathbb{L}}{\otimes} L_1) \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} (L_2 \overset{\mathbb{L}}{\otimes} D_{X_2}L_2) \\ &\xrightarrow{\mathrm{ev} \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} \mathrm{ev}} K_{X_1} \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} K_{X_2} = K_{X_1\times X_2} \end{aligned}$$

より $P \overset{\mathbb{L}}{\otimes} Q \longrightarrow K_{X_1\times X_2}$ が定まる．この 2 つの射を組み合わせて

$$a_*R\,\underline{\mathrm{Hom}}(a_1^*L_1,a_2^!L_2) \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} b_*R\,\underline{\mathrm{Hom}}(b_2^*L_2,b_1^!L_1) \longrightarrow c_*c^!K_{X_1\times X_2} = c_*K_\Xi$$

を得る．これの $H^0$ をとることで $\langle\ ,\ \rangle_\Xi$ が得られる．

**注意 3.9**

$X_1 = X_2 = \Gamma_1 = \Gamma_2 = \operatorname{Spec} k$, $a = b = \mathrm{Id}$ の場合は，$L_1$, $L_2$ は $\Lambda$ 加群の複体であり，Coh-corr$(a;L_1,L_2) = \mathrm{Hom}(L_1,L_2)$, Coh-corr$({}^t b;L_2,L_1) = \mathrm{Hom}(L_2,L_1)$ である．さらに，$H^0(\Xi,K_\Xi) = H^0(\operatorname{Spec} k,\Lambda) = \Lambda$ であり，$\langle u,v\rangle_\Xi = \mathrm{Tr}(v\circ u)$ となる．

上の pairing は étale 局所化と可換である．すなわち，次の命題が成り立つ：

**命題 3.10**

$X_1, X_2, \Gamma_1, \Gamma_2, \Xi$ を上の通りとし，下図の左の cartesian diagram 上 étale な（必ずしも cartesian でない）右の diagram が与えられているとする．

$$\begin{tikzcd} \Gamma_2 \arrow[d, "b"] & \Xi \arrow[l] \arrow[d] \\ X_1\times X_2 & \Gamma_1, \arrow[l, "a"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Gamma_2' \arrow[d, "b'"] & \Xi' \arrow[l] \arrow[d] \\ X_1\times X_2 & \Gamma_1' \arrow[l, "a'"] \end{tikzcd}$$

このとき，次の図式が可換になる：

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(a_1^* L_1, a_2^! L_2) \otimes \mathrm{Hom}(b_2^* L_2, b_1^! L_1) \arrow[r, "\langle\, ,\, \rangle_\Xi"] \arrow[d] & H^0(\Xi, K_\Xi) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}(a_1'^* L_1, a_2'^! L_2) \otimes \mathrm{Hom}(b_2'^* L_2, b_1'^! L_1) \arrow[r, "①"] & H^0(\Xi', K_{\Xi'})
\end{tikzcd}$$

ここで，縦の写像はいずれも制限写像である．①について述べる．$\Xi'' = \Gamma_1' \times_{X_1 \times X_2} \Gamma_2'$ とおくと，上と同様にして $\mathrm{Hom}(a_1'^* L_1, a_2'^! L_2) \otimes \mathrm{Hom}(b_2'^* L_2, b_1'^! L_1) \longrightarrow H^0(\Xi'', K_{\Xi''})$ が得られる（pairing の構成には $a$, $b$ の properness は使わなかったことに注意）．これと自然な写像 $H^0(\Xi'', K_{\Xi''}) \longrightarrow H^0(\Xi', K_{\Xi'})$（$\Xi'$ は $\Xi''$ 上 étale であることに注意）を合成して得られるのが①である．

### 3.2.5 押し出しと pairing の両立性

次の定理は cohomological correspondence の押し出しと上の pairing が両立することを主張しており，Lefschetz-Verdier 跡公式の核となるものである：

**定理 3.11** （[SGA5], Exposé Ⅲ A, Théorème 4.4）
$X_1$, $X_2$, $\Gamma_1$, $\Gamma_2$, $a$, $b$, $\Xi$ をこれまでの通りとする．また，スキーム $X_1'$, $X_2'$ に対しても $\Gamma_1'$, $\Gamma_2'$, $a'$, $b'$, $\Xi'$ を同様に定める．$f_i\colon X_i \longrightarrow X_i'$, $g_i\colon \Gamma_i \longrightarrow \Gamma_i'$ を，下の図式を可換にするような射とする：

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_1 \arrow[r, "a"] \arrow[d, "g_1"] & X_1 \times X_2 \arrow[d, "f_1 \times f_2"] & \Gamma_2 \arrow[l, "b"'] \arrow[d, "g_2"] \\
\Gamma_1' \arrow[r, "a'"] & X_1' \times X_2' & \Gamma_2 \arrow[l, "b'"']
\end{tikzcd}$$

さらに，$f_i$ は proper であるとする．このとき，次は可換になる：

$$\begin{tikzcd}
\text{Coh-corr}(a; L_1, L_2) \otimes \text{Coh-corr}({}^t b; L_2, L_1) \arrow[r, "\langle\, ,\, \rangle_\Xi"] \arrow[d, "①"] & H^0(\Xi, K_\Xi) \arrow[d, "②"] \\
\text{Coh-corr}(a'; f_{1*} L_1, f_{2*} L_2) \otimes \text{Coh-corr}({}^t b'; f_{2*} L_2, f_{1*} L_1) \arrow[r, "\langle\, ,\, \rangle_{\Xi'}"] & H^0(\Xi', K_{\Xi'})
\end{tikzcd}$$

ここで①は押し出しのテンソル積である（$f_i$ が proper なので $f_{i!} L_1 = f_{i*} L_1$ となる）．②は proper な射 $h\colon \Xi \longrightarrow \Xi'$ によって定まる射 $h_* K_\Xi = h_! h^! K_{\Xi'} \longrightarrow K_{\Xi'}$ から誘導される写像である．

### 3.2.6 Lefschetz-Verdier 跡公式

$X_1$, $X_2$, $\Gamma_1$, $\Gamma_2$, $a$, $b$, $L_1$, $L_2$, $\Xi$ を上の通りとする．

**定義 3.12**

$D$ を $\Xi$ の開部分スキームで $k$ 上 proper であるもの（例えば $\Xi$ が proper であるときの連結成分）とする．このとき，$\langle\ ,\ \rangle_\Xi$ と $\rho_D\colon H^0(\Xi, K_\Xi) \longrightarrow H^0(D, K_D) \xrightarrow{H^0(\mathrm{adj})} \Lambda$ を合成して得られる写像を $\mathrm{loc}_D$ と書く．$u \in \text{Coh-corr}(a; L_1, L_2)$, $v \in \text{Coh-corr}({}^t b; L_2, L_1)$ に対して，$\mathrm{loc}_D(u,v)$ を local term と呼ぶ．

**注意 3.13**

命題 3.10 より，$\mathrm{loc}_D(u,v)$ は $D$ の étale 近傍での $\Gamma_1$, $\Gamma_2$, $a$, $b$, $L_1$, $L_2$, $u$, $v$ の様子のみによって決まる．

**定理 3.14（Lefschetz-Verdier 跡公式）**

$X_1$, $X_2$ が $k$ 上 proper であるとき，$u \in \text{Coh-corr}(a; L_1, L_2)$, $v \in \text{Coh-corr}({}^t b; L_2, L_1)$ について次が成り立つ：

$$\mathrm{Tr}\big(v_* \circ u_*; R\Gamma(X_1, L_1)\big) = \mathrm{loc}_\Xi(u,v) = \sum_{D \in \pi_0(\Xi)} \mathrm{loc}_D(u,v).$$

**証明**　定理 3.11 において $X_i' = \Gamma_i' = \mathrm{Spec}\, k$, $a' = b' = \mathrm{Id}$, $f_i\colon X_i \longrightarrow \mathrm{Spec}\, k$, $g_i\colon \Gamma_i \longrightarrow \mathrm{Spec}\, k$ を構造射とすると，注意 3.9 と合わせて次の可換図式を得る：

$$\begin{array}{ccc}
\text{Coh-corr}(a; L_1, L_2) \otimes \text{Coh-corr}({}^t b; L_2, L_1) & \xrightarrow{\langle\ ,\ \rangle_\Xi} & H^0(\Xi, K_\Xi) \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho_\Xi} \\
\mathrm{Hom}\big(R\Gamma(X_1, L_1), R\Gamma(X_2, L_2)\big) \otimes \mathrm{Hom}\big(R\Gamma(X_2, L_2), R\Gamma(X_1, L_1)\big) & \xrightarrow[\mathrm{Tr}\,\circ\,\text{合成}]{} & \Lambda
\end{array}$$

定理はこれより直ちに従う．∎

**例 3.15**

3.1 節で既に扱った，$X_1$, $X_2$ が proper smooth かつ $L_1, L_2 = \Lambda$ の場合を Lefschetz-Verdier 跡公式の立場から考察してみよう．$d_i = \dim X_i$, $d = d_1 + d_2$ とおく．また，$f_i\colon X_i \longrightarrow \mathrm{Spec}\, k$ を構造射とする．$a\colon \Gamma_1 \longrightarrow X_1 \times X_2$ を correspondence とし，$\Gamma_1$ が normal かつ $\dim \Gamma_1 = n$ を満たしていると仮定する．

このとき，$\Gamma$ の trace map $(f_2 \circ a_2)_! \Lambda \longrightarrow \Lambda(-d_2)[-2d_2]$ が存在し，これから adjoint で定まる射 $\Lambda \longrightarrow a_2^! \Lambda$ は $\text{Coh-corr}(a; \Lambda, \Lambda)$ の元を定める．これを $\mathrm{cl}(a)$ と書く．

$$\text{Coh-corr}(a; \Lambda, \Lambda) = \mathrm{Hom}(a_1^* \Lambda, a_2^! \Lambda) = \mathrm{Hom}(\Lambda, a^! \mathrm{pr}_2^! \Lambda) = H^{2d_1}\big(\Gamma_1, a^! \Lambda(d_1)\big)$$

であり，$a$ が closed immersion のときは $\mathrm{cl}(a) \in H^{2d_1}\big(\Gamma_1, a^! \Lambda(d_1)\big) = H^{2d_1}_{\Gamma_1}\big(X_1 \times X_2, \Lambda(d_1)\big)$ は $\Gamma_1$ の refined cycle class となる．また，一般の correspondence $a$ に対して，$\mathrm{cl}(a)$ の $\text{Coh-corr}(\Lambda, \Lambda) = H^{2d_1}\big(X_1 \times X_2, \Lambda(d_1)\big)$ での像は 3.1 節で用いた $\mathrm{cl}(\Gamma_1)$ に他ならない．

$b\colon \Gamma_2 \longrightarrow X_1 \times X_2$ を別の correspondence とし，$\Gamma_2$ が normal かつ $\dim \Gamma_1 = d_1$ であると仮定すると，上と同様にして $\mathrm{cl}({}^t b) \in \text{Coh-corr}({}^t b; \Lambda, \Lambda) = H^{2d_2}(\Gamma_2, b^! \Lambda(d_2))$ が定まる．これの $H^{2d_2}(X_1 \times X_2, \Lambda(d_2))$ での像は $\mathrm{cl}(\Gamma_2)$ に等しい．

このとき，pairing $\langle\ ,\ \rangle_\Xi$ は

$$\begin{aligned} H^{2d_1}(\Gamma_1, a^! \Lambda(d_1)) \otimes H^{2d_2}(\Gamma_2, b^! \Lambda(d_2)) &\longrightarrow H^{2d}(\Xi, a^! \Lambda(d_1) \overset{\mathbf{L}}{\otimes} b^! \Lambda(d_2)) \\ &= H^{2d}(\Xi, c^! \Lambda(d)) = H^0(\Xi, K_\Xi) \end{aligned}$$

となる．Lefschetz-Verdier 跡公式の右辺はこれに trace map $\rho_\Xi\colon H^0(\Xi, K_\Xi) \longrightarrow \Lambda$ を合成したものである．

一方，$\rho_\Xi$ は次のように分解する：

$$H^0(\Xi, K_\Xi) \longrightarrow H^0(X_1 \times X_2, K_{X_1 \times X_2}) = H^{2d}(X_1 \times X_2, \Lambda(N)) \xrightarrow{\rho_{X_1 \times X_2}} \Lambda.$$

これについて可換図式

$$\begin{tikzcd} H^{2d_1}(\Gamma_1, a^! \Lambda(d_1)) \otimes H^{2d_2}(\Gamma_2, b^! \Lambda(d_2)) \arrow[r, "\langle\ ,\ \rangle_\Xi"] \arrow[d] & H^0(\Xi, K_\Xi) \arrow[d] \arrow[dr, "\rho_\Xi"] & \\ H^{2d_1}(X_1 \times X_2, \Lambda(d_1)) \otimes H^{2d_2}(X_1 \times X_2, \Lambda(d_2)) \arrow[r, "\cup"'] & H^{2d}(X_1 \times X_2, \Lambda(d)) \arrow[r, "\rho_{X_1 \times X_2}"'] & \Lambda \end{tikzcd}$$

を考えれば，

$$\begin{aligned} \mathrm{loc}_\Xi(\mathrm{cl}(a), \mathrm{cl}({}^t b)) &= \rho_\Xi(\langle \mathrm{cl}(a), \mathrm{cl}({}^t b) \rangle_\Xi) = \rho_{X_1 \times X_2}(\mathrm{cl}(\Gamma_1) \cup \mathrm{cl}(\Gamma_2)) \\ &= \langle \mathrm{cl}(\Gamma_1), \mathrm{cl}(\Gamma_2) \rangle_{X_1 \times X_2} = \langle \mathrm{cl}(\Gamma_2), \mathrm{cl}(\Gamma_1) \rangle_{X_1 \times X_2} \end{aligned}$$

となり，定理 3.1 の右辺と確かに一致している．

なお，$a$, $b$ が closed immersion であり，$p \in \Xi$ が $\Xi$ の孤立点の場合，$\mathrm{loc}_p(\mathrm{cl}(a), \mathrm{cl}({}^t b))$ は $p$ における $\Gamma_1$ と $\Gamma_2$ の交叉重複度に一致することも上の議論から分かる．

**注意 3.16**

上の例において，$\mathrm{cl}(a)$, $\mathrm{cl}({}^t b)$ の構成には $X_i$ の properness は不要である（nonproper の場合を後に用いる）．

**例 3.17**

$X_1$, $X_2$ を proper とは限らないスキームとし，$j_1\colon X \hookrightarrow \overline{X}_1$, $j_2\colon X_2 \hookrightarrow \overline{X}_2$ をそれらのコンパクト化とする．$a\colon \Gamma \longrightarrow X_1 \times X_2$ を correspondence とし，$a_1$ が proper であると仮定する．$a$ のコンパクト化 $\overline{a}\colon \overline{\Gamma} \longrightarrow \overline{X}_1 \times \overline{X}_2$ を 1 つとり，自然な包含写像を $j_{\Gamma_1}\colon \Gamma \hookrightarrow \overline{\Gamma}$ とおく．$L_i \in \mathrm{obj}\, D^b_{\mathrm{ctf}}(X_i, \Lambda)$ とすると，$u \in \text{Coh-corr}(a; L_1, L_2)$ に対し，$j_! u \in \text{Coh-corr}(\overline{a}; j_{1!} L_1, j_{2!} L_2)$ が次のようにして得られる：

$$j_! u\colon \overline{a}_1^* j_{1!} L_1 \xrightarrow{①} j_! a_1^* L_1 \xrightarrow{j_!(u)} j_! a_2^! L_2 \longrightarrow \overline{a}_2^! j_{2!} L_2.$$

ただし，①は次のようにして定まる：adjunction map $L_1 \longrightarrow a_{1*}a_1^*L_1$ に $j_!$ を施して，$j_{1!}L_1 \longrightarrow j_{1!}a_{1*}a_1^*L_1 = j_{1!}a_{1!}a_1^*L_1 = \overline{a}_{1!}j_!a_1^*L_1 = \overline{a}_{1*}j_!a_1^*L_1$ を得る．これから adjoint によって得られる射が①である．

**例 3.18**

$X_1, X_2, L_1, L_2$ を例 3.17 の通りとする．$a\colon \Gamma_1 \longrightarrow X_1 \times X_2$, $b\colon \Gamma_2 \longrightarrow X_1 \times X_2$ を 2 つの correspondence とし，$a_1$, $b_2$ が proper であると仮定し，それぞれのコンパクト化をとる．このとき，

$$j_{\Gamma_1!}\colon \text{Coh-corr}(a; L_1, L_2) \longrightarrow \text{Coh-corr}(\overline{a}; j_{1!}L_1, j_{2!}L_2),$$
$$j_{\Gamma_2!}\colon \text{Coh-corr}({}^t b; L_2, L_1) \longrightarrow \text{Coh-corr}({}^t\overline{b}; j_{2!}L_2, j_{1!}L_2)$$

が存在する．$\Xi = \Gamma_1 \times_{X_1 \times X_2} \Gamma_2$, $\overline{\Xi} = \overline{\Gamma}_1 \times_{\overline{X}_1 \times \overline{X}_2} \overline{\Gamma}_2$ とおき，$\Xi$ が $k$ 上 proper であると仮定する．このとき，$u \in \text{Coh-corr}(a; L_1, L_2)$, $v \in \text{Coh-corr}({}^t b; L_2, L_1)$ をとり，$j_{\Gamma_1!}u$, $j_{\Gamma_2!}v$ に Lefschetz-Verdier 跡公式を適用すると次のようになる：

$$\mathrm{Tr}\big((j_{\Gamma_2!}v)_* \circ (j_{\Gamma_1!}u)_*; R\Gamma_c(X_1, L_1)\big) = \mathrm{loc}_{\Xi}(u, v) + \sum_{D \in \pi_0(\overline{\Xi} \setminus \Xi)} \mathrm{loc}_D\big(j_{\Gamma_1!}u, j_{\Gamma_2!}v\big).$$

ここで命題 3.10 より従う等式 $\mathrm{loc}_{\Xi}\big(j_{\Gamma_1!}u, j_{\Gamma_2!}v\big) = \mathrm{loc}_{\Xi}(u, v)$ を用いた．

## 3.3 Deligne 予想

前節の例 3.18 において proper とは限らないスキームの跡公式を述べたが，そこには $\sum_{D \in \pi_0(\overline{\Xi} \setminus \Xi)} \mathrm{loc}_D\big(j_{\Gamma_1!}u, j_{\Gamma_2!}v\big)$ という，コンパクト化に依存した「無限遠部分の寄与」が現れた．本節で述べる Deligne 予想とは，大雑把に言えば，考えているスキームが有限体上定義されるとき，correspondence に Frobenius 射を十分合成するとこの寄与が消えることを主張するものである．

### 3.3.1 設定と主張

以下では，すべてのスキームは $\overline{\mathbb{F}}_q$ 上有限型であり，$\mathbb{F}_q$ 上定義されているとする．また，スキーム間の射も $\mathbb{F}_q$ 上定義されているとする．Frob で $\mathbb{F}_q$ 上の相対 Frobenius 射を表す．

まず設定を述べる．$X$ を proper なスキームとし，$a\colon \Gamma \longrightarrow X \times X$ を correspondence とする．$a$ に対し，$\mathrm{Frob}^n * a$ を $(\mathrm{Frob}^n * a)_1 = \mathrm{Frob}^n \circ a_1$, $(\mathrm{Frob}^n * a)_2 = a_2$ を満たす correspondence として定める．また，$\mathrm{Fix}\, a$ を $a$ と $\Delta_X\colon X \longrightarrow X \times X$ の $X \times X$ 上のファイバー積とする．$j\colon U \hookrightarrow X$ を $X$ の開部分スキームで次の条件を満たすものとする：

$a_U\colon \Gamma_U \longrightarrow U \times U$ を $a$ の $U \times U$ への制限とするとき，$a_{U1}$ は proper である．

$L \in \mathrm{obj}\, D^b_{\mathrm{ctf}}(U, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ とする．

**注意 3.19**

前節まででは $a\colon \Gamma_1 \longrightarrow X_1 \times X_2$, $b\colon \Gamma_2 \longrightarrow X_1 \times X_2$ について跡公式を定式化したが，ここでは [Fu1] 等に従い $X_1 = X_2 = X$, $L_1 = L_2 = L$, $b = \Delta_X$ の場合に限っている（以下の議論から分かるように，これは必要な制限である）．後に少し一般化を行う．

まず，十分大きな $n$ に対しては $\mathrm{Fix}(\mathrm{Frob}^n * a_U)$ は孤立点のみからなることを証明しよう．これは Zink の補題と呼ばれている．

**補題 3.20** （[Zi] Lemma 2.3, [Pi] Lemma 7.1.2）

$n$ を自然数とする．$a_{U2}$ が準有限射であり，その degree がいたるところで $q^n$ より小さいとき，$\mathrm{Fix}(\mathrm{Frob}^n * a_U)$ は孤立点のみからなる．

**証明**　$\mathrm{Fix}(\mathrm{Frob}^n * a_U)$ が既約な曲線 $C$ を含んでいると仮定し，その $U$ における像を $C'$ とする．このとき，$\mathrm{Frob}^n \circ a_{U1}\colon C \longrightarrow C'$ の次数は $q^n$ 以上であり，したがって $a_{U2}\colon C \longrightarrow C'$ の次数より大きいので，$C$ 上で $\mathrm{Frob}^n \circ a_{U1} = a_{U2}$ となっていることに矛盾する． ∎

**定義 3.21（naive local term）**

$a_{U2}$ が準有限射であるとする．$P$ を $\mathrm{Fix}\, a_U$ の孤立点とし，$Q = a_1(P) = a_2(P)$ とおく．$u \in \text{Coh-corr}(a_U; L)$ に対し，

$$L_Q = (a_{U1}^* L)_P \xrightarrow{u_P} (a_{U2}^! L)_P \hookrightarrow \bigoplus_{P' \in a_{U2}^{-1}(Q)} (a_{U2}^! L)_{P'} = (a_{U2!} a_{U2}^! L)_Q \xrightarrow{\mathrm{adj}} L_Q$$

の合成のトレースを $\text{naive-loc}_P(u)$ と書き，naive local term と呼ぶ．

**注意 3.22**

$\mathrm{loc}_P$ は $P$ の étale 近傍のみによって定まっていたが，$\text{naive-loc}_P$ はさらに強く $a$ などの $P$ 上への制限のみから定まっている．特に，$L_{a_1(P)} = 0$ ならば naive local term は $0$ である．

local term と naive local term は必ずしも一致しない（むしろ一致しない場合が多い）．例えば，$U$ が smooth，$a$ が proper な射 $f\colon U \longrightarrow U$ のグラフ $\gamma_f$ であり，$L = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ であるとする．$P$ を $\mathrm{Fix}\,\gamma_f$ の孤立点とする．$u = \mathrm{cl}(\gamma_f) = \mathrm{Id}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} \in \text{Coh-corr}(\gamma_f; \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ に対し，$\mathrm{loc}_P(u)$ は $P$ における $\gamma_f$ と $\Delta_X$ の交叉重複度に等しい（例 3.15）が，一方 $\text{naive-loc}_P(u) = 1$ である．

すぐ後に述べる Deligne 予想は，$a$ に Frob を十分合成すると local term と naive local term が一致するという主張を含んでいるが，これは上記の場合には $\mathrm{Frob}^n * \gamma_f$ が $\Delta_X$ と横断的に交わるという主張に相当する．

**定理 3.23（Deligne 予想）**

記号は全て上述の通りとし，$a_{U2}$ が準有限射であると仮定する．このとき，十分大きい

$n$ に対して次が成り立つ：

任意の $u \in \text{Coh-corr}(\text{Frob}^n * a_U, L)$ に対し，

$$\mathrm{Tr}\big((j_!u)_*; R\Gamma_c(U,L)\big) = \sum_{P\in \mathrm{Fix}(\mathrm{Frob}^n * a)} \text{naive-loc}_P(u).$$

**例 3.24**

定理 3.23 の最も有名な例を 1 つ挙げる．$X = \mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q}$，$U = \mathbb{A}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ とし，$f_U\colon \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^1$ を $x \longmapsto x+1$ で，$f$ をその $\mathbb{P}^1$ への自然な延長で定める．このとき，$f_U$ の固定点は存在しないが，$\mathrm{Tr}(f_U^*; H_c^*(U,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)) = 1$ となり定理の等式は成立しない．しかし $f_U$ を $\mathrm{Frob}\circ f_U$ に換えると，固定点は $q$ 個でそれら全てに対して naive local term は 1 であり，また $\mathrm{Tr}\big((\mathrm{Frob}\circ f_U)^*; H_c^*(U,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\big) = q$ となるので，この場合定理の等式は成立する．

定理 3.23 はその名称通り Deligne によって予想されたものであるが，Deligne がこの予想を述べた文献を筆者は知らない．$a = \Delta_X$ の場合，すなわち Frob についての跡公式は [SGA4 1/2], [Rapport] や [SGA5], Exposé XII などで（もちろん Deligne の予想よりも先行して）得られており，さほど難しいものではない．Weil 予想の証明に用いられるのはこの跡公式である．$X$ が 1 次元 smooth の場合は [SGA5] Exposé III B において Illusie が証明を与えている．また，$U$ が 2 次元 smooth で $L$ がモノドロミー有限な smooth 層の場合は Zink（[Zi]）によって証明されており，$X$ が一般次元の場合は，Pink（[Pi]）により特異点解消の存在を仮定した証明が得られている（Shpiz も独立に証明を得ていたそうであるが，論文は現時点では出版されておらず筆者は未確認である）．そして完全に一般の設定のもとでの特異点解消を仮定しない最終的な解決は，藤原氏の論文 [Fu1] においてなされた．藤原氏の証明方針は，Illusie の最初の証明を踏襲した Pink らの結果と大きく異なっており，Deligne 予想が成立する根源的な理由の 1 つを明らかにしている．本節ではそれを概観することにする．なお，以下の記述は藤原氏の講演に強く影響を受けていることを明記しておく．

[Fu1] の証明は，大まかには次の 2 つの部分に分かれている：

(†) $K \in \mathrm{obj}\, D^b_{\mathrm{ctf}}(X,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ とする．$a$ が $D \in \pi_0(\mathrm{Fix}\, a)$ のまわりで「縮小的」であるときに，$u \in \text{Coh-corr}(a;K)$ に対し $\mathrm{loc}_D(u) = \text{naive-loc}_D(u)$ を証明する（ここで，$D \in \pi_0(\mathrm{Fix}\, a)$ が孤立点でない場合にも naive local term の定義を拡張する必要がある．下記の定義参照）．

(‡) $n$ が十分大きいときには，$\mathrm{Frob}^n * a$ は $X \setminus U$ および $D \in \mathrm{Fix}(\mathrm{Frob}^n * a_U)$ のまわりで「縮小的」になる．

ここで，$\text{Coh-corr}(a;K,K)$ のことを $\text{Coh-corr}(a;K)$ と略記した．また，$\delta_X = \mathrm{Id}_K \in \text{Coh-corr}(\Delta_X, K) = \mathrm{Hom}(K,K)$ とおき，$\mathrm{loc}_D(u,\delta_X)$ のことを $\mathrm{loc}_D(u)$ と書いた．

$D \in \pi_0(\mathrm{Fix}\, a)$ が孤立点でない場合の naive local term の定義は次の通りである：

**定義 3.25（孤立点とは限らない場合の naive local term）**

記号はすべて上記の通りとする．ただし $a_{2U}$ が準有限射であることは仮定しない．$D \in \pi_0(\mathrm{Fix}\, a)$ に対し，$D' = a_1(D) = a_2(D)$ とおき，$u \in \text{Coh-corr}(a; K)$ に対して $u|_D \in \text{Coh-corr}(a|_D; K|_{D'})$ を

$$
\begin{aligned}
(a|_D)_1^* K|_{D'} = (a|_D)_1^* i_{D'}^* K = i_D^* a_1^* K \xrightarrow{i_D^* u} i_D^* a_2^! K = i''^* i'^* a_2^! K \\
= i''^* a_2'^! i_{D'}^* K = (a|_D)_2^! K|_{D'}
\end{aligned}
$$

の合成と定め，さらに naive-$\mathrm{loc}_D(u) = \mathrm{Tr}\big(u|_{D*}; R\Gamma(D', K|_{D'})\big)$ と定める．

ただし，$i_D \colon D \hookrightarrow \Gamma$, $i_{D'} \colon D' \hookrightarrow X$ とする．また，$i'$, $i''$, $a_2'$ は下の図式（正方形は cartesian である）から定まるものとする：

$$
\begin{tikzcd}
\Gamma \arrow[d, "a_2"'] & D'' \arrow[l, "i'"'] \arrow[d, "a_2'"] & D \arrow[l, "i''"'] \arrow[dl, "(a|_D)_2"] \arrow[ll, bend right, "i_D"'] \\
X & D' \arrow[l, "i_{D'}"] &
\end{tikzcd}
$$

なお，$j_! L|_U = 0$ より naive-$\mathrm{loc}_{X \setminus U}(j_! u) = 0$ である（注意 3.22）ので，(†), (‡) から定理 3.23 は次のように簡単に導くことができる：$n$ を補題 3.20 および (‡) の条件を満たすように十分大きくとり，$(X, j_! L, j_! u)$ に対する Lefschetz-Verdier 跡公式と (†) を適用すると，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\big((j_! u)_*; R\Gamma_c(U, L)\big) &= \mathrm{loc}_{X \setminus U}(j_! u) + \sum_{P \in \mathrm{Fix}(\mathrm{Frob}^n * a)} \mathrm{loc}_P(u) \\
&= \text{naive-}\mathrm{loc}_{X \setminus U}(j_! u) + \sum_{P \in \mathrm{Fix}(\mathrm{Frob}^n * a)} \text{naive-}\mathrm{loc}_P(u) \\
&= \sum_{P \in \mathrm{Fix}(\mathrm{Frob}^n * a)} \text{naive-}\mathrm{loc}_P(u)
\end{aligned}
$$

となり示すべき等式が従う．

### 3.3.2 縮小的な correspondence とリジッド幾何

まずは (†) について述べる．$\mathbb{C}$ 上の多様体の場合，縮小的な correspondence $a$ に対する local term が簡単になるという事実は以前から知られていた（例えば [G-M] 参照）．それは次のような議論に基づく：

$X$ をコンパクトな解析多様体とする．簡単のため $a$ が $f \colon X \longrightarrow X$ のグラフとして得られる場合を扱う．$D \in \pi_0(\mathrm{Fix}\, f)$ のまわりで $f$ が縮小的であるとき，$D$ の開近傍系 $\{V_i\}_{i \geq 0}$ で，

- $\cdots \supset V_{i-1} \supset V_i \supset V_{i+1} \supset \cdots$,
- $f(V_i) \subset V_{i+1}$,

- $\bigcap \overline{V}_i = D$ ($\overline{V}_i$ は $V_i$ の閉包)

となるものがとれる．$f_i$, $\overline{f}_i$, $g_i$, $j_i$, $v_i$ を次の図式で定める：

$$\begin{tikzcd}
V_{i+1} \arrow[r, "j_i"] \arrow[d, "f_{i+1}"'] & V_i \arrow[r, "v_i"] \arrow[d, "f_i"] \arrow[dl, "g_i"'] & \overline{V}_i \arrow[r] \arrow[d, "\overline{f}_i"] & X \arrow[d, "f"] \\
V_{i+1} \arrow[r, "j_i"] & V_i \arrow[r, "v_i"] & \overline{V}_i \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

$u \in \text{Coh-corr}(a; K) = \text{Hom}(f^*K, K)$ に対して $u|_{V_i}\colon f_i^*(K|_{V_i}) = (f^*K)|_{V_i} \longrightarrow K|_{V_i}$ とし，

$$j_{i*}(u|_{V_i})\colon \overline{f}_i^* j_{i*}(K|_{V_i}) \longrightarrow j_{i*}f_i^*(K|_{V_i}) \xrightarrow{j_{i*}(u|_{V_i})} j_{i*}(K|_{V_i})$$

として $j_{i*}(u|_{V_i}) \in \text{Coh-corr}\bigl(a|_{\overline{V}_i}; j_{i*}(K|_{V_i})\bigr)$ を定める．このcohomological correspondenceに対して Lefschetz-Verdier 跡公式を使う（$\overline{V}_i$ はコンパクトである！）と，

$$\text{Tr}\bigl((u|_{V_i})_*; R\Gamma(V_i, K|_{V_i})\bigr) = \sum_{\substack{D \in \pi_0(\text{Fix } a),\\ D \subset \overline{V}_i}} \text{loc}_D\bigl(j_{i*}(u|_{V_i})\bigr)$$

が得られる．ここで，①を

$$R\Gamma(V_{i+1}, K|_{V_{i+1}}) \xrightarrow{g_i^*} R\Gamma\bigl(V_i, g_i^*(K|_{V_{i+1}})\bigr) = R\Gamma\bigl(V_i, f_i^*(K|_{V_i})\bigr) \xrightarrow{R\Gamma(u|_{V_i})} R\Gamma(V_i, K|_{V_i})$$

から誘導される準同型とすると，次の図式

$$\begin{tikzcd}
H^\nu(V_i, K|_{V_i}) \arrow[r, "(u|_{V_i})_*"] \arrow[d, "j_i^*"] & H^\nu(V_i, K|_{V_i}) \arrow[d, "j_i^*"] \\
H^\nu(V_{i+1}, K|_{V_{i+1}}) \arrow[r, "(u|_{V_{i+1}})_*"'] \arrow[ur, "①"'] & H^\nu(V_{i+1}, K|_{V_{i+1}})
\end{tikzcd}$$

が可換になり，これと $\varinjlim_i H^\nu(V_i, K|_{V_i}) = H^\nu(D, K|_D)$ であることから，左辺は

$$\text{naive-loc}_D(u) = \text{Tr}\bigl((u|_D)_*; R\Gamma(D, K|_D)\bigr)$$

に等しい（下の補題参照）．

**補題 3.26** ([Fu1], Lemma 3.2.10)
$k$ を標数0の体とする．$\{W_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ を $k$ 上の有限次元ベクトル空間の帰納系とし，transition map を $W_i \xrightarrow{v_i} W_{i+1}$ とする．また，$f_i\colon W_i \longrightarrow W_i$ を帰納系の間の射とし，$f\colon \varinjlim_i W_i \longrightarrow \varinjlim_i W_i$ を帰納極限に誘導される線型写像とする．さらに次の2つを仮定する：

i) $g_i\colon V_{i+1} \longrightarrow V_i$ で $f_{i+1} = g_i \circ v_i$, $f_{i+1} = v_i \circ g_i$ を満たすものが存在する．

ii) $W = \varinjlim_i W_i$ は有限次元である．

このとき，$\text{Tr}(f_i; W_i) = \text{Tr}(f, W)$ が成り立つ．

**証明** まず，$W=0$ の場合に帰着する．$W_i \longrightarrow W$ の核を $W_i'$，像を $W_i''$ とおくと，$\{W_i'\}$，$\{W_i''\}$ は帰納系になり，補題の条件 i) および $\varinjlim_i W_i' = \varinjlim_i W_i'' = 0$ を満たす．よって，$W=0$ の場合の命題が示されていたとすると，$\mathrm{Tr}(f_i'; W_i') = \mathrm{Tr}(f_i''; W_i'') = 0$ となり，$\mathrm{Tr}(f_i; W_i) = \mathrm{Tr}(f; W)$ が従う．

次に，$W=0$ の場合を証明する．$f_i$ が冪零であることを証明すればよい．$W_i$ に $F_s W_i = \mathrm{Ker}(v_{i+s} \circ v_{i+s-1} \circ \cdots \circ v_i)$ としてフィルトレーション $F_\bullet$ を入れる．$W=0$ であるから，十分大きい $s$ に対して $F_s W_i = W_i$ である．また，$f_m = g_m \circ v_m = v_{m-1} \circ g_{m-1} = f_{m-1}$ より，$F_\bullet$ は $f_i$ で保たれる．

$v_{i+s-1} \circ \cdots \circ v_i$ によって $(\mathrm{Gr}_s W_i, f_i)$ は $(\mathrm{Ker}\, v_{i+s}, f_{i+s})$ の部分空間とみなすことができる．また，$f_{i+s} = g_{i+s} \circ v_{i+s}$ より，$f_{i+s}$ は $\mathrm{Ker}\, v_{i+s}$ 上零写像である．これより，$f_i$ は $\mathrm{Gr}_s$ 上零写像であり，したがって $W_i$ 上冪零である． ∎

また，$\bigcap \overline{V}_i = D$ から，十分大きな $i$ に対して右辺は $\mathrm{loc}_D\bigl(j_{i*}(u|_{V_i})\bigr) = \mathrm{loc}_D(u)$ に等しい．これより $\mathrm{loc}_D(u) = \text{naive-}\mathrm{loc}_D(u)$ が得られる．

この議論においては，

- $\overline{V}_i$ の Lefschetz-Verdier 跡公式
- コホモロジーの連続性 $\varinjlim_i H^\nu(V_i, K|_{V_i}) = H^\nu(D, K|_D)$

の 2 つが本質的であったことに注意しよう．特に，$\overline{V}_i$ は一般には解析多様体とはならないので，このような空間（劣解析的集合）に対しても跡公式を証明しておくことが肝要である．

上記の議論をスキームに対して適用したいのであるが，correspondence が縮小的であることを定義するにあたって，通常の代数幾何で用いられる Zariski 位相や étale 位相では不十分である．「閉包をとる」という操作で開集合が大きくなりすぎてしまい，上記のような $f(\overline{V}_i) \subset V_{i+1}$ という状況が滅多に起こらないのである．そこで，$V = \overline{\mathbb{F}_q[[T]]}$ 上の $X$ の「自明な変形」$X \otimes_{\mathbb{F}_q} V$ を考え，その生成ファイバーの $T$ 進位相によって $X$ 上の correspondence の縮小性をはかるというのが基本的なアイデアである．縮小的対応を定義する前に，具体例を一つ見ておこう：

**例 3.27**

例 3.24 を correspondence の縮小性によって解釈してみよう．$y$ を $\infty \in \mathbb{P}^1$ における局所座標とすると，$f(y) = y/(y+1)$ となるので，十分小さい $\varepsilon$ に対し $|y| = \varepsilon$ とすると（$|y|$ は $y$ の $T$ 進絶対値を表す）$|f(y)| = \varepsilon$ となる．これは $f$ が $\infty$ のまわりで縮小的ではないことを示しており，これが定理 3.23 の等式が成立していない理由の 1 つであると考えられる．

一方，$\mathrm{Frob} \circ f(y) = y^p/(y+1)^p$ となるので，$|y| = \varepsilon$ に対し $|f(y)| = \varepsilon^p \ll \varepsilon$ となり，$\infty$ のまわりで縮小的である．

それでは correspondence の縮小性を定義しよう．ここでは，藤原氏によるリジッド幾何の formalism を用いる（詳細は [Fu2] を参照のこと）．$V$ 上のスキーム $X$ に対し，それを $T$ 進完備化して得られる形式スキームを $\widehat{X}$，$\widehat{X}$ に伴うリジッド空間を $\widehat{X}^{\mathrm{rig}}$ と書く．

**定義 3.28** ([Fu1], Definition 3.1.1)

$X$ を $V$ 上の proper なスキームとし，$a\colon \Gamma \longrightarrow X\times X$ を correspondence とする．また，$D\in\pi_0(\mathrm{Fix}\,a)$ とする．$\alpha=a^{\mathrm{rig}}$ が $\widehat{D}^{\mathrm{rig}}$ のまわりで縮小的であるとは，$\widehat{D}^{\mathrm{rig}}$ の準コンパクトな開近傍 $\mathscr{V}$ と $X^{\mathrm{rig}}$ の準コンパクト開集合系 $\{\mathscr{U}_i\}_{i\in\mathrm{N}}$ で次の条件を満たすものが存在することをいう：

- $\cdots\supset\mathscr{U}_{i-1}\supset\mathscr{U}_i\supset\mathscr{U}_{i+1}\supset\cdots$,
- $\bigcap_{i\in\mathrm{N}}\alpha_2^{-1}(\mathscr{U}_i)\cap\mathscr{V}=\widehat{D}^{\mathrm{rig}}$,
- $\alpha_1\bigl(\alpha_2^{-1}(\mathscr{U}_i)\cap\mathscr{V}\bigr)\subset\mathscr{U}_{i+1}$,
- $\alpha_2|_{\mathscr{V}\cap\alpha_2^{-1}(\mathscr{U}_i)}\colon\mathscr{V}\cap\alpha_2^{-1}(\mathscr{U}_i)\longrightarrow\mathscr{U}_i$ は proper.

**注意 3.29**

上の定義中の条件が成立している場合，

$$\bigcap_{i\in\mathrm{N}}\overline{\alpha_2^{-1}(\mathscr{U}_i)}\cap\overline{\mathscr{V}}=\overline{\bigcap_{i\in\mathrm{N}}\alpha_2^{-1}(\mathscr{U}_i)\cap\mathscr{V}}=\overline{\widehat{D}^{\mathrm{rig}}}=\widehat{D}^{\mathrm{rig}}$$

となり（最初の等号では [Fu2], 4.5.5 を用いた），前述の解析多様体の場合に仮定した性質 $\bigcap_i\overline{V}_i=D$ の類似が成り立つ.

次の定理が (†) において最も本質的である：

**定理 3.30** ([Fu1], Theorem 3.2.4)

$(X,\Gamma,a)$, $D$ を定義 3.28 と同様とする．$\alpha=a^{\mathrm{rig}}$ が $\widehat{D}^{\mathrm{rig}}$ のまわりで縮小的であるとき，任意の $K\in\mathrm{obj}\,D^b_{\mathrm{ctf}}(X_\eta,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ および $u\in\text{Coh-corr}(a_\eta,K)$ に対して次が成り立つ：

$$\mathrm{loc}_{D_\eta}(a_\eta,K)=\text{naive-loc}_{D_\eta}(a_\eta,K).$$

ただし，$a_\eta\colon\Gamma_\eta\longrightarrow X_\eta\times X_\eta$ は $a\colon\Gamma\longrightarrow X\times X$ の生成ファイバーを表すものとする.

これを解析多様体の場合と同様の方針によって証明するためには，

i) エタールコホモロジーとリジッドエタールコホモロジーの比較定理

ii) 「劣解析的集合」，つまり準コンパクトな開部分リジッド空間 $\mathscr{U}\subset\mathscr{X}$ の閉包として得られる集合についての跡公式

iii) コホモロジーの連続性

の 3 つが不可欠である．i) は [Fu2] で証明されている．ii), iii) に相当するのが次の 2 つの命題である：

**命題 3.31 (Topological Lefschetz trace formula)** ([Fu1], Theorem 2.2.8)

$(X,\Gamma,a)$ を定義 3.28 と同様とし，$(X_s,\Gamma_s,a_s)$ をそれらの特殊ファイバーとする．$U_s$, $V_s$ を開集合とし，$\mathscr{U}=\mathrm{sp}_X^{-1}U_s\subset\widehat{X}^{\mathrm{rig}}$, $\mathscr{V}=\mathrm{sp}_\Gamma^{-1}V_s\subset\widehat{\Gamma}^{\mathrm{rig}}$ とする．次の 3 条件を仮定する：

i) $\mathscr{V}\subset\alpha_1^{-1}(\mathscr{U})\cap\alpha_2^{-1}(\mathscr{U})$,

ii) $(\overline{\mathscr{V}} \setminus \mathscr{V}) \cap \text{top-Fix}\,\alpha = \varnothing$ （top-Fix については下記参照），

iii) $\alpha_2|_{\mathscr{V}} : \mathscr{V} \longrightarrow \mathscr{U}$ は proper.

$j : U_s \longrightarrow \overline{U}_s$ とおく．$K \in \operatorname{obj} D^b_{\mathrm{ctf}}(X_\eta, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ とし，$u \in \text{Coh-corr}(a_\eta; K)$ とする．このとき，次が成り立つ：

$$\sum_{\substack{D \in \pi_0(\mathrm{Fix}\, a_\eta),\\ \widehat{D}^{\mathrm{rig}} \subset \mathscr{V}}} \mathrm{loc}_D(u) = \mathrm{Tr}\big(j_*(u_s|_{U_s}); j_* R\psi_\eta(K)|_{U_s}\big).$$

ここで $u_s \in \text{Coh-corr}\big(a_s; R\psi_\eta(K)\big)$ は $u$ の特殊化（[Fu1], 1.5.4 参照）である．

**命題 3.32** （[Fu1], Theorem 4.1.1）

$k$ を分離閉である高さ 1 の付値体とする．$X$ を $k$ 上の proper かつ有限型であるスキームとし，$Y$ を $X$ の閉部分スキームとする．$\ell$ を $k$ の剰余体の標数と異なる素数とするとき，$K \in \operatorname{obj} D^b_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ に対し次が成り立つ：

$$\varinjlim_{\mathscr{U}} H^q(\mathscr{U}, K^{\mathrm{rig}}|_{\mathscr{U}}) = H^q(Y, K|_Y).$$

ここで左辺の $\varinjlim$ は $Y^{\mathrm{rig}}$ の準コンパクト開近傍 $\mathscr{U}$ にわたってとるものとする．

リジッド空間 $\widehat{X}^{\mathrm{rig}}$ における $\alpha$ の固定点としては，

- スキームとしての固定点 $\mathrm{Fix}\, a_\eta$ のリジッド化 naive-Fix $\alpha = (\mathrm{Fix}\, a_\eta)^{\mathrm{rig}}$
- Zariski-Riemann 空間 $\langle \widehat{X}^{\mathrm{rig}} \rangle$ の固定点 set-Fix $\alpha$

の 2 つが自然に考えられ，一般に naive-Fix $a \subset$ set-Fix $a$ が成立する．命題 3.31 に出てくる top-Fix $\alpha$ はこの 2 つの中間に位置するものであり，$\widehat{X}^{\mathrm{rig}}$ のすべての flat なモデルにおいて固定される $\langle \widehat{X}^{\mathrm{rig}} \rangle$ の点である．すなわち，

$$\text{top-Fix}\,\alpha = \bigcap_{(X', \Gamma', a')} \mathrm{sp}_{\Gamma'}^{-1}(\mathrm{Fix}\, a'_s).$$

となる．ここで $(X', \Gamma', a')$ は $(X, \Gamma, a)$ の admissible ブローアップで得られるもののうち $X', \Gamma'$ が $V$ 上 flat なものを動く．命題 3.31 の証明は，Zariski-Riemann 面の準コンパクト性を用いてよい flat モデルをとり，local term の特殊化での不変性（[Fu1], 1.7.1 参照）を用いることによってなされる．

命題 3.32 は，Deligne のトリック（[SGA4 1/2], [Finitude] 参照）を修正したものを用いて relative curve の場合に帰着し，比較定理を用いることによって証明する．

定理 3.30 を自明な変形に用いることで，(†) の目標である次の定理を得る：

**定理 3.33**

$X$ を $\overline{\mathbb{F}}_q$ 上 proper なスキームとし，$a : \Gamma \longrightarrow X \times X$ を correspondence とする．$D \in$

$\pi_0(\mathrm{Fix}\, a)$ とし，$(a \otimes V)^{\wedge\mathrm{rig}}$ が $(D \otimes V)^{\wedge\mathrm{rig}}$ のまわりで縮小的であるとする．このとき，任意の $K \in \mathrm{obj}\, D^b_{\mathrm{ctf}}(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ および $u \in \text{Coh-corr}(a, K)$ に対して次が成り立つ：

$$\mathrm{loc}_D(a, K) = \text{naive-loc}_D(a, K).$$

**証明**　定理 3.30 と local term の特殊化による不変性，[SGA4 1/2] [Finitude] Théorème 2.13, Corollaire 2.16 の local acyclicity を組み合わせればよい． ∎

**注意 3.34**
実は，無限遠の寄与が消えることを証明するためには，$D \in \pi_0(\mathrm{Fix}\, a)$ よりももう少し一般の $D$ に対して定理 3.33 を証明しておく必要がある．これは，$X \setminus U \subset \mathrm{Fix}\, a$ とは限らないためであるが，詳細は省略する．[Fu2], 3.2 参照．

### 3.3.3　無限遠のまわりで縮小的になること

次に (‡) の部分について述べる．証明するべきことは，十分大きい $n$ に対して $\mathrm{Frob}^n * a$ が $X \setminus U$ および $D' \in \pi_0\big(\mathrm{Fix}(\mathrm{Frob}^n * a)\big)$ のまわりで縮小的であることであるが，ここでは前者のみ扱うことにする．必要なら $X \setminus U$ でブローアップすることにより，$Y = X \setminus U$ は $X$ の Cartier 因子であると仮定してよい．

$Y_1 = Y \times X, Y_2 = X \times Y$ を $X \times X$ の因子とする．$\pi\colon Z \longrightarrow X \times X$ を $Y \times Y$ における $X \times X$ のブローアップとし，$E$ をその例外因子とする．$Y_i$ の weak transform を $\widetilde{Y}_i$ とおく．$\Gamma \times_{X \times X} Z$ の strict transform を $\alpha\colon \widetilde{\Gamma} \longrightarrow Z$ とおき，$a'\colon \widetilde{\Gamma} \xrightarrow{\alpha} Z \xrightarrow{\pi} X \times X$ とする．

**定義 3.35**
$a$ が $Y$ に沿って vanishing order $> 1$ であるとは，$\alpha(\widetilde{\Gamma}) \cap E \subset (\widetilde{Y}_1)_{\mathrm{red}}$ が成立することをいう．

**注意 3.36**
$\mathscr{I}_{\widetilde{Y}_1}, \mathscr{I}_E$ で $\widetilde{Z}$ における $\widetilde{Y}_1, E$ の定義イデアルを表すことにすると，定義 3.35 は $s \geq 1$ と $\alpha(\widetilde{\Gamma})$ 上のイデアル層 $\mathscr{J}$ が存在して $\alpha(\widetilde{\Gamma})$ 上で $\mathscr{I}^s_{\widetilde{Y}_1} = \mathscr{J} \cdot \mathscr{I}_E$ が成立することと同値である．$Y_1$ の定義イデアル $\mathscr{I}_{Y_1}$ の引き戻し $\pi^{-1}\mathscr{I}_{Y_1}$ は $\mathscr{I}_{\widetilde{Y}_1} \cdot \mathscr{I}_E$ に等しいので，上の条件は $\alpha(\widetilde{\Gamma})$ 上で $Y_1$ が $(1 + 1/s)E$ よりも「大きい」ことを表している．これが「vanishing order $> 1$」の意味するところである．

実は $Y$ に沿って vanishing order $> 1$ であることは，$Y$ のまわりで縮小的であるための十分条件である．すなわち，次の命題が成り立つ：

**命題 3.37**
設定は定義 3.35 と同様とする．このとき，$a$ が $Y$ に沿って vanishing order $> 1$ であるならば，$(a \otimes V)^{\wedge\mathrm{rig}}$ は $\big(a_2^{-1}(Y) \otimes V\big)^{\wedge\mathrm{rig}}$ のまわりで縮小的である．

この命題の証明の基本的なアイデアは，$\mathscr{X} = (X \otimes V)^{\wedge \mathrm{rig}}$ の点に対して $\mathscr{Y} = (Y \otimes V)^{\wedge \mathrm{rig}}$ からの「距離」を定義し，それが $a$ によって減少することを証明するというものであり，例 3.27 の自然な拡張であるといえる．実際には，Zariski-Riemann 空間 $\langle \mathscr{X} \rangle$ を分離化して得られるコンパクト Hausdorff 空間 $[\mathscr{X}]$ に $Y$ の局所方程式を用いて局所的に距離を定義し，それを 1 の分割を用いて貼り合わせるという技術を用いる．詳細は [Fu1], Proposition 5.3.5 を参照されたい．

残るは次の命題である：

**命題 3.38**

定義 3.35 と同様の設定のもとで，自然数 $N$ が存在し，$n \geq N$ に対して $\mathrm{Frob}^n *a$ は $Y$ に沿って vanishing order $> 1$ である．

**証明**

簡単のため，$\mathrm{Frob}^n *a$ を $a^{(n)}$ と書くことにする．主張は $X$ について局所的であるから，$Y \subset X$ が 1 つの定義方程式 $f = 0$ をもつとしてよい（本節冒頭の仮定より，$f$ は $\mathbb{F}_q$ 上定義されることを注意しておく）．$f', f''$ をそれぞれ $\mathrm{pr}_1 \colon Z = X \times X \longrightarrow X, \mathrm{pr}_2 \colon Z = X \times X \longrightarrow X$ による $f$ の引き戻しとする．$f' = 0, f'' = 0$ はそれぞれ $Y_1, Y_2$ の定義方程式である．ここで，$a_{U1}$ は proper であるから，

$$a_2^{-1}(Y) \subset a_1^{-1}(Y) \iff a^{-1}(Y_2) \subset a^{-1}(Y_1) \iff Y_2 \cap a(\Gamma) \subset Y_1 \cap a(\Gamma)$$

が成立する．よって，整数 $e \geq 1$ および $a(\Gamma)$ 上で定義される関数 $h$ が存在して，$f'^e = hf''$ となる．$n$ を $q^n > e$ となるようにとり，$h$ を $X \times X \xrightarrow{\mathrm{Id} \times \mathrm{Frob}^n} X \times X$ で引き戻したものを $h'$ とおく．$h'$ は $(\mathrm{Id} \times \mathrm{Frob}^n)^{-1}\bigl(a(\Gamma)\bigr)$ 全体で定義される関数である．このとき，$f'^e = h' f''^{q^n}$ が成立する．$(\mathrm{Id} \times \mathrm{Frob}^n)\bigl(a^{(n)}(\Gamma)\bigr) = \mathrm{Frob}^n_{X \times X}\bigl(a(\Gamma)\bigr) \subset a(\Gamma)$ より，$a^{(n)}(\Gamma) \subset (\mathrm{Id} \times \mathrm{Frob}^n)^{-1}\bigl(a(\Gamma)\bigr)$ であるから，$a^{(n)}(\Gamma)$ 上でも $f'^e = h' f''^{q^n}$ となる．よって，$\alpha^{(n)}(\widetilde{\Gamma}) \subset Z$ 上で $(f'/f'')^e = h' f''^{q^n - e}$ が成立する（ブローアップのとり方から，$f'/f''$ は $Z$ 全体で定義されることに注意）．

一方，$E$ 上では $f' = f'' = 0$ となり，したがって $\alpha^{(n)}(\widetilde{\Gamma}) \cap E$ では $f'/f'' = 0$ となる．$Z$ における $\widetilde{Y}_1$ の定義方程式は $f'/f'' = 0$ であるから，これは $\bigl(a^{(n)}(\Gamma^{(n)})\bigr) \cap E \subset (\widetilde{Y}_1)_{\mathrm{red}}$ を意味している． ∎

**注意 3.39**

上の証明から，次の条件を満たす $n_0$ が存在することも分かる：

$a \colon \Gamma \longrightarrow X \times X$ の $X \times X \xrightarrow{\mathrm{Id} \times \mathrm{Frob}^{n_0}} X \times X$ での引き戻しを $a' \colon \Gamma' \longrightarrow X \times X$ とおくと，任意の $n \geq 0$ に対し $\mathrm{Frob}^n *a$ は $Y$ に沿って vanishing order $> 1$ である．

### 3.3.4 correspondence の合成

ここでは，注意 3.19 で述べた通り，3.2 節と同じ枠組に Deligne 予想を拡張する．ただし，定理 3.23 のうち，境界の寄与が消えるという部分のみを拡張することにする．

$X_1$, $X_2$ をスキームとし，$a\colon \Gamma_1 \longrightarrow X_1 \times X_2$, $b\colon \Gamma_2 \longrightarrow X_1 \times X_2$ を correspondence とする．このとき，$X_1$ 上の correspondence

$$\Gamma_1 \times_{X_2} \Gamma_2 \xrightarrow{a \times {}^t b} (X_1 \times X_2) \times_{X_2} (X_2 \times X_1) = X_1 \times X_2 \times X_1 \longrightarrow X_1 \times X_1$$

を $a * {}^t b$ と書き，${}^t b$ と $a$ の合成と呼ぶ．proper な射 $f\colon X_2 \longrightarrow X_1$, $g\colon X_1 \longrightarrow X_2$ によって $a = \gamma_f$, ${}^t b = \gamma_g$ と書けているときは，$a * {}^t b = \gamma_{f\circ g}$ である．また，$X_1 = X_2$ のときに既に導入した $\mathrm{Frob}^n * a$ という記号は，$\gamma_{\mathrm{Frob}^n} * a$ のことであると解釈できる．

下の図式のように $a'_2$, $b'_2$ を定めると，$(a * {}^t b)_1 = a_1 \circ b'_2$, $(a * {}^t b)_2 = b_1 \circ a'_2$ である：

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_1 \times_{X_2} \Gamma_2 \arrow[r, "a'_2"] \arrow[d, "b'_2"] & \Gamma_2 \arrow[d, "b_2"] \\
\Gamma_1 \arrow[r, "a_2"] & X_2
\end{tikzcd}$$

したがって，$L_i \in D^b_{\mathrm{ctf}}(X_i, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ とすると，$u \in \text{Coh-corr}(a; L_1, L_2)$, $v \in \text{Coh-corr}({}^t b; L_2, L_1)$ に対し，$v * u \in \text{Coh-corr}(a * {}^t b; L_1)$ を

$$(a * {}^t b)_1^* L_1 = b'^*_2 a_1^* \xrightarrow{b'^*_2 u} b'^*_2 a_2^! L_2 \longrightarrow a'^!_2 b_2^* L_2 \xrightarrow{a'^!_2 v} a'^!_2 b_1^! L_1 = (a * {}^t b)_2^! L_1$$

によって定めることができる．この構成は押し出しと可換であり，特に $X_i$ が proper のときは $(v * u)_* = v_* \circ u_*$ が成立する．さらに，この構成は cohomological correspondence の pairing とも次の意味で可換である．すなわち，$\Gamma_1$ と $\Gamma_2$ の $X_1 \times X_2$ 上のファイバー積は $\Gamma_1 \times_{X_2} \Gamma_2$ と $\Delta_X$ のファイバー積と同型であり，これを以前のように $\Xi$ と書くと，$\langle u, v\rangle_\Xi = \langle v * u, \delta_X\rangle_\Xi$ が成り立つ．ただし $\delta_X \in \text{Coh-corr}(\Delta_X; L_1)$ は恒等写像を指す．これより，$X_1$, $X_2$ が proper である場合には $\mathrm{loc}_\Xi(u, v) = \mathrm{loc}_\Xi(v * u)$ となり，後者の消滅から前者の消滅が従うことになる．

以上の議論により，次の定理が導かれる．

**定理 3.40**

$X_1$, $X_2$ を proper なスキームとし，$a\colon \Gamma_1 \longrightarrow X_1 \times X_2$, $b\colon \Gamma_2 \longrightarrow X_1 \times X_2$ を correspondence とする．$j_i\colon U_i \hookrightarrow X_i$ を開部分スキームとし，$a, b, \Xi$ の $U_1 \times U_2$ 上への制限を $a_U$, $b_U$, $\Xi_U$ と書く．次の 3 条件を仮定する：

- $a_{U1}$, $b_{U2}$ は proper である．
- $\Xi_U$ は proper である．
- 合成 $a * {}^t b$ は $X_1 \setminus U_1$ に沿って vanishing order $> 1$ である．

このとき，任意の $L_i \in D^b_{\mathrm{ctf}}(U_i, \mathbb{Q}_\ell)$, $u \in \text{Coh-corr}(a_U; L_1, L_2)$, $v \in \text{Coh-corr}({}^t b_U; L_2, L_1)$ について，次の等式が成立する：

$$\sum_{D \in \pi_0(\Xi \setminus \Xi_U)} \mathrm{loc}_D(j_{1!}u, j_{2!}v) = 0.$$

# 4 Lafforgue の跡公式

## 4.1 概要

$f \in \mathcal{H}_N$ に対して $f \times \mathrm{Frob}^n$ の $H^*_c(\mathrm{Cht}^r_N/a^{\mathbb{Z}})$ への作用を調べる上で $\mathrm{Cht}^r_N/a^{\mathbb{Z}}$ が有限型でないことが障害になることはこれまでに幾度となく述べてきたが，ここではその困難を克服するための方針を述べる．

記号の簡略のため，$\mathrm{Cht}^r_N/a^{\mathbb{Z}}$ を $X$ で表し，$\mathrm{Cht}^r_N/a^{\mathbb{Z}}$ が $\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\le p}_N/a^{\mathbb{Z}}$ の合併として書けることを $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ と表す．言うまでもないが $X$ は有限型ではなく，各 $X_\lambda$ は有限型である．また，考えている correspondence $f \times \mathrm{Frob}^n$ を $a$ で表す．

まず，第一の問題として，$X_\lambda$ が $a$ で保たれないため，$(X_\lambda, a_\lambda = a|_{X_\lambda})$ に跡公式を適用できないことが挙げられる．そこで，$X_\lambda$ の適切なコンパクト化をとることを考える．コンパクト化の様子はレベルつきかそうでないかによって変わってくる．

**レベルなしの場合**

この場合，次のようなよいコンパクト化 $X_\lambda \subset \overline{X}_\lambda$ が存在する：

- $\overline{X}_\lambda$ は smooth である．
- $\overline{X}_\lambda \setminus X_\lambda$ は $\overline{X}_\lambda$ の強正規交叉因子である．

正規化によって correspondence $a_\lambda$ を $\overline{X}_\lambda$ に延長したものを $\overline{a}_\lambda$ と書く．$\overline{X}_\lambda$ は proper であるから，$(\overline{X}_\lambda, \overline{a}_\lambda)$ に Lefschetz 跡公式を適用することができる．しかし，定理 2.3 で数えられているのは $X_\lambda$ での固定点であって $\overline{X}_\lambda$ での固定点ではないため，今度は固定点の側が計算できないという困難が発生する．

Lafforgue は Pink が [Pi] において行った議論を修正することでこの問題点を克服した．correspondence $\overline{a}_\lambda$ を Frobenius の高い羃で引き戻したのちブローアップによって改変することにより，$\overline{X}_\lambda \setminus X_\lambda$ に現れる固定点を消すことができるのである（命題 4.3)．Pink は $X_\lambda \subset \overline{X}_\lambda$ が $f$ によって保たれる場合を扱ったが，同様のことが $X_\lambda$ が「固定点のまわりで」保たれるという条件のみで行えるというのが Lafforgue の着眼点である．こうして，

$$(X_\lambda \text{ 内の固定点の個数}) = \mathrm{Tr}\big(\overline{a}_\lambda; H^*(\overline{X}_\lambda)\big) + (\text{境界の strata の寄与}) \qquad (*)$$

という形の跡公式が得られる．

**レベルありの場合**

この場合，$X_\lambda$ のコンパクト化 $\overline{X}_\lambda$ は smooth ではないが，$X_\lambda$ を含む開部分スタック $X_\lambda \subset \overline{X}'_\lambda \subset \overline{X}_\lambda$ で次の条件を満たすものが存在する：

- $\overline{X}'_\lambda$ は smooth であり，$\overline{a}_\lambda$ で保たれる．
- $\overline{X}'_\lambda \setminus X_\lambda$ は $\overline{X}'_\lambda$ の強正規交叉因子である．

このときはまず $\overline{X}_\lambda \setminus \overline{X}'_\lambda$ の寄与を藤原氏の跡公式で消したのち，$\overline{X}'_\lambda \setminus X_\lambda$ にレベルなしの場合と同様の議論を適用し，$(*)$ と同様の跡公式を得る．

いずれにせよ，$X_\lambda \subset \overline{X}_\lambda$ は $\overline{a}_\lambda$ で保たれないため，Deligne 予想をそのまま適用して $\overline{X}_\lambda \setminus X_\lambda$ の寄与を消すことはできないことに注意しておく．

## 4.2 スキーム，base なしの場合

$\mathrm{Cht}^r_N/a^{\mathbb{Z}}$ のコホモロジーを計算するためには，$C$ 上の代数スタックに対する相対的な Lefschetz 跡公式が必要である．しかしその証明の本質的なアイデアは，$\mathbb{F}_q$ 上のスキームに対する類似の公式の証明に既に現れていると思われるので，後者についてまず詳しく述べ，前者は結果および必要な変更点を並べるのみにとどめることとする．

ここでは 3.3 節同様，断りのない限りすべてのスキームは $\overline{\mathbb{F}}_q$ 上有限型であり，$\mathbb{F}_q$ 上定義されているとする．また，スキーム間の射も $\mathbb{F}_q$ 上定義されているとする．

### 4.2.1 ブローアップ

$X$ を $\overline{\mathbb{F}}_q$ 上 smooth なスキームとし，$\dim X = d$ とする．$D = \sum_{i=1}^m D_i$ を $X$ の強正規交叉因子とし，集合 $I \subset \{1, 2, \ldots, m\}$ に対し $D_I = \bigcap_{i \in I} D_i$, $X_I = D_I \setminus \bigcup_{J \supsetneq I} D_J$ とおく．$X_\varnothing = X \setminus \bigcup_{i \in I} D_i$ である．

$Z = X \times X$ とおき，$\pi \colon \widetilde{Z} \longrightarrow Z$ を $\bigcup_{i \in I} D_i \times D_i \subset Z$ における $Z$ のブローアップとする．また，$D_i \times D_i \subset Z$ における $Z$ のブローアップを $\pi_i \colon \widetilde{Z}_i \longrightarrow Z$ とおく．このとき，$\widetilde{Z}$ は $\widetilde{Z}_1, \ldots, \widetilde{Z}_m$ の $Z$ 上のファイバー積である．$\pi_i$ の例外因子を $\widetilde{Z}$ に引き戻して得られる因子を $E_i$ と書く．また，$D_I$ のときと同様に，$E_I = \bigcap_{i \in I} E_i$ と定める．

$\delta^n \colon X \xrightarrow{\mathrm{Id} \times \mathrm{Frob}^n} X \times X = Z$ を $\mathrm{Frob}^n$ のグラフの転置とする．$D_i \times D_i$ の $\delta^n$ による引き戻しは因子 $D_i$ になるので，ブローアップの普遍性より，$\delta^n$ は $\pi$ を経由する，すなわち，$\widetilde{\delta}^n \colon X \longrightarrow \widetilde{Z}$ で $\delta^n = \pi \circ \widetilde{\delta}^n$ となるものが存在する．

また，$I \neq \varnothing$ に対し，$\delta^n$ の $D_I$ への制限を $\delta^n_I \colon D_I \longrightarrow D_I \times D_I$ とおくと，$\delta^n_I \colon D_I \longrightarrow D_I \times D_I \longhookrightarrow Z$ による $D_i \times D_i$ の引き戻しは $D_{I \cup \{i\}}$ となり，$i \notin I$ のときこれは $D_I$ の因子である．したがって，再びブローアップの普遍性から，$\delta^n_I$ は $i \notin I$ にわたる $\widetilde{Z}_i$ のファイバー積への射にリフトする．これを $\widetilde{Z}$ に引き戻した射を $\widetilde{\delta}^n_I \colon \widetilde{D}_I \longrightarrow \widetilde{Z}$ とおく．$\widetilde{D}_I$ は $D_I$ 上の $(\mathbb{P}^1)^{|I|}$ 束となる．

étale 局所的な計算により，次の命題を得る：

**命題 4.1**

$\delta^n \colon X \longhookrightarrow Z$ と $\pi \colon \widetilde{Z} \longrightarrow Z$ のファイバー積（これを $X \times_{\delta^n, Z} \widetilde{Z}$ と書くことにする）は，$\widetilde{Z}$ の部分スキームとして $\widetilde{\delta}^n \colon X \longhookrightarrow \widetilde{Z}$ と $\widetilde{D}_J$ $(J \subset \{1, 2, \ldots, m\}, J \neq \varnothing)$ の合併に等しい．

また，$I \neq \varnothing$ に対して，ファイバー積 $D_I \times_{\delta^n_I, Z} \widetilde{Z}$ は $\widetilde{Z}$ ないし $E_I$ の部分スキームとし

て $\widetilde{D}_J$ ($J \subset \{1,2,\ldots,m\}, J \supset I$) の合併に等しい.

$a_\varnothing : \Gamma_\varnothing \longrightarrow X_\varnothing \times X_\varnothing$ を次の 2 条件を満たす correspondence とする：

- $a_\varnothing$ は有限射であり，その像 $|\Gamma_\varnothing|$ は $X_\varnothing \times X_\varnothing$ において余次元 $d$ である.
- $\Gamma_\varnothing$ は正規である.

$a: \Gamma \longrightarrow Z, \widetilde{a}: \widetilde{\Gamma} \longrightarrow \widetilde{Z}$ を $a_\varnothing$ の正規化とする．$\Gamma$ と $\widetilde{\Gamma}$ の間には自然な双有理射 $\widetilde{\Gamma} \longrightarrow \Gamma$ がある.

**定義 4.2**

$\Gamma$ が「固定点の近傍で $X_\varnothing$ を保つ」とは，次の条件を満たす $Z$ の開集合 $U$ が存在することをいう：

- 任意の $n$ に対し，$U$ は $|\Gamma|$ と $\delta^n(X)$ の交点をすべて含む.
- $U_\Gamma = a^{-1}(U)$ とするとき，$a_1^{-1}(X_\varnothing) \cap U_\Gamma \subset a_2^{-1}(X_\varnothing) \cap U_\Gamma$.

次の命題が Lafforgue の跡公式において最も本質的である：

**命題 4.3**

$\Gamma$ が固定点の近傍で $X_\varnothing$ を保つと仮定する．このとき，十分大きい整数 $n_0$ について $X_\varnothing \times X_\varnothing \xrightarrow{\mathrm{Id} \times \mathrm{Frob}_X^{n_0}} X_\varnothing \times X_\varnothing$ で $\Gamma_\varnothing$ を引き戻したものを $a' : \Gamma'_\varnothing \longrightarrow X_\varnothing \times X_\varnothing$ とすると，任意の整数 $n \geq 0$ について次が成り立つ：

$\widetilde{\delta}^n : X \longrightarrow \widetilde{Z}$ の像と $\widetilde{a'} : \widetilde{\Gamma}' \longrightarrow \widetilde{Z}$ の像は $X_\varnothing \times X_\varnothing$ 内でのみ交わる.

**証明**　主張は $X$ 上 local であるから，$D_i$ はそれぞれ $f_i = 0$ という方程式で定義されているとしてよい．$f = f_1 f_2 \cdots f_m = 0$ が $D$ の定義方程式である．$f'_i, f'$ を $\mathrm{pr}_1 : Z = X \times X \longrightarrow X$ による $f_i, f$ の引き戻しとし，$f''_i, f''$ を $\mathrm{pr}_2 : Z = X \times X \longrightarrow X$ による $f_i, f$ の引き戻しとする．$f' = 0, f'' = 0$ はそれぞれ $\mathrm{pr}_1^{-1}(D), \mathrm{pr}_2^{-1}(D)$ の定義方程式である．ここで，

$$
\begin{aligned}
a_1^{-1}(X_\varnothing) \cap U_\Gamma \subset a_2^{-1}(X_\varnothing) \cap U_\Gamma &\iff a_2^{-1}(D) \cap U_\Gamma \subset a_1^{-1}(D) \cap U_\Gamma \\
&\iff a^{-1}\bigl(\mathrm{pr}_2^{-1}(D) \cap U\bigr) \subset a^{-1}\bigl(\mathrm{pr}_1^{-1}(D) \cap U\bigr) \\
&\iff \mathrm{pr}_2^{-1}(D) \cap |\Gamma| \cap U \subset \mathrm{pr}_1^{-1}(D) \cap |\Gamma| \cap U
\end{aligned}
$$

であるから，整数 $e \geq 1$ および $|\Gamma| \cap U$ 全体で定義される関数 $h$ が存在して，$f'^e = hf''$ となる．$n_0$ を $q^{n_0} > e$ となるようにとり，$U, h$ を $X \times X \xrightarrow{\mathrm{Id} \times \mathrm{Frob}_X^{n_0}} X \times X$ で引き戻したものを $U', h'$ とおく．$h'$ は $|\Gamma'| \cap U'$ 全体で定義される関数である．このとき，$f'^e = h' f''^{q^{n_0}}$ となり，$|\widetilde{\Gamma}'| \cap \pi^{-1}(U') \subset \widetilde{Z}$ 上では $(f'/f'')^e = h' f''^{q^{n_0}-e}$ となる（ブローアップのとり方から，$f''_i/f'_i, f'_i/f''_i$ は $\widetilde{Z}$ 全体で定義されることに注意).

一方，$\widetilde{\delta}^n(X) \subset \widetilde{Z}$ 上では，$f''_i/f'_i = f_i'^{q^{n_0}-1}$ となり，これより $f''/f' = f'^{q^{n_0}-1}$ を得る.

さて，$P \in |\widetilde{\Gamma}'| \cap \widetilde{\delta}^n(X)$ とすると，$\pi(P) \in |\Gamma'| \cap \delta^n(X)$ より $(\mathrm{Id} \times \mathrm{Frob}^{n_0})\bigl(\pi(P)\bigr) \in$

$|\Gamma| \cap \delta^{n_0+n}(X)$ であるから，仮定より $(\mathrm{Id} \times \mathrm{Frob}^{n_0})(\pi(P)) \in U$ すなわち $P \in \pi^{-1}(U')$ である．したがって，$((f'/f'')(P))^e = h'(P)(f''(P))^{q^{n_0}-e}$ である．

一方，$(f''/f')(P) = (f'(P))^{q^{n_0}-1}$ であるから，$h'(P)(f'(P))^{q^{n_0}-e}(f''(P))^{(q^{n_0}-1)e} = 1$ を得る．これより，$f'(P) \neq 0$, $f''(P) \neq 0$ となり，$P \in X_\varnothing \times X_\varnothing$ が分かる． ∎

### 4.2.2 proper の場合

以上の準備のもとで，Lafforgue の跡公式を述べよう．まずは $X$ が proper である場合を扱う．

**補題 4.4**

$X$ は proper であるとする．$X_I \neq \varnothing$ となる $I \subset \{1, 2, \ldots, m\}$, $I \neq \varnothing$ に対して，

$$H^{2d}(\widetilde{Z}, \mathbb{Q}_\ell(d)) \longrightarrow H^{2d}(E_I, \mathbb{Q}_\ell(d)) \xrightarrow{\pi_{I*}} H^{2(d-|I|)}(D_I \times D_I, \mathbb{Q}_\ell(d-|I|))$$

による $\mathrm{cl}(\widetilde{\Gamma})$ の像を $\mathrm{cl}(\widetilde{\Gamma})_I$ と書く（$\pi_I \colon E_I \longrightarrow D_I \times D_I$ は $\pi$ の $E_I$ への制限である）．このとき，次が成り立つ：

$$\langle \mathrm{cl}(\widetilde{\delta^n}), \mathrm{cl}(\widetilde{\Gamma}) \rangle_{\widetilde{Z}} = \langle \mathrm{cl}(\delta^n), \mathrm{cl}(\Gamma) \rangle_Z + \sum_{I \neq \varnothing} (-1)^{|I|} \langle \mathrm{cl}(\delta_I^n), \mathrm{cl}(\widetilde{\Gamma})_I \rangle_{D_I \times D_I}.$$

**証明**　$\widetilde{\Gamma} \longrightarrow \Gamma$ は双有理射であるから，$\pi_* \colon H^{2d}(\widetilde{Z}, \mathbb{Q}_\ell(d)) \longrightarrow H^{2d}(Z, \mathbb{Q}_\ell(d))$ によって $\mathrm{cl}(\widetilde{\Gamma})$ は $\mathrm{cl}(\Gamma)$ にうつる．したがって，

$$\langle \mathrm{cl}(\delta^n), \mathrm{cl}(\Gamma) \rangle_Z = \langle \mathrm{cl}(\delta^n), \pi_*(\mathrm{cl}(\widetilde{\Gamma})) \rangle_Z = \langle \pi^*(\mathrm{cl}(\delta^n)), \mathrm{cl}(\widetilde{\Gamma}) \rangle_{\widetilde{Z}}$$

となる．また，$i_I \colon E_I \hookrightarrow \widetilde{Z}$ とおくと，$\mathrm{cl}(\widetilde{\Gamma})_I$ の定義から，

$$\langle \mathrm{cl}(\delta_I^n), \mathrm{cl}(\widetilde{\Gamma})_I \rangle_{D_I \times D_I} = \langle \mathrm{cl}(\delta^n), \pi_{I*} i_I^*(\mathrm{cl}(\widetilde{\Gamma})) \rangle_{D_I \times D_I} = \langle i_{I*} \pi_I^*(\mathrm{cl}(\delta^n)), \mathrm{cl}(\widetilde{\Gamma}) \rangle_{\widetilde{Z}}$$

となる．よって次の等式を証明すればよい：

$$\mathrm{cl}(\widetilde{\delta^n}) = \pi^*(\mathrm{cl}(\delta^n)) + \sum_{I \neq \varnothing} (-1)^{|I|} i_{I*} \pi_I^*(\mathrm{cl}(\delta^n)). \tag{$*$}$$

一方，命題 4.1 より，

$$\pi^*(\mathrm{cl}(\delta^n)) = \mathrm{cl}(\widetilde{\delta^n}) + \sum_{J \neq \varnothing} \mathrm{cl}(\widetilde{D}_J), \qquad i_{I*} \pi_I^*(\mathrm{cl}(\delta^n)) = \sum_{J \supset I} \mathrm{cl}(\widetilde{D}_J)$$

が成り立つ．$J \neq \varnothing$ に対して $\sum_{J \supset I, I \neq \varnothing} (-1)^{|I|} = -1$ であるから，この式を $(*)$ の右辺に代入すると確かに $\mathrm{cl}(\widetilde{\delta^n})$ が得られる． ∎

**定理 4.5**

$X$ は proper であるとし，$D_i$, $a_\varnothing \colon \Gamma_\varnothing \longrightarrow X_\varnothing \times X_\varnothing$ などの記号は全てこれまでと同様であるとする．さらに，$\Gamma$ は固定点の近傍で $X_\varnothing$ を保ち，$a_{\varnothing 2}$ は étale であると仮定する．

このとき，自然数 $n_0$ と $u_I \in H^{2(d-|I|)}(D_I \times D_I, \mathbb{Q}_\ell(d-|I|))$ が存在して，$n > n_0$ となるすべての自然数 $n$ について次が成り立つ：

$$\begin{aligned}\#\operatorname{Fix}(\Gamma_\varnothing \times \mathrm{Frob}^n) = \operatorname{Tr}\bigl(&\mathrm{Frob}^n \circ a; H^*(X, \mathbb{Q}_\ell)\bigr)\\ &+ \sum_{I \neq \varnothing} (-1)^{|I|} \operatorname{Tr}\bigl(\mathrm{Frob}^n \circ u_I; H^*(D_I, \mathbb{Q}_\ell)\bigr).\end{aligned}$$

ここで $\#\operatorname{Fix}(\Gamma_\varnothing \times \mathrm{Frob}^n)$ は，$x \in \Gamma_\varnothing(\overline{\mathbb{F}}_q)$ で $\mathrm{Frob}^n\bigl(a_1(x)\bigr) = a_2(x)$ を満たすものの個数である．

**証明**　命題 4.3 と同様に $n_0$, $\Gamma'_\varnothing$ を定める．また，$u_I = (\mathrm{Id} \times \mathrm{Frob}^{n_0})_*\bigl(\mathrm{cl}(\widetilde{\Gamma}')_I\bigr)$ とおく．このとき，次の 2 つに注意する：

$$\begin{aligned}\#\operatorname{Fix}(\Gamma_\varnothing \times \mathrm{Frob}^n) &= \#\operatorname{Fix}(\Gamma'_\varnothing \times \mathrm{Frob}^{n-n_0}),\\ \#\operatorname{Fix}(\Gamma'_\varnothing \times \mathrm{Frob}^{n-n_0}) &= \bigl\langle \mathrm{cl}(\widetilde{\delta}^{n-n_0}), \mathrm{cl}(\widetilde{\Gamma}')\bigr\rangle_{\widetilde{Z}}.\end{aligned}$$

前者は明らかである．後者は命題 4.3 および，$a_{\varnothing 2}$ が étale，したがって $a'_{\varnothing 2}$ が étale であることから出る．

これらの等式と補題 4.4 を合わせると，

$$\begin{aligned}\#\operatorname{Fix}(\Gamma_\varnothing \times \mathrm{Frob}^n) &= \bigl\langle \mathrm{cl}(\delta^{n-n_0}), \mathrm{cl}(\Gamma')\bigr\rangle_Z + \sum_{I \neq \varnothing} (-1)^{|I|} \langle \mathrm{cl}(\delta_I^{n-n_0}), \mathrm{cl}(\widetilde{\Gamma}')_I \rangle_{D_I \times D_I}\\ &= \bigl\langle \mathrm{cl}(\delta^n), \mathrm{cl}(\Gamma)\bigr\rangle_Z + \sum_{I \neq \varnothing} (-1)^{|I|} \langle \mathrm{cl}(\delta_I^n), u_I \rangle_{D_I \times D_I}\end{aligned}$$

が得られる．一方，$X, D_I$ についての Lefschetz 跡公式（定理 3.1，注意 3.3）から，

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}\bigl(\mathrm{Frob}^n \circ a; H^*(X, \mathbb{Q}_\ell)\bigr) &= \bigl\langle \mathrm{cl}(\delta^n), \mathrm{cl}(\Gamma)\bigr\rangle_Z,\\ \operatorname{Tr}\bigl(\mathrm{Frob}^n \circ u_I; H^*(D_I, \mathbb{Q}_\ell)\bigr) &= \bigl\langle \mathrm{cl}(\delta_I^n), u_I \bigr\rangle_{D_I \times D_I}\end{aligned}$$

となる．これらを合わせて，示すべき等式を得る．　■

### 4.2.3　proper でない場合

次に，$X$ が proper でない場合を扱う．3.3 節と同様に $a_1$ が proper であると仮定し，コンパクト化 $j\colon X \longrightarrow \overline{X}$ および $\overline{a}\colon \overline{\Gamma} \longrightarrow \overline{X} \times \overline{X}$ をとっておく．必要なら $\overline{X} \setminus X$ でブローアップすることにより，$Y = \overline{X} \setminus X$ は $\overline{X}$ の Cartier 因子であると仮定してよい．

次の 4 つの cartesian diagram を考える：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\delta^n"'] & \Xi \arrow[l] \arrow[d] \arrow[dl, "c"'] \\ Z & \Gamma \arrow[l, "a"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[d, "\delta^n"'] & \Xi' \arrow[l] \arrow[d] \arrow[dl, "c'"'] \\ Z & \widetilde{\Gamma} \arrow[l, "\pi\circ\widetilde{a}"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[d, "\widetilde{\delta}^n"'] & \widetilde{\Xi} \arrow[l] \arrow[d] \arrow[dl, "\widetilde{c}"'] \\ \widetilde{Z} & \widetilde{\Gamma} \arrow[l, "\widetilde{a}"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} D_I \arrow[d, "\delta_I^n"'] & \Xi'_I \arrow[l] \arrow[d] \arrow[dl, "c_I"'] \\ Z & \widetilde{\Gamma}_I \arrow[l, "\pi_I\circ\widetilde{a}_I"] \end{tikzcd}$$

**補題 4.6**

$\Xi'$ が proper であるとき，次が成り立つ：

$$\mathrm{loc}_{\widetilde{\Xi}}\bigl(\mathrm{cl}(\widetilde{\delta^n}),\mathrm{cl}(\widetilde{a})\bigr)=\mathrm{loc}_{\Xi'}\bigl(\mathrm{cl}(\delta^n),\mathrm{cl}(\pi\circ\widetilde{a})\bigr)+\sum_{I\neq\varnothing}(-1)^{|I|}\mathrm{loc}_{\Xi'_I}\bigl(\mathrm{cl}(\delta_I^n),\mathrm{cl}(\pi_I\circ\widetilde{a}_I)\bigr).$$

ただし，$\mathrm{cl}(*)$ は例 3.15，注意 3.16 より定まる cycle class である．

**証明**　この証明は 4.4 とほぼ同様であるので省略する．なお，$\widetilde{\Xi}\longrightarrow\Xi'$ は proper であるから，$\widetilde{\Xi}$ は proper となり，$\mathrm{loc}_{\widetilde{\Xi}}$ が意味をもつことに注意されたい． ∎

**系 4.7**

$\Gamma$ は固定点の近傍で $X_\varnothing$ を保ち，$a_1$ は proper，$a_{\varnothing 2}$ は étale であると仮定する．また，整数 $n\geq 0$ は次の 3 条件を満たすとする：

i) $\Xi'$ は proper である．

ii) $\mathrm{Frob}^n*(\pi\circ a)$ の正規化は $Y$ に沿って vanishing order $>1$ である．

iii) 命題 4.3 の結論が成立する．

このとき，$u_I=\bigl(j_!\,\mathrm{cl}(\pi_I\circ a_I)\bigr)_*\colon R\Gamma_c(D_I,\mathbb{Q}_\ell)\longrightarrow R\Gamma_c(D_I,\mathbb{Q}_\ell)$ とおくと，次が成り立つ：

$$\begin{aligned}\#\,\mathrm{Fix}(\Gamma_\varnothing\times\mathrm{Frob}^n)&=\mathrm{Tr}\bigl(\mathrm{Frob}^n\circ(j_!\,\mathrm{cl}(a))_*;H_c^*(X,\mathbb{Q}_\ell)\bigr)\\&\quad+\sum_{I\neq\varnothing}(-1)^{|I|}\mathrm{Tr}\bigl(\mathrm{Frob}^n\circ u_I;H_c^*(D_I,\mathbb{Q}_\ell)\bigr).\end{aligned}$$

**証明**　まず，条件 iii) と $a_{\varnothing 2}$ が étale であることから，

$$\#\,\mathrm{Fix}(\Gamma_\varnothing\times\mathrm{Frob}^n)=\mathrm{loc}_{\widetilde{\Xi}}\bigl(\mathrm{cl}(\widetilde{\delta^n}),\mathrm{cl}(\widetilde{a})\bigr)$$

が成り立つことが分かる．cohomological correspondence $\mathrm{cl}(\pi\circ\widetilde{a})$, $\mathrm{cl}(\delta^n)$ に例 3.17，例 3.18 の議論を適用すると，次の等式が得られる：

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}\bigl((j_!\,\mathrm{cl}(\pi\circ\widetilde{a}))_*\circ(j_!\,\mathrm{cl}(\delta^n))_*;R\Gamma_c(X,\mathbb{Q}_\ell)\bigr)\\&\quad=\mathrm{loc}_{\Xi'}\bigl(\mathrm{cl}(\delta^n),\mathrm{cl}(\pi\circ\widetilde{a})\bigr)+\sum_{D\in\pi_0(\overline{Z}\backslash Z)}\mathrm{loc}_D\bigl(j_!\,\mathrm{cl}(\delta^n),j_!\,\mathrm{cl}(\pi\circ\widetilde{a})\bigr).\end{aligned}$$

ここで定理 3.40 を $\pi\circ\widetilde{a}$ と $\gamma_{\mathrm{Frob}^n}$ に適用すると，$\mathrm{loc}_D\bigl(j_!\,\mathrm{cl}(\delta^n),j_!\,\mathrm{cl}(\pi\circ\widetilde{a})\bigr)=0$ である．また，$\pi$ は双有理射であるから $\mathrm{cl}(\pi\circ\widetilde{a})=\mathrm{cl}(a)\in\text{Coh-corr}(\mathbb{Q}_\ell,\mathbb{Q}_\ell)$ となる．よって，

$$\mathrm{Tr}\bigl(\mathrm{Frob}^n\circ(j_!\,\mathrm{cl}(a))_*;R\Gamma_c(X,\mathbb{Q}_\ell)\bigr)=\mathrm{loc}_{\Xi'}\bigl(\mathrm{cl}(\delta^n),\mathrm{cl}(\pi\circ\widetilde{a})\bigr)$$

を得る．一方，条件 iii) より $\mathrm{Frob}^n*(\pi_I\circ a_I)$ の正規化も $Y$ に沿って vanishing order $>1$ となるので，$D_I$ の跡公式から上と同様にして

$$\mathrm{Tr}\bigl(\mathrm{Frob}^n\circ u_*;R\Gamma_c(D_I,\mathbb{Q}_\ell)\bigr)=\mathrm{loc}_{\Xi'_I}\bigl(\mathrm{cl}(\delta_I^n),\mathrm{cl}(\pi_I\circ\widetilde{a}_I)\bigr)$$

が導かれる．これらと補題 4.6 を合わせて，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\bigl(\mathrm{Frob}\circ(j_!\,\mathrm{cl}(a))_*; R\Gamma_c(X,\mathbb{Q}_\ell)\bigr)\\
&\quad = \mathrm{loc}_{\Xi'}\bigl(\mathrm{cl}(\widetilde{\delta^n}), \mathrm{cl}(\widetilde{a})\bigr) - \sum_{I\neq\varnothing}(-1)^{|I|}\,\mathrm{loc}_{\Xi'_I}\bigl(\mathrm{cl}(\delta_I^n), \mathrm{cl}(\pi_I\circ\widetilde{a}_I)\bigr)\\
&\quad = \#\,\mathrm{Fix}(\Gamma_\varnothing\times\mathrm{Frob}^n) - \sum_{I\neq\varnothing}(-1)^{|I|}\,\mathrm{Tr}\bigl(\mathrm{Frob}^n\circ u_I; R\Gamma_c(D_I,\mathbb{Q}_\ell)\bigr)
\end{aligned}$$

を得る．これは示すべき等式に他ならない． ∎

**補題 4.8**

整数 $n_0$ が存在して，$\Gamma$ の $X\times X \xrightarrow{\mathrm{Id}\times\mathrm{Frob}^{n_0}} X\times X$ による引き戻し $a'\colon\Gamma'\longrightarrow X\times X$ は任意の整数 $n\geq 0$ に対して系 4.7 の条件 i), ii), iii) を満たす．

**証明**　ii) については注意 3.39 で，iii) については命題 4.3 で既に扱った．あとは i) を証明すればよい．$\overline{X}\times\overline{X}$ において $a'(\Gamma')\cap\delta^n(X)$ が閉であることを証明すれば十分である．この主張は $\overline{X}$ について局所的なので，$Y\subset\overline{X}$ は定義方程式 $f=0$ をもつとしてよい．このとき，命題 3.38 の証明のときと同様に $f', f''$ を定めると，ある自然数 $e$ と $a(\Gamma)$ 上の関数 $h$ が存在して，$a(\Gamma)$ 上で $f'^e = hf''$ となる．$q^{n_0}\geq e$ となるよう $n_0$ を定め，$X\times X \xrightarrow{\mathrm{Id}\times\mathrm{Frob}^{n_0}} X\times X$ による $h$ の引き戻しを $h'$ と書くと，$a'(\Gamma')$ 上で $f'^e = h'f''^{q^{n_0}}$ となる．

一方，$\delta^n(X)$ 上で $f'^{q^n} = f''$ である．これと $X\times X$ 上で $f', f''\neq 0$ であることから，$a'(\Gamma')\cap\delta^n(X)\subset X\times X$ 上では

$$1 - h'f'^{q^n+q^{n_0}-e} = 0 \tag{$*$}$$

が成り立つことが分かる．したがって，$a'(\Gamma')\cap\delta^n(X)$ の $\overline{X}\times\overline{X}$ における閉包は $(*)$ で定義される閉部分スキーム $W$ と $\delta^n(\overline{X})$ の共通部分に含まれる．$W$ は明らかに $Y\times\overline{X}$ と交わらない．また，$\delta^n(\overline{X})\cap(\overline{X}\times Y)\subset Y\times\overline{X}$ である．これらのことから $W\cap\delta^n(\overline{X})$ は $Y\times\overline{X}$, $Y\times\overline{X}$ と交わらないことがいえ，$a'(\Gamma')\cap\delta^n(X)$ が $\overline{X}\times\overline{X}$ の閉集合であることが従う． ∎

**定理 4.9**

$\Gamma$ は固定点の近傍で $X_\varnothing$ を保ち，$a_1$ は proper，$a_{\varnothing 2}$ は étale であると仮定する．このとき，自然数 $n_0$ と射 $u_I\colon R\Gamma_c(D_I,\mathbb{Q}_\ell)\longrightarrow R\Gamma_c(D_I,\mathbb{Q}_\ell)$ が存在して，$n\geq n_0$ となるすべての自然数 $n$ について次が成り立つ：

$$\begin{aligned}
\#\,\mathrm{Fix}(\Gamma_\varnothing\times\mathrm{Frob}^n) &= \mathrm{Tr}\bigl(\mathrm{Frob}^n\circ(j_!\,\mathrm{cl}(a))_*; H_c^*(X,\mathbb{Q}_\ell)\bigr)\\
&\qquad + \sum_{I\neq\varnothing}(-1)^{|I|}\,\mathrm{Tr}\bigl(\mathrm{Frob}^n\circ u_I; H^*(D_I,\mathbb{Q}_\ell)\bigr).
\end{aligned}$$

**証明**　補題 4.8 のように $n_0$ をとり，$a_\varnothing\colon\Gamma_\varnothing\longrightarrow X_\varnothing\times X_\varnothing$ の $X_\varnothing\times X_\varnothing \xrightarrow{\mathrm{Id}\times\mathrm{Frob}^{n_0}} X_\varnothing\times X_\varnothing$

での引き戻しを $a'_\varnothing\colon \Gamma'_\varnothing \longrightarrow X_\varnothing \times X_\varnothing$ とおく．また，これの $Z, \widetilde{Z}$ における正規化をそれぞれ $a'\colon \Gamma' \longrightarrow Z, \widetilde{a'}\colon \widetilde{\Gamma'} \longrightarrow \widetilde{Z}$ とおく．系 4.7 をこれらの correspondence に対して（$n$ を $n-n_0$ として）用いると，$u'_I$ が存在して，

$$\begin{aligned}\#\operatorname{Fix}(\Gamma'_\varnothing \times \mathrm{Frob}^{n-n_0}) = \operatorname{Tr}\bigl(&\mathrm{Frob}^{n-n_0}\circ(j_!\operatorname{cl}(a'))_*; H_c^*(X, \mathbb{Q}_\ell)\bigr)\\ &+\sum_{I\neq\varnothing}(-1)^{|I|}\operatorname{Tr}\bigl(\mathrm{Frob}^{n-n_0}\circ u'_I; H_c^*(D_I, \mathbb{Q}_\ell)\bigr)\end{aligned}$$

となることが分かる．Frob はコホモロジーに同型を引き起こすので，$u_I = \mathrm{Frob}^{-n_0}\circ u'_I$ とおくと，示すべき等式が従う．∎

## 4.3 スタック，base ありの場合

ここでは，代数スタックに対する相対的な跡公式を述べる．

**注意 4.10**

以下では，すべての代数スタックは serein かつコンパクト化可能であると仮定する．この serein スタックとは，Lafforgue によって導入された代数スタックのクラスであり，Deligne-Mumford スタックが局所的にスキームの étale 群スキームによる商であるのに対して，serein スタックはスキームの étale とは限らない有限群スキームの商として表される．Lafforgue は [Laf1] Appendice A において，[L-M] の lisse-étale site の理論を推し進め，serein スタックに対する $\ell$ 進コホモロジーの理論を確立した．

serein かつコンパクト化可能な代数スタックは，serein スタックによるコンパクト化をもつことに注意しておく．

$S$ を $\mathbb{F}_q$ 上 smooth かつ quasi-projective なスキームとし，$p\colon \mathcal{X} \longrightarrow S$ を $S$ 上 smooth かつ有限型である代数スタックとする．$d$ を $p$ の相対次元とする．$\mathcal{D} = \sum_{i=1}^m \mathcal{D}_i$ を $\mathcal{X}$ の $S$ 上相対的な強正規交叉因子とし，$\mathcal{D}_I, \mathcal{X}_I, \mathcal{X}_\varnothing$ を 4.2.1 と同様に定める．$\varphi\colon S \longrightarrow S$ を射とし，$\varphi\circ p\colon \mathcal{X} \longrightarrow S$ と $p\colon \mathcal{X} \longrightarrow S$ の $S$ 上のファイバー積 $\mathcal{X}\times_{\varphi,S}\mathcal{X}$ を $\mathcal{Z}$ と書く．そのブローアップ $\widetilde{\mathcal{Z}}$ などを全てスキームのときと同様に定める．

この設定における跡公式を述べよう．以前と同様，$\mathcal{X}$ が $S$ 上 proper かどうかによって分けて述べる：

**定理 4.11（proper な場合）**（[Laf1], Théorème IV.7）

$\mathcal{X}$ が $S$ 上 proper であり，$\mathcal{X}_\varnothing$ が Deligne-Mumford スタックであると仮定する．$a\colon \Gamma \longrightarrow \mathcal{Z}$ を proper な射（これは $\varphi$ 上の correspondence と呼ばれる）とする．$a$ の $\mathcal{X}_\varnothing\times_{\varphi,S}\mathcal{X}_\varnothing$ 上への制限 $a_\varnothing$ について，$a_{\varnothing 1}$ は étale であることを仮定する．さらに，$\Gamma$ は固定点のまわりで $\mathcal{X}_\varnothing$ を保つとする．このとき，自然数 $n_0$ および $S$ 上の層 $R^{2(d-|I|)}(p_{\mathcal{X}_I\times_{\varphi,S}\mathcal{X}_I})_*\mathbb{Q}_\ell(d-|I|)$ の section $u_I$（$I\neq\varnothing$）が存在して，次を満たす：

任意の閉点 $x\colon s \hookrightarrow S$ と $y = \varphi\circ x$，および $n > n_0$ かつ $\mathrm{Frob}_x^n\circ y = x$ を満

たす自然数 $n$ に対し，次の等式が成立する：

$$\# \mathrm{Fix}_x(\Gamma_\varnothing \times \mathrm{Frob}_x^n) = \mathrm{Tr}\big(\mathrm{Frob}_x^n \circ x^*(a); H^*(\mathcal{X}^x, \mathbb{Q}_\ell)\big) + \sum_{I \neq \varnothing} (-1)^{|I|} \mathrm{Tr}\big(\mathrm{Frob}_x^n \circ x^*(u_I); H^*(\mathcal{X}_I^x, \mathbb{Q}_\ell)\big).$$

ただし $\mathcal{X}^x$ は $\mathcal{X}$ の $x$ におけるファイバーを表す．

**定理 4.12（proper でない場合）**（[Laf1], Théorème IV.12）

定理 4.11 の設定で $\mathcal{X}$ の properness を外し，$\varphi$ と $a_1$ が proper であると仮定する．また，$\mathcal{X}$ に伴う粗モジュライ代数空間 $\mathcal{X}^{\mathrm{gr}}$ について，次を仮定する：

$\mathcal{X}^{\mathrm{gr}}$ のコンパクト化 $\overline{\mathcal{X}^{\mathrm{gr}}}$ で，ある体拡大 $\mathbb{F}_{q^k}/\mathbb{F}_q$ で底変換するとスキームになるものが存在する．

このとき，自然数 $n_0$ および準同型 $u_I : \varphi^* p_{\mathcal{X}_I!}\mathbb{Q}_\ell \longrightarrow p_{\mathcal{X}_I!}\mathbb{Q}_\ell$ が存在して，次を満たす：

任意の閉点 $x : s \hookrightarrow S$ と $y = \varphi \circ x$，および $n \geq n_0$ かつ $\mathrm{Frob}_x^n \circ y = x$ を満たす自然数 $n$ に対し，次の等式が成立する：

$$\# \mathrm{Fix}_x(\Gamma_\varnothing \times \mathrm{Frob}_x^n) = \mathrm{Tr}\big(\mathrm{Frob}_x^n \circ x^*(a); H_c^*(\mathcal{X}^x, \mathbb{Q}_\ell)\big) + \sum_{I \neq \varnothing} (-1)^{|I|} \mathrm{Tr}\big(\mathrm{Frob}_x^n \circ x^*(u_I); H_c^*(\mathcal{X}_I^x, \mathbb{Q}_\ell)\big).$$

**注意 4.13**

上の 2 つの定理について，スキームの場合との違いを述べる．

まず，proper である場合もそうでない場合も $\mathcal{X}_\varnothing$ が Deligne-Mumford スタックになることを仮定しているが，これは固定点の重複度を定義し，サイクルの交点数として表す際に必要な仮定である．

$\mathcal{X}$ が proper の場合は，定数層以外の係数のコホモロジーを扱う必要がなく，定数層に対する Poincaré 双対性や Künneth 分解定理などの必要な性質がすべて代数スタックに対して証明されているため，スキームのときと全く同様に証明を行うことができる（この部分の $\ell$ 進コホモロジー論は [L-M] による）．

$\mathcal{X}$ が proper でない場合には，それに伴う粗モジュライ代数空間 $\mathcal{X}^{\mathrm{gr}}$ を用いて議論を行う．この際に本質的な役割を果たす命題を下に挙げておいた．なお，体拡大で底変換するとスキームになるコンパクト化の存在は，藤原氏の跡公式（定理 3.40）がスキームのみに対して証明されているために必要な仮定である．筆者は，代数空間に対しても藤原氏の証明が機能する可能性は高いと考えているが，詳細な検討は行っていない．

**命題 4.14** ([Laf1] Proposition A.5)
$S$ を $\mathbb{F}_q$ 上 smooth なスキームとし，$\mathcal{X}$ を $S$ 上相対次元 $d$ かつ smooth である serein かつコンパクト化可能な代数スタックとする．このとき，$\mathcal{X}^{\mathrm{gr}}$ は cohomologically smooth である．すなわち，構造射 $f\colon \mathcal{X} \longrightarrow S$ について，$f^{\mathrm{gr}!}\mathbb{Q}_\ell \cong \mathbb{Q}_\ell(d)[2d]$ が成立する．

# 5 $\mathrm{Cht}_N^r/a^{\mathbb{Z}}$ のコホモロジーの分解

最後に，前節で述べた Lafforgue の跡公式が $\mathrm{Cht}_N^r/a^{\mathbb{Z}}$ のコホモロジーの計算にいかにして用いられるかを簡単に説明する．

## 5.1 $\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$, $\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$ のコンパクト化

まず，4.1 で述べたコンパクト化 $\overline{X}_\lambda$, $\overline{X}'_\lambda$ について少し触れる．

レベルなしの場合は [Laf3] で扱われている．構成のアイデアは，shtuka の定義 ($\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow {}^\tau\mathcal{E}$) を ($\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}'' \Leftarrow {}^\tau\mathcal{E}$) に置き換えることである．ここで $\Leftarrow$ は complete homomorphism と呼ばれ，局所自由層の間の同型全体を適切なコンパクト空間に埋め込んだときの閉包の元である．正確な定義は複雑なので省略する．[Lau] に詳しい解説があるのでそちらを参照されたい．こうしてできたモジュライスタックを $\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}$ と書く．求めていたコンパクト化は，これの商 $\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$ として得られる．これに対し，$\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$ が smooth であり境界が強正規交叉因子であることが証明できる．さらに境界の open smooth strata (4.2.1 節の $X_I$ に相当するもの) については，次の極めて重要な事実が成立する：

**定理 5.1** ([Laf1] Corollaire III.4)
$p$ が十分上に凸であるとき，$\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}} \setminus \mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}$ の open smooth strata は，

$$\mathrm{Cht}^{r_1,d_1,\overline{p}\leq p_1} \times_X \mathrm{Cht}^{r_2,d_2,\overline{p}\leq p_2} \times_{X,\mathrm{Frob}} \cdots \times_{X,\mathrm{Frob}} \mathrm{Cht}^{r_k,d_k,\overline{p}\leq p_k}$$

と同じ étale site をもつ．ここで $r_1,\ldots,r_k$, $d_1,\ldots,d_k$, $p_1,\ldots,p_k$ は $r$, $d$, $p$ および strata から決まる自然数および折れ線写像である．

レベルありの場合は $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}$ を $\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}$ の $\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p} \longrightarrow \mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}$ による正規化として定める．$\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}$ のコンパクト化は，これの商 $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$ として得られる．これに対して定理 5.1 と類似の結果が存在するが，省略する．smooth な開部分スタック $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}'$ の定義も割愛する．

上記のコンパクト化について定理 4.11, 4.12 を適用するためには，さらに以下の性質を確かめる必要がある：

i) $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}$ が $C \setminus N \times C \setminus N$ 上の serein スタックになること．
ii) $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}$ の粗モジュライ代数空間が基礎体を拡大するとスキームになること．
iii) $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}'/a^{\mathbb{Z}} \subset \overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$ が Hecke correspondence で保たれること．

iv) Hecke correspondence が固定点のまわりで $\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}/a^{\mathbb{Z}} \subset \overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}}/a^{\mathbb{Z}}$ を保つこと．

これらは [Laf1] Chapitre V にて証明されている．ii) 以外は $p$ が十分上に凸であるという仮定が必要であることを附記しておく．このあたりは地道ではあるが緻密な議論が必要であり，Lafforgue の証明の中でも最も込み入った部分の一つである．

## 5.2 $r$-negligible なガロア表現

定理 2.3 と定理 4.11, 4.12 から，次のような 2 つの値が結びつくことが分かる（$\infty, 0 \in |C \setminus T_f|$ とし，$s, s', u', f$ は定理 2.3 直前で定めたものとする）：

- $$\sum_{\pi \in \{\pi\}_N^r} \mathrm{Tr}_\pi(f) q^{(r-1)s} \big(z_1(\pi_\infty)^{-s'} + \cdots + z_r(\pi_\infty)^{-s'}\big)\big(z_1(\pi_0)^{u'} + \cdots + z_r(\pi_0)^{u'}\big)$$
$$+ \sum_\iota c_\iota s^{m_\iota} \lambda_\iota^s \big(z_1(\pi'^\iota_\infty)^{-s'} + \cdots + z_{r'_\iota}(\pi'^\iota_\infty)^{-s'}\big)\big(z_1(\pi^\iota_0)^{u'} + \cdots + z_{r_\iota}(\pi^\iota_0)^{u'}\big),$$
- $\mathrm{Tr}\big(\mathrm{Frob}_x^{-s/\deg x} \circ f; (\mathrm{Frob}^n \times \mathrm{Id})^* H_c^*(\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}}'/a^{\mathbb{Z}})\big)$ の $n$ についての平均
  $+$ (境界の strata の寄与)．

前者の 2 番目の $\sum$ は $\mathrm{GL}_{r'}$ $(r' < r)$ の保型表現の寄与であるが，命題 1.6 で述べた帰納法により $\mathrm{MT}_{r'}$ を仮定しているので，$\mathrm{MT}_r$ を証明する上ではこの部分は「無視できる」と考えられる．また定理 5.1 に見られるように，後者の（境界の strata の寄与）には階数が低い shtuka のモジュライスタックのファイバー積の寄与が現れる．したがって，もし

(*) $r' < r$ のとき，$\mathrm{Cht}_N^{r'}$ のコホモロジーには $\mathrm{GL}_r$ の Langlands 対応に関係する部分は現れない

とすれば，この部分も「無視できる」ことになる．こうして，両者の核となる部分である，

- $\sum_{\pi \in \{\pi\}_N^r} \mathrm{Tr}_\pi(f) q^{(r-1)s} \big(z_1(\pi_\infty)^{-s'} + \cdots + z_r(\pi_\infty)^{-s'}\big)\big(z_1(\pi_0)^{u'} + \cdots + z_r(\pi_0)^{u'}\big)$
- $\mathrm{Tr}\big(\mathrm{Frob}_x^{-s/\deg x} \circ f; (\mathrm{Frob}^n \times \mathrm{Id})^* H_c^*(\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}}'/a^{\mathbb{Z}})\big)$ の $n$ についての平均

が「本質的には」等しいことがいえる．

上記の「 」を正当化するために，以下で「$r$-negligible なガロア表現」を定義する：

**定義 5.2**

$F^2$ を $C \times C$ の関数体とし，ある $C \times C$ の開集合上の smooth な $\ell$ 進層として得られる $\mathrm{Gal}(\overline{F^2}/F^2)$ の $\ell$ 進表現全体を $\mathcal{G}_\ell(F^2)$ と書く．$\sigma \in \mathcal{G}_\ell(F^2)$ が $r$-negligible であるとは，$\sigma$ の任意の既約な subquotient $\sigma_0$ に対して $\sigma_1 \in \mathcal{G}_\ell^{r_1}(F)$, $\sigma_2 \in \mathcal{G}_\ell^{r_2}(F)$ $(r_1, r_2 < r)$ が存在して，$\sigma_0$ が $\mathrm{pr}_1^* \sigma_1 \otimes \mathrm{pr}_2^* \sigma_2$ の直和成分になっていることをいう．

また，$\sigma \in \mathcal{G}_\ell(F^2)$ が essential であるとは，$\sigma$ の任意の subquotient が $r$-negligible でないことをいう．

さらに，(*) のため，$\mathrm{MT}_r$ に次の定理を加えて帰納法を行う：

**定理 5.3**
十分上に凸な $p$ に対し，次が成り立つ：

$\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$ のコンパクト台コホモロジー層は $\mathcal{G}(F^2)$ の元として $(r+1)$-negligible である．

この定理の主張を $\mathrm{Neg}_r$ と書く．$\mathrm{Neg}_{r'}$ $(r'<r)$ が上記の $(*)$ にあたる主張である．

## 5.3 主定理の証明

前述の通り，$\mathrm{MT}_r$ と $\mathrm{Neg}_r$ を同時に $r$ についての帰納法で示すことによって定理 1.5 の証明が得られる．$r=1$ のとき，$\mathrm{MT}_1$ は類体論である．$\mathrm{Neg}_1$ もそれほど難しくない（[Laf1] Proposition VI.15 下の Remarque 参照）．以下では，$r'<r$ での $\mathrm{MT}_{r'}$ と $\mathrm{Neg}_{r'}$ を仮定して $\mathrm{MT}_r$ と $\mathrm{Neg}_r$ を示す部分のアウトラインをいくつかのステップに分けて述べることにする．ポイントは，3 つのスタック

- $\mathrm{Cht}_N^r/a^{\mathbb{Z}}$（Hecke 環 $\mathcal{H}_N$ が作用する，有限型でない），
- $\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$（固定点の個数が分かる，有限型），
- $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$（Lefschetz 跡公式が使える，proper）

のコホモロジーの差がすべて $r$-negligible になることである（ステップ 4）．

**ステップ 1**　$p$ が十分上に凸であるとして，次の 2 つを証明する：

- $\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$ の境界のコホモロジー層および $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$ の境界の交叉コホモロジー層は $r$-negligible である．
- $\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$ および $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}'/a^{\mathbb{Z}}$ の境界の strata のコホモロジー層は $\mathcal{G}(F^2)$ の元として $r$-negligible である．

これはレベルなしの場合は定理 5.1 と $\mathrm{Neg}_{r'}$ から従う．レベルありの場合も類似の議論を行うが，より難解である．

**ステップ 2**　$H_c^*(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}})$ から "essential part" $H_{N,\mathrm{ess}}^*$ を分離する．

$H_{N,\mathrm{ess}}^*$ とは，次のようにして構成される $C\setminus N\times C\setminus N$ 上の smooth な $\ell$ 進層の線型結合である．$p$ が十分上に凸であるとする．定理 2.3 の $f=\mathbf{1}_N$ の場合と Frob の冪についての Lefschetz 跡公式（任意のスキームに対して成立する）を合わせることで次の等式を得る（[Laf1] Lemme VI.19）：

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\Big(\mathrm{Frob}_x^{-s/\deg x};\frac{1}{r!}\sum_{n=1}^{r!}(\mathrm{Frob}^n\times\mathrm{Id})^*H_c^*(\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}})\Big)\\
&=\sum_{\pi\in\{\pi\}_N^r}\mathrm{Tr}_\pi(\mathbf{1}_N)q^{(r-1)s}\big(z_1(\pi_\infty)^{-s'}+\cdots+z_r(\pi_\infty)^{-s'}\big)\big(z_1(\pi_0)^{u'}+\cdots+z_r(\pi_0)^{u'}\big)\\
&\quad+\sum_\iota c_\iota s^{m_\iota}\lambda_\iota^s\big(z_1(\pi'^\iota_\infty)^{-s'}+\cdots+z_{r'_\iota}(\pi'^\iota_\infty)^{-s'}\big)\big(z_1(\pi^\iota_0)^{u'}+\cdots+z_{r_\iota}(\pi^\iota_0)^{u'}\big).
\end{aligned}
$$

両辺を比較することにより，$m_\iota = 0$ であることが分かる．$\mathrm{MT}_{r'}$ を用いて $\pi^\iota, \pi''^\iota$ に対応するガロア表現をとり，それらの外部テンソル積を指標で捻ることにより，任意の $x = (\infty, 0)$ および $\deg\infty$, $\deg 0$ の公倍数 $s$ に対して

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_x^{-s/\deg x};\sigma_\iota) = \lambda_\iota^s\bigl(z_1(\pi''^\iota_\infty)^{-s'} + \cdots + z_{r'_\iota}(\pi''^\iota_\infty)^{-s'}\bigr)\bigl(z_1(\pi_0^\iota)^{u'} + \cdots + z_{r_\iota}(\pi_0^\iota)^{u'}\bigr)$$

を満たす $r$-negligible な $\mathcal{G}_\ell(F^2)$ の元 $\sigma_\iota$ が構成できる．これに対し，

$$H^*_{N,\mathrm{ess}} = \frac{1}{r!}\sum_{n=1}^{r!}(\mathrm{Frob}^n \times \mathrm{Id})^* H_c^*(\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbf{Z}}) - \sum_\iota c_\iota\sigma_\iota$$

とおく．構成より明らかに，

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}\bigl(\mathrm{Frob}_x^{-s/\deg x}; H^*_{N,\mathrm{ess}}\bigr)\\ &= \sum_{\pi\in\{\pi\}_N^r}\mathrm{Tr}_\pi(\mathbf{1}_N)q^{(r-1)s}\bigl(z_1(\pi_\infty)^{-s'} + \cdots + z_r(\pi_\infty)^{-s'}\bigr)\bigl(z_1(\pi_0)^{u'} + \cdots + z_r(\pi_0)^{u'}\bigr)\end{aligned}$$

が成立する．特に $H^*_{N,\mathrm{ess}}$ は折れ線写像 $p$ のとり方によらない．

**ステップ 3**　$H^*_{N,\mathrm{ess}}$ が essential かつ重さ $2r-2$ であることを示す．

レベルなしの場合をまず述べる．$H^*_{\mathrm{ess}}$ の構成とステップ 1 から，

$$H^*_{\mathrm{ess}} - \frac{1}{r!}\sum_{n=1}^{r!}(\mathrm{Frob}^n \times \mathrm{Id})^* H^*(\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbf{Z}})$$

は $r$-negligible である．また，$\mathrm{MT}_{r'}$ iii) から $r$-negligible かつ既約な $\ell$ 進表現は pure であり，Deligne の purity から $H^\nu(\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbf{Z}})$ は pure かつ重さ $\nu$ である．したがって，$H^*_{\mathrm{ess}}$ の既約成分は全て pure である．$H^*_{\mathrm{ess}}$ が essential であることを証明するには，$r$-negligible な subquotient をもつと仮定し，ガロア表現と保型表現の $L$ 関数を比較して上記の事実と保型表現の Hecke 固有値の絶対値の評価を用いることで矛盾を導く．重さが $2r-2$ であることも同時に示せる．

レベルありの場合は普通のコホモロジーの代わりに交叉コホモロジーを用いて同様の議論を行えばよい．

このステップ 3 から，

- $H^*_{N,\mathrm{ess}}$ の既約成分は全て正の重複度をもつこと
- $H^*_{N,\mathrm{ess}} - 1/r!\sum_{n=1}^{r!}(\mathrm{Frob}^n \times \mathrm{Id})^* H_c^{2r-2}(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbf{Z}})$ が $r$-negligible であること

が従う．

**ステップ 4**　$p$ が十分上に凸であるとき，次の 2 つの写像の核と余核が $r$-negligible であることを証明する：

$$\begin{aligned}H_c^{2r-2}(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbf{Z}}) &\longrightarrow H_c^{2r-2}(\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}'/a^{\mathbf{Z}}),\\ H_c^{2r-2}(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbf{Z}}) &\longrightarrow H_c^{2r-2}(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p_1}/a^{\mathbf{Z}}) \quad (p \leq p_1).\end{aligned}$$

前者はステップ 1 から従う．また，埋め込み $\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}/a^{\mathbb{Z}} \hookrightarrow \mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p_1}/a^{\mathbb{Z}}$ のグラフの閉包によって得られる correspondence は $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p_1}}'/a^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}}'/a^{\mathbb{Z}}$ を引き起こす ([Laf1] Théorème V.14) ので，次の可換図式がある：

$$\begin{array}{ccc}
H_c^{2r-2}(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p_1}/a^{\mathbb{Z}}) & \longrightarrow & H_c^{2r-2}(\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p_1}}'/a^{\mathbb{Z}}) \\
\uparrow & & \downarrow \\
H_c^{2r-2}(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}/a^{\mathbb{Z}}) & \longrightarrow & H_c^{2r-2}(\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}}'/a^{\mathbb{Z}})
\end{array}$$

これより，$H_c^{2r-2}(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}/a^{\mathbb{Z}}) \longrightarrow H_c^{2r-2}(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p_1}/a^{\mathbb{Z}})$ の核は $H_c^{2r-2}(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}/a^{\mathbb{Z}}) \longrightarrow H_c^{2r-2}(\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}}'/a^{\mathbb{Z}})$ の核に含まれるので，後者のうち核についての主張は前者から従う．

これとステップ 2,3 から分かる，

$$\sum_{n=1}^{r!}(\mathrm{Frob}^n \times \mathrm{Id})^* H^{2r-2}(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p_1}/a^{\mathbb{Z}}) - \sum_{n=1}^{r!}(\mathrm{Frob}^n \times \mathrm{Id})^* H^{2r-2}(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}/a^{\mathbb{Z}})$$

が $r$-negligible であるという事実を合わせて，余核についての主張が示される．

**ステップ 5** $H^*_{N,\mathrm{ess}}$ を $H_c^{2r-2}(\mathrm{Cht}_N^r/a^{\mathbb{Z}})$（無限次元！）から再構成する．

$H_c^{2r-2}(\mathrm{Cht}_N^r/a^{\mathbb{Z}})$ に次のようにして増加フィルトレーション $F_\bullet$ を帰納的に定義する：

- $F_0 = 0$ である．
- $F_{2i}$ まで定まったとする．$F_{2i+1}/F_{2i}$ が $H_c^{2r-2}(\mathrm{Cht}_N^r/a^{\mathbb{Z}})/F_{2i}$ の有限次元部分表現で $r$-negligible であるものすべての和になるように $F_{2i+1}$ を定める．また，$F_{2i+2}/F_{2i+1}$ が $H_c^{2r-2}(\mathrm{Cht}_N^r/a^{\mathbb{Z}})/F_{2i+1}$ の有限次元部分表現で essential であるものすべての和になるように $F_{2i+2}$ を定める．

このとき，$F_\bullet$ は $\mathcal{H}_N \times \mathrm{Gal}(\overline{F^2}/F^2)$ の作用で保たれる．$H_{N,\mathrm{ess}} = \bigoplus_{i\ge 0} F_{2i+2}/F_{2i+1}$ とおく．

$H_c^{2r-2}(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}/a^{\mathbb{Z}})$ に対して同様の構成を行ったものを $F_\bullet^{\le p}$ と書くと，ステップ 4 から次がいえる：

- $F_{2i+2}^{\le p}/F_{2i+1}^{\le p} \hookrightarrow F_{2i+2}/F_{2i+1}$ は同型である．
- ある $i$ が存在して，$F_i = H_c^{2r-2}(\mathrm{Cht}_N^r/a^{\mathbb{Z}})$ となる．

これから（半単純化を除いて）$H_{N,\mathrm{ess}} = H^*_{N,\mathrm{ess}}$ であること，$H_{N,\mathrm{ess}}$ が有限次元であることが分かる．

なお，$H^*_{N,\mathrm{ess}}$ は $\mathcal{H}_N$ の作用をもたなかった（Hecke 環の作用で閉じていないスタック $\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\le p}/a^{\mathbb{Z}}$ を用いて構成したため）が，$H_{N,\mathrm{ess}}$ は $\mathcal{H}_N$ の作用をもつことが要点である．

**ステップ 6** $\mathrm{Tr}(f \times \mathrm{Frob}_x^{-s/\deg x}; H_{N,\mathrm{ess}})$ を計算する．

$\overline{\mathrm{Cht}^{\overline{p}\le p}}/a^{\mathbb{Z}}$ および $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}}'/a^{\mathbb{Z}}$ に定理 2.3 と定理 4.11, 4.12 を適用した後に，$\mathrm{MT}_{r'}$ を用いて $r$-negligible な部分を切り落とすための議論を行う．結果は次の定理の通りである：

**定理 5.4** ([Laf1] Théorème VI.25)

$$\mathrm{Tr}(f \times \mathrm{Frob}_x^{-s/\deg x}; H_{N,\mathrm{ess}}) = q^{(r-1)s} \sum_{\pi \in \{\pi\}_N^r} \mathrm{Tr}_\pi(f).$$

ステップ 7 $H_{N,\mathrm{ess}}$ を $\mathcal{H}_N \times \mathrm{Gal}(\overline{F^2}/F^2)$ の表現として $\bigoplus_{\pi \in \{\pi\}_N^r} \pi \boxtimes H_\pi(1-r)$ と分解し,

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_x^{-s/\deg x}; H_\pi) = \left(z_1(\pi_\infty)^{-s'} + \cdots + z_r(\pi_\infty)^{-s'}\right)\left(z_1(\pi_0)^{u'} + \cdots + z_r(\pi_0)^{u'}\right)$$

を証明する.

$\mathrm{Tr}_\pi(f_\pi) = 1$ かつ $\mathrm{Tr}_{\pi'}(f_{\pi'}) = 0$ $(\pi' \neq \pi)$ を満たす $f \in \mathcal{H}_r$ に対して定理 5.4 を適用するだけである.

ステップ 8 $\mathrm{MT}_r$ および $\mathrm{Neg}_r$ を証明する.

ステップ 7 と $L$ 関数の議論を用いることで, 次の定理が証明される:

**定理 5.5** ([Laf1] Théorème VI.27)
任意の $\pi \in \{\pi\}_N^r$ に対して, $H_\pi$ は $\pi_1(C \setminus N \times C \setminus N)$ の表現として $\mathrm{pr}_1^* \sigma_\pi \otimes \mathrm{pr}_2^* \check{\sigma}_\pi$ と分解する. ここで $\sigma_\pi$ は $C \setminus N$ 上の既約, smooth, 重さ 0 である $\ell$ 進層であり, $\check{\sigma}_\pi$ は $\sigma_\pi$ の反傾表現である. さらに, $\pi$ と $\sigma_\pi$ は Langlands の意味で対応する.

これは $\mathrm{Neg}_r$ を含んでいる. また, 命題1.6 より $\mathrm{MT}_r$ も従う. 以上で関数体上の Langlands 予想の証明が完了した.

## 参考文献


[C-P] J. W. Cogdell, I. I. Piatetski-Shapiro, *Converse theorems for* $\mathrm{GL}_n$, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. No. 79 (1994), 157–214.

[Fu1] K. Fujiwara, *Rigid geometry, Lefschetz-Verdier trace formula and Deligne's conjecture*, Invent. Math. **127** (1997), no. 3, 489–533.

[Fu2] K. Fujiwara, *Theory of tubular neighborhood in etale topology*, Duke Math. J. **80** (1995), no. 1, 15–57.

[G-M] M. Goresky, R. MacPherson, *Local contribution to the Lefschetz fixed point formula*, Invent. Math. **111** (1993), no. 1, 1–33.

[Laf1] L. Lafforgue, *Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands*, Invent. Math. **147** (2002), no. 1, 1–241.

[Laf2] L. Lafforgue, *Chtoucas de Drinfeld et conjecture de Ramanujan-Petersson*, Asterisque No. 243 (1997).

[Laf3] L. Lafforgue, *Une compactification des champs classifiant les chtoucas de Drinfeld*, J. Amer. Math. Soc. **11** (1998), no. 4, 1001–1036.

[Laf4] L. Lafforgue, *Chtoucas de Drinfeld, formule des traces d'Arthur-Selberg et correspondance de Langlands*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Beijing, 2002), 383–400.

[Lau] G. Laumon, *La correspondance de Langlands sur les corps de fonctions (d'après Laurent Lafforgue)*, Séminaire Bourbaki, Vol. 1999/2000. Asterisque No. 276 (2002), 207–265.

[L-M] G. Laumon, L. Moret-Bailly, *Champs algébriques*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, 39. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[Pi] R. Pink, *On the calculation of local terms in the Lefschetz-Verdier trace formula and its application to a conjecture of Deligne*, Ann. of Math. **135** (1992), no. 3, 483–525.

[Zi] T. Zink, *The Lefschetz trace formula for an open algebraic surface*, Automorphic forms, Shimura varieties, and $L$-functions, Vol. II (Ann Arbor, MI, 1988), 337–376, Perspect. Math., **11**, Academic Press Boston, MA, 1990.

[SGA4 1/2] P. Deligne, *Cohomologie étale (SGA 4 1/2)*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 569, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977.

[SGA5] *Cohomologie $\ell$-adique et Fonctions L (SGA 5)*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 589. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977.