数理解析研究所講究録 1398 巻 2004 年 129-136

ディリクレ指標で捻った L 関数の零点と元の L 関数の零点の間の関係

名古屋大学大学院多元数理科学研究科 D3 鈴木正俊 (Suzuki Masatosi)
Graduate School of Mathematics,
Nagoya University

1. 前ふり：ゼータ関数の零点の調和

ここでは「ゼータ関数の零点の調和」に関する研究の一つの試みについて報告する.「素数は調和している」という標語 (哲学・理想) はよく聞かれるが「ゼータ関数の零点の調和」という標語は今回筆者が勝手に使っているだけの用語である. 寡聞のため他では聞いた事がないのだが知っている方がいたら是非ご教示願いたい.

まずここで言っている「ゼータ関数の零点の調和」について説明する. 筆者が己の見識の浅さを棚に上げて書きたい事を書いているだけなので結果だけ知りたい方は次節から読んで頂きたい.

Euler 積を用いて定義される数論的 L 関数がよい解析的性質を持つ事は「ゼータ関数は, 素数たちが見事に協力しあう姿である [2]」という格言に見られる様に素数たちの美しい調和を表しているものと信じられている. 最も基本的なゼータ関数である Riemann ゼータ関数について, Riemann があまりに有名な論文「Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse」において素数とゼータ関数の零点の関係を見出して以来, ゼータ関数の零点の研究は数論の中心的課題の一つとなり, Riemann の後, ゼータ関数の零点に関する研究は星の数ほど行われた.

その中で Weil の明示公式と呼ばれる等式は素数とゼータ関数の零点の間のある種の双対性を表すものとしてとりわけ重要視されてきた (明示公式が多くの研究者を惹きつけてきた理由の一つに Selberg による跡公式の理論との関係があるが, これについて今回は触れない). 素数とゼータ関数の零点が双対の関係にあるのならば「素数は調和している」と言う代わりに「ゼータ関数の零点は調和している」と言っても良さそうな気がする. しかし素数とゼータ関数の零点の双対性を

$$\text{究極精密素数定理} \iff \text{Riemann 予想}$$

と理解すればゼータ関数の零点の調和とは Riemann 予想と言い換える事ができる. 従ってこれだけならわざわざ零点の調和などと言う用語をヒネくり出す必要もないだろう. この報告で述べたい零点の調和とは Riemann 予想と関係はするが若干趣を異にする事なのである.

ここでゼータ関数の大きなクラスの一つである保型表現のゼータ関数について触れる. 保型表現のゼータ関数で特筆されるのはそれが解析的に非常に良い性質を持つ事が保証されている事である. 加藤氏の言葉を借りれば「素数たちの見事な協力であることがわかっている [2]」. もう少し視点を大きくして保型表現のゼータ関数たちの相関関係をみてみよう. 保型表現のゼータ関数たちは一致協力して素晴らしい TRIBE を

作り上げているだろうか？これには現代数論の巨大な指導原理の一つである Langlands 予想が関係してくる．Langlands 予想は一言で言えば

$$\text{Galois 表現のゼータ関数} = \text{保型表現のゼータ関数}$$

と述べられる．もう少し詳しく述べれば

$$\text{Frobenius 置換の固有値} = \text{Hecke 作用素の固有値}$$

という事になる．

世に言う関手性とは粗く言えば, Galois 表現の代数的操作に対応した操作が保型表現のゼータ関数の方にもあるであろう, という事である．即ち保型表現のゼータ関数たちはてんでバラバラに存在しているのではなく, 協力して TRIBE を作り上げている事が予想されるのである．保型表現のゼータ関数に対してはその解析的性質から Weil の明示公式を証明する事ができ, Hecke 作用素の固有値とゼータ関数の零点の間の双対性が示される．従って Langlands 予想から Weil の明示公式を経由して, 保型表現のゼータ関数たちの零点たちの間には何らかの関係がある事が予想される．

この様な考えは既に零点の関手性として吉田氏が持っておられたものと思われる [9, 10]．しかしそれがどの様な形で与えられるべきかは未解明な部分が多い．また関手性の観点からは捉えられない様な零点の間の関係があるのか否かも不明である．今回の報告はこれらに関する試論の一つとしたい．

2. 導入

“良いクラス” のゼータ関数たちの零点は互いに関係している, という事について述べる．ここで “良いクラス” とは保型 L 関数のクラスや Selberg クラス等のように各対象が十分に良い解析的性質を持つ事を想定している．実際に幾つかの場合についてそれを示唆する結果が得られたのでそれについて報告する．まず 1947 年に Linnik により得られた結果の紹介から始めよう．

定理 (Linnik [4]) $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ を Riemann ゼータ関数, $\chi \bmod q$ を原始的 Dirichlet 指標とし, $L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s}$ を Dirichlet L 関数とする．このとき次の漸近的等式が成立つ．

$$\sum_{\substack{L(\rho,\chi)=0 \\ 0<\mathrm{Re}(\rho)<1}} \Gamma(\rho) X^{-\rho} = -\sum_{\substack{\zeta(\rho)=0 \\ 0<\mathrm{Re}(\rho)<1}} \frac{\Gamma(\rho)}{\tau(\bar{\chi})} \sum_{a=1}^{q} \bar{\chi}(a) \left(X - 2\pi i \frac{a}{q} \right)^{-\rho} + O(\log^2 X) \quad (X \to +0). \tag{2.1}$$

この Linnik の結果で注目されるのは, この漸近的な等式が

$$\{\text{Dirichlet } L \text{ 関数の零点を渡る和}\} = \{\text{Riemann ゼータ関数の零点を渡る和}\}$$

という形をしている事である．これは Riemann ゼータ関数と Dirichlet L 関数の零点の間に何らかの関係がある事を示唆している．実際, Sprindzuk は [8] において Riemann 予想を仮定した上で, $\zeta(s)$ の零点の垂直方向の分布から $L(s,\chi)$ に関する Riemann 予想が導かれる事を示した．またこの結果は, もっと一般の場合でも, 異なるゼータ関数の零点の間に何らかの関連があるのではないかと想像させる．

しかしながら, 零点の間の関係と言ってもそれがどの様なものであるのかは判然としない. そこでまず (2.1) の漸近式をより一般の場合に拡張するという問題を考えてみる. これに関して, 次の二つの方向に関して部分的に結果が得られた.

(♠) $L(s,\chi)$ は $\zeta(s)$ の χ-twist であるという見方に立ち, より一般の L 関数とその χ-twist の組に対し (2.1) を一般化する.

(♣) Dirichlet 指標は GL(1) の保型表現であるという見方に立ち, GL(n) の保型表現 π の L 関数 $L(s,\pi)$ と $\zeta(s)$ の組に対し (2.1) を一般化する.

結果を述べる前に一つ注意しておくと, (♠) と (♣) どちらの場合でも対象とする L 関数が Euler 積を持つという事が重要なポイントとなる. 局所的に見れば零点の間の関係は単純である. 例えば $\zeta(s)$ と $L(s,\chi)$ の場合では, 局所 L 関数はそれぞれ $1-p^{-s}$ と $1-\chi(p)p^{-s}$ であるから互いの零点の集合は平行移動の関係にある. 以下で述べる結果は, この様な局所 L 関数の零点の関係が大域的 L 関数の零点の関係に延長されたものと見る事ができる. これについては最後にもう少し詳しく言及する.

3. ♠ に関する結果

(♠) の問題に関して, まず我々はどの様な L 関数のクラスを考えるのかを指定せねばならない. 勿論より多くの L 関数に関して結果が得られる事が望ましいから対象はなるべく広いものを選びたい. (♣) との絡みで考えれば保型表現 π とその χ-twist $\pi\otimes\chi$ の L 関数の組を考えるのも良いのだが, $L(s,\pi)$ の解析的性質は予想はされていても証明されていない部分も多い. そこで今回は, L 関数の望ましい解析的性質を公理として採用した Selberg クラスと呼ばる関数のクラスに関して問題を考えてみた.

Selberg クラスとは, 次の (S-1)~(S-5) を満たす関数 $L(s)$ の成すクラスであり, しばしば $\mathcal{S}$ と表記される (より正確な定義は [1] を参照のこと).

(S-1) $L(s)$ は $\mathrm{Re}(s)>1$ で絶対収束する Dirichlet 級数表示を持つ.
(S-2) $L(s)$ は全複素平面に有理型に解析接続され, $s=1$ を除いて正則.
(S-3) $L(s)$ は標準的な形の ($s\longleftrightarrow 1-s$ の) 関数等式を満たす.
(S-4) $L(s)$ の Dirichlet 係数は Ramanujan 予想に類似の評価を満たす.
(S-5) $L(s)$ は Euler 積表示を持つ.

Dirichlet 級数 $L(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a(n)n^{-s}$ の Dirichlet 指標 χ による χ-twist $L_\chi(s)$ を $L_\chi(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a(n)\chi(n)n^{-s}$ により定義する. 一般に $L(s)\in\mathcal{S}$ であっても $L_\chi(s)\in\mathcal{S}$ とは限らない. しかし $L(s)$ から定まる自然数 q_L があって $(q,q_L)=1$ である原始的 Dirichlet 指標 $\chi \bmod q$ に対しては $L_\chi(s)\in\mathcal{S}$ である事が予想されている [1].

定理 1. $L(s)$ を Selberg クラスに属する L 関数, $\chi \bmod q$ を原始的 Dirichlet 指標とする. $L_\chi(s)$ もまた Selberg クラスに属し, 更に $L_\chi(s)$ が $s=1$ で正則であると仮定する. この時, 任意のテスト関数 $h\in C_c^\infty(0,\infty)$ について漸近的等式

$$\sum_{\substack{L_\chi(\rho)=0\\ 0\le\mathrm{Re}(\rho)\le1}}\int_0^\infty h(Xu)u^\rho\frac{du}{u}=\sum_{\substack{L(\rho)=0\\ 0\le\mathrm{Re}(\rho)\le1}}\int_0^\infty h(Xu)\lambda_\chi(u)u^\rho\frac{du}{u}+O(1)\quad(X\to+0)\tag{3.1}$$

が成り立つ. ここで両辺の零点を渡る和は重複度を込めて渡るものとし, $\lambda_\chi(u)$ は

$$\lambda_\chi(u) = \frac{1}{\tau(\overline{\chi})} \sum_{a=1}^{q} \overline{\chi}(a) e^{2\pi i a u/q} \tag{3.2}$$

で定義される $\mathbf{R}$ 上の関数.

4. (♣) に関する結果

4.1. 楕円モジュラー関数の L 関数と Riemann ゼータ関数.

S_k を上半平面上の weight k, (level 1) の正則尖点形式全体のなすベクトル空間とする. よく知られている様に S_k の元 $f(z)$ は Fourier 展開

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n) e^{2\pi i n z}$$

をもつ. 与えられた $f \in S_k$ について, その Fourier 係数を用いて f に付随する L-関数 $L(s,f)$ が

$$L(s,f) = \sum_{n \geq 1} a_f(n) n^{-s}.$$

により定義される. Ramanujan-Deligue の評価 $a_f(n) \ll_\varepsilon n^{(k-1)/2+\varepsilon}$ により右辺の級数は右半平面 $\sigma > (k+1)/2$ で絶対収束する. また $L(s,f)$ は全平面に整関数として解析接続され関数等式

$$\Lambda(s,f) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(s,f) = (-1)^{k/2}\Lambda(k-s,f)$$

を満たす. 更に $f \in S_k$ が normalized Hecke-eigen cusp form ならば $L(s,f)$ は Euler 積表示

$$L(s,f) = \prod_p (1 - a_f(p)p^{-s} + p^{k-1-2s})^{-1}.$$

を持つ事が知られている.

定理 2. $f \in S_k$ を normalized Hecke-eigen cuspform とする. また $\zeta(s)$ の Riemann 予想を仮定する[1]. この時 $h \in C_c^\infty(0,\infty)$ について

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{L(\rho,f)=0 \\ \frac{k-1}{2} < \mathrm{Re}(\rho) < \frac{k+1}{2}}} \int_0^\infty h(Xu) u^\rho \frac{du}{u} \\
&= \sum_{\substack{\zeta(\rho)=0 \\ 0<\mathrm{Re}(\rho)<1}} \int_0^\infty h(Xu)\lambda_f(u) u^\rho \frac{du}{u} + \frac{1}{2}\widehat{h}(\frac{k}{2}) \cdot x^{-k/2} + O(X^{-\frac{k}{2}+\frac{1}{6}-\varepsilon}) \\
&(X \to +0)
\end{aligned} \tag{4.1}$$

が任意の正数 ε について成り立つ. ここで λ_f は

$$\lambda_f(u) = e^{2\pi} \int_1^2 f(X + iu^{-1}) e^{-2\pi i u X} dX \tag{4.2}$$

により定義される $(0,\infty)$ 上の関数.

[1]この条件は「$\zeta(s)$ が $\mathrm{Re}(s) > \frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ に零点を持たない.」で置き換える事が可能.

4.2. **Rankin-Selberg L 関数と Riemann ゼータ関数.**
2 つの weight k, level 1 の normalized Hecke-eigen cusp form

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a(n)e^{2\pi inz}\in S_k,\quad g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b(n)e^{2\pi inz}\in S_k$$

が与えられていて, それぞれに付随する L 関数の Euler 積は

$$L(s,f)=\prod_p(1-a(p)p^{-s}+p^{k-1-2s})^{-1}=\prod_p[(1-\alpha_pp^{-s})(1-\beta_pp^{-s})]^{-1},$$
$$L(s,g)=\prod_p(1-b(p)p^{-s}+p^{k-1-2s})^{-1}=\prod_p[(1-\gamma_pp^{-s})(1-\delta_pp^{-s})]^{-1},$$

であるとする. このとき Rankin-Selberg L 関数 $L(s,f\otimes g)$ は

$$L(s,f\otimes g)=\prod_p[(1-\alpha_p\gamma_pp^{-s})(1-\alpha_p\delta_pp^{-s})(1-\beta_p\gamma_pp^{-s})(1-\beta_p\delta_pp^{-s})]^{-1}$$

により定義される. $L(s,f\otimes g)$ は $\sigma>k$ において

$$L(s,f\otimes g)=\zeta(2s-2k+2)\sum_{n=1}^{\infty}a(n)b(n)n^{-s}$$

という表示を持ち, 右辺の級数は $\sigma>k$ で絶対収束する. また関数等式

$$\Lambda(s,f\otimes g)=(4\pi)^{-s}\Gamma(s)\Gamma(s-k+1)L(s,f\otimes g)=\Lambda(2k-1-s,f\otimes g)$$

を満たす. $\Lambda(s,f\otimes g)$ は $s=k,k-1$ で可能な一位の極を持つ他は正則で $s=k$ での留数は Petersson 内積 $\langle f,g\rangle$ の定数倍となる事が知られている. 従って特に $\langle f,g\rangle=0$ ならば $L(s,f\otimes g)$ は $s=k$ で正則である.

定理 3. $f,\ g\in S_k$ を normalized Hecke-eigen cuspform とする. また$\zeta(s)$, $L(s,f\otimes f)$, $L(s,g\otimes g)$ の Riemann 予想を仮定する[2]. このとき $h\in C_c^{\infty}(0,\infty)$ について

$$\begin{aligned}
&-\widehat{h}(k)\delta_{f=g}X^{-k}+\sum_{\substack{L(\rho,f\otimes g)=0\\ k-1<\mathrm{Re}(\rho)<k}}\int_0^{\infty}h(Xu)u^{\rho}\frac{du}{u}\\
&=\sum_{\substack{L(\rho,f)=0\\ \frac{k-2}{2}<\mathrm{Re}(\rho)<\frac{k+1}{2}}}\int_0^{\infty}h(Xu)\lambda_g(u)u^{\rho}\frac{du}{u}+\frac{k-2}{2}\widehat{h}(\frac{2k-1}{2})\cdot X^{-\frac{2k-1}{2}}+O(X^{-\frac{2k-1}{2}+\frac{1}{6}-\varepsilon})\\
&=\sum_{\substack{\zeta(\rho)=0\\ 0<\mathrm{Re}(\rho)<1}}\int_0^{\infty}h(Xu)\lambda_f(u)\lambda_g(u)u^{\rho}\frac{du}{u}+\frac{2k-5}{2}\widehat{h}(\frac{2k-1}{2})\cdot X^{-\frac{2k-1}{2}}+O(X^{-\frac{2k-1}{2}+\frac{1}{6}-\varepsilon})
\end{aligned}\tag{4.3}$$

$(X\to+0)$

が任意の正数 ε について成り立つ. 但し $\delta_{f=g}$ は $f=g$ の時 1 でそれ以外は 0 とする.

---

[2]この条件も「$\zeta(s)$ が $\mathrm{Re}(s)>\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$ に零点を持たない.」「$L(s,f\otimes f)$ が $\mathrm{Re}(s)>\frac{2k-1}{2}+\frac{1}{6}$ に零点を持たない.」等々で置き換える事が可能.

5. 証明の概略

定理 1 〜 3 どの場合に関しても証明の鍵となるポイントは次の 2 点である:

(A) 適当な Dirichlet 係数の補間式を見つける事,

(B) Weil の明示公式.

Weil の明示公式は L 関数の Dirichlet 係数の情報を零点の情報に翻訳する為に用いるだけなので, 本質的に重要なのは (A) の部分である. 基本的な筋道はどの場合も同様なので以下定理 1 の証明の概略について述べる. 証明の詳細については [6, 7], 明示公式に関しては [3, 5, 6] 等を参照して頂きたい.

$L(s) \in \mathcal{S}$ に対して $\Lambda_L(n)$ を $(L'/L)(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_L(n) n^{-s}$ により定める. また原始的 Dirichlet 指標 $\chi \bmod q$ に対し $\mathbf{R}$ 上の関数 $\lambda_\chi(\cdot)$ を (3.2) により定める. 再記すると

$$\lambda_\chi(u) = \frac{1}{\tau(\overline{\chi})} \sum_{a=1}^{q} \overline{\chi}(a) \exp(2\pi i a u/q).$$

定義から任意の整数 n に対し $\lambda_\chi(n) = \chi(n)$ である事に注意しよう. 即ち $\lambda_\chi(\cdot)$ は $\chi(\cdot)$ の補間式となっている. ここでテスト関数 $h \in C_c^\infty(0,\infty)$ に対し次の和を考える:

$$S(X,h) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_L(n)\chi(n)h(Xn).$$

$S(X,h)$ を補間式 $\lambda_\chi(\cdot)$ と Weil の明示公式を用い 2 通りに計算する. まず $\Lambda_L(n)\chi(n) = \Lambda_{L_\chi}(n)$ である事から

$$S(X,h) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_{L_\chi}(n)h(Xh)$$

ここで $L_\chi(s)$ とテスト関数 $u \mapsto h(Xu)$ に対して Weil の明示公式を適用する事により

$$S(X,h) = -\sum_{L_\chi(\rho)=0} \int_0^\infty h(Xu)u^\rho \frac{du}{u} + O(1). \tag{5.1}$$

一方 $\lambda_\chi(n) = \chi(n)$ から

$$S(X,h) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_L(n)\lambda_\chi(n)h(Xn)$$

であり, ここで $L(s)$ とテスト関数 $u \mapsto \lambda_\chi(u)h(Xu)$ に対して Weil の明示公式を適用する事により

$$S(X,h) = -\sum_{L(\rho)=0} \int_0^\infty h(Xu)\lambda_\chi(u)u^\rho \frac{du}{u} + O(1). \tag{5.2}$$

(5.1), (5.2) を合わせれば定理 1 が得られる. $\square$

6. おわりに

導入でも述べた様に局所的に見ればここで扱った L 関数たちの零点の間の関係は全く単純である．例えば $\zeta(s)$, $L(s,\chi)$, $\widetilde{L}(s,f) := L(s+\frac{k-1}{2}, f)$ の局所 L 関数はそれぞれ

$$\zeta_p(s) := 1 - p^{-s}, \quad L_p(s,\chi) := 1 - \chi(p)p^{-s}, \quad \widetilde{L}_p(s,f) := (1 - \widetilde{\alpha}_p p^{-s})(1 - \widetilde{\beta}_p p^{-s}),$$

ここで $\widetilde{\alpha}_p + \widetilde{\beta}_p = a_f(p)p^{(1-k)/2}$, $\widetilde{\alpha}_p\widetilde{\beta}_p=1$, であるから, $L_p(s,\chi)$ の零点集合は $\zeta_p(s)$ の零点集合の平行移動であり, $\widetilde{L}_p(s,f)$ の零点集合は 2 つの $\zeta_p(s)$ の零点集合の平行移動の合併である．テスト関数 $h \in C_0^\infty(0,\infty)$ を用いて書けば

$$\sum_{L_p(\rho,\chi)=0} \widehat{h}(\rho) = \sum_{\zeta_p(\rho)=0} \widehat{h}(\rho + \frac{\log\chi(p)}{\log p}), \quad (p,q)=1 \tag{6.1}$$

$$\sum_{\widetilde{L}_p(\rho,f)=0} \widehat{h}(\rho) = \sum_{\zeta_p(\rho)=0} \widehat{h}(\rho + \frac{\log\widetilde{\alpha}_p}{\log p}) + \sum_{\zeta_p(\rho)=0} \widehat{h}(\rho + \frac{\log\widetilde{\beta}_p}{\log p}). \tag{6.2}$$

となる．ここで $\widehat{h}$ は h の Mellin 変換を表すものとする．

一方, 定理 1 の証明と同様の方法により

$$\sum_{\substack{L(\rho,\chi)=0 \\ 0<\mathrm{Re}(\rho)<1}} \frac{X^\rho}{\rho} \sim \sum_{\substack{\zeta(\rho)=0 \\ 0<\mathrm{Re}(\rho)<1}} \int_0^X \lambda_\chi(u)u^\rho \frac{du}{u} \quad (X \to +\infty)$$

を示す事ができる．この両辺に形式的に微分作用素 $X\frac{d}{dX}$ を施す事により

$$\sum_{\substack{L(\rho,\chi)=0 \\ 0<\mathrm{Re}(\rho)<1}} X^\rho \sim \sum_{\substack{\zeta(\rho)=0 \\ 0<\mathrm{Re}(\rho)<1}} \lambda_\chi(X)X^\rho \quad (X \to +\infty) \tag{6.3}$$

が得られる．この両辺は収束しないので通常の X 関数としての意味は持たない．しかし (6.3) の左辺をテスト関数 $h \in C_c^\infty(0,\infty)$ に対して

$$\int_0^\infty h(u) \sum_\rho u^\rho \frac{du}{u} = \sum_\rho \widehat{h}(\rho)$$

の様にして右辺の値を対応させる超関数と見れば (6.3) を超関数の間の関係式として捉える事ができる．超関数のレベルで見れば (6.3) は $L(s,\chi)$ の零点はあたかも $\zeta(s)$ の零点の χ による平行移動の如き振る舞いをしている様に思われる．局所的な平行移動の関係 (6.1), (6.2) が $\chi(\cdot)$ の補間式 $\lambda_\chi(\cdot)$ により大域的な零点の関係 (6.3) へと延長されるのである．

References

[1] J.Kaczorowski, A.Perelli, *The Selberg class: a survey*, Arch. Math. (Basel) 80 (2003), no. 3, 255–263.

[2] 加藤和也, *Artin-Haass-Weil L* 関数 (ガロア理論型 L 関数), 第 9 回 整数論サマースクール報告集「ゼータ関数」(於 休暇村大久野島 2001), 39–51.

[3] S.Lang, *Algebraic Number Theory*, Addison-Wesley, Reading, MA 1970.

[4] Ju.V.Linnik, *On the expression of the zeros of L-series by means of ζ-function*, (Russian) Doklady Akad. Nauk SSSR (N. S.) 57, (1947). 435–437.

[5] Z.Rudnick, P.Sarnak, *Zeros of principal L-functions and randome matrix theory*, Duke Math. J. 81(1996), no.2, 269–322.

[6] M.Suzuki, *A relation between the zeros of a L-function belonging to the Selberg class and the zeros of an associated L-function twisted by a Dirichlet character*, to appear in Archiv der Mathematik.

[7] M.Suzuki, *A relation between the zeros of the Riemann zeta-function and the zeros of automorphic L-functions* , preprint.

[8] V.G.Sprindzuk, *Vertical distribution of the zeros of zeta-function and extended Riemann hypotesis*, (Russian) Acta Arith. 27 (1975), 317–332.

[9] H.Yoshida, *On a certain distribution on $GL(n)$ and explicit formulas*, Proc. Japan Acad. Ser. A, 63 (1987), 396–399.

[10] H.Yoshida, *On calculations of zeros of various L-functions*, 保型形式シンポジウム報告集（於 城崎町城崎会議所 1993), 42–47.

Masatoshi Suzuki,
Graduate School of Mathematics,
Nagoya University,
Chikusa-ku, Nagoya 464-8602,
Japan
e-mail address:m99009t@math.nagoya-u.ac.jp