数理解析研究所講究録 1398 巻 2004 年 157-170

Multiplicity One Property and the Decomposition of b-Functions

筑波大学数理物質科学研究科数学専攻　杉山 和成 (Kazunari Sugiyama)

Institute of Mathematics, Tsukuba University,
Tsukuba, Ibaraki, 305-8571, Japan.
email: kazunari@math.tsukuba.ac.jp

1 序

本稿の内容は立教大学理学部の佐藤文広氏との共同研究にもとづいている．
このノートで主張したいことは，大まかにいって次の 2 点である．

(1) 可約な概均質ベクトル空間 $(G, \rho_1 \oplus \rho_2, E \oplus F)$ の相対不変多項式 f に付随する b-関数 $b_f(s)$ を考える．群 G の多項式環 $\mathbb{C}[E] \otimes \mathbb{C}[F]$ への作用に関するある重複度 1 条件の下で，$b_f(s)$ は

$$b_f(s) = b_1(s)\, b_2(s)$$

という表現の分解に対応した分解をもつ．

(2) (G, ρ_2, F) が本質的に $(GL_m \times GL_n, M_{m,n})$ と同値ならば，

$$b_2(s) = \prod_{k=1}^{n} \prod_{i=0}^{d-1} \left(s + \frac{m-n+i+k}{d} \right) \qquad (d = \deg_F f/n)$$

となる．さらに，都合の良い状況の下では，$b_1(s)$ の計算はもとの空間より次元の下がった概均質ベクトル空間の b-関数の計算に帰着する．

このような現象の存在は，具体例の計算を通じてはじめて認識されたものであって，理論的に予期されたものではなかったという点を強調しておきたい．この結果の応用として，(i) 既知の b-関数の計算が簡略化される例がある，(ii) b-関数に出てくる因子が意味づけされる，ということがあるが，最も大きいものとして (iii) 今まで有効な計算手段のなかった非正則概均質ベクトル空間の b-関数を計算する手だてを与える，ということがある．

本稿では，表現の分解に対応した b-関数の分解とは何を指すのか，また主定理の背後にあるアイディアはどのようなものであるか，ということを説明することに主眼を置く．証明など詳細については [SS] を参照してください．

謝辞

今回の発表の機会を与えて下さった渡部隆夫先生に心より感謝申し上げます.

2 b-関数とは

まず概均質ベクトル空間および(1変数の) b-関数の定義を簡単に復習する. 詳しくは, [K3] などを参照して下さい.

G を複素数体 $\mathbb{C}$ 上定義された連結代数群とし, $\rho: G \to GL(V)$ を G の有限次元ベクトル空間 V の上への有理表現とする. 三つ組 (G, ρ, V) は, V 内に稠密な G-軌道 O_0 が存在するとき, **概均質ベクトル空間**であるといわれる. また, V 上の有理関数 $f(\neq 0)$ が**相対不変式**であるとは, G のある有理指標 χ が存在して $f(\rho(g)v) = \chi(g)f(v)$ $(g \in G, v \in O_0)$ が成り立つことである. 以後, 群 G が**簡約可能代数群**であるような概均質ベクトル空間 (G, ρ, V) および V 上の指標 χ に対応する相対不変**多項式** $f \in \mathbb{C}[V]$ を fix して議論する. $n = \dim V, d = \deg f$ とおく. このとき,

(1) 双対三つ組 (G, ρ^*, V^*) も再び概均質ベクトル空間になる

(2) 指標 χ^{-1} に対応する d 次の相対不変多項式 $f^*(v^*) \in \mathbb{C}[V^*]$ が存在する

ことが知られている. 多項式 f^* の変数を偏微分作用素 $\mathrm{grad}_v = (\partial/\partial v_1, \ldots, \partial/\partial v_n)$ で置き換えて得られる d 次の微分作用素を $f^*(\mathrm{grad}_v)$ とかく. このとき, 同じ指標に対応する相対不変式は定数倍を除いて一致するという事実から, 形式的な恒等式

$$f^*(\mathrm{grad}_v)f(v)^{s+1} = b_f(s)f(v)^s$$

をみたす d 次の多項式 $b_f(s) \in \mathbb{C}[s]$ の存在がわかる. ここでは, s は複素数と考えずに, $f^*(\mathrm{grad}_v)$ は $f(v)^{s+1}$ に形式的に作用している, とくに $s \in \mathbf{N}$ と思って構わない. $b_f(s)$ を f の **b-関数**とよぶ. b-関数は, ゼータ関数の解析的性質(関数等式のガンマ因子, 極の位置など)に深く関わっており, 数論的に(も)極めて重要な量である (cf. [I], [K3]).

3 表現の分解と b-関数の分解

さて, ρ が既約表現であるような概均質ベクトル空間 (G, ρ, V) は [SK] により分類されており, それらの b-関数もおもに超局所計算法によりすでに計算されている (cf. [K1], [SKKO]). そこで, 表現が可約である概均質ベクトル空間の b-関数を問題にしたい.

次ページにいくつかの可約な概均質ベクトル空間の b-関数の表を与えた．まず，表の見方を説明しよう．表に与えられている概均質ベクトル空間はすべて

$$(G,\rho,V) = (G' \times GL_m \times GL_n,\ \rho' \otimes \rho^{(m)} \otimes 1 + 1 \otimes \Lambda_1 \otimes \Lambda_1,\ E \oplus M_{m,n})$$

という形をしている．ただし，$m > n$ で，G' は任意の簡約可能代数群であり，$\rho', \rho^{(m)}$ はそれぞれ G', GL_m の任意の有理表現である．また，Λ_1 は自然表現を意味する．その他，表現の記号などについては [K3], [SK] を参照して下さい．表にある 5 つの場合では，基本相対不変式の個数は 1 つないしは 2 つである[*1]．f というのは，与えられた次数を持つ基本相対不変式を指すが（これらの例では次数だけで定数倍を除いて特定できる），はっきり言えば次のようなものを考えている：$(G' \times GL_m,\ \rho' \otimes \rho^{(m)},\ E)$ という概均質ベクトル空間が正則ならば，E 上に既約相対不変式 f_0 が現れるが，表の 5 つの場合では，既約成分が一つ増えた (G,ρ,V) という概均質ベクトル空間はもう一つ別に既約相対不変式 f を持つ．つまり，可約な概均質ベクトル空間を考えることによって初めて現れる相対不変式を f としている．f は E 側の変数 x と $M_{m,n}$ 側の変数 y の両方を含んでいることに注意する．

これらの f に対する b-関数 $b_f(s)$ を表として並べてみると，はっきりとした特徴が現れている．つまり，**$b_f(s)$ は m, n, d という量だけから定まる因子―ボックスで囲まれているもの―を持っている．** ただし，$f(x,y)$ の y に関する次数 $\deg_y f(x,y)$ を n で割って得られる数を d としている．さらに，**ボックスの外側にある因子は，何かある既約正則概均質ベクトル空間の b-関数[*2]に一致しているのである．** 実際，対応する空間を書き出してみると

(A)	$(GL_{m-n} \times GL_{m-n},\ \Lambda_1 \otimes \Lambda_1,\ M_{m-n})$
(B)	$(GL_{m-n},\ \Lambda_2,\ \mathrm{Alt}_{m-n})$
(C)	$(GL_{m-n},\ 2\Lambda_1,\ \mathrm{Sym}_{m-n})$
(D)	$(GL_n,\ (2\Lambda_1)^{(*)},\ \mathrm{Sym}_n)$
(E)	$(SO_l \times GL_n,\ \Lambda_1 \otimes \Lambda_1^{(*)},\ M_{l,n})$

となっている．これらの概均質ベクトル空間はもとの空間の $(G' \times GL_m,\ \rho' \otimes \rho^{(m)},\ E)$ と同じタイプではあるが，**次元が下がっている**ことに注意しよう．このような現象のことを

$$\boxed{\text{表現の分解に対応した } b\text{-関数の分解}}$$

とよんでいる．

[*1] 正確に言うと，(A) の場合は常に 1 つ，(C), (D), (E) の場合は常に 2 つ，(B) の場合は m, n がともに偶数［奇数］ならば 2 つ［1 つ］である．

[*2] 既約正則概均質ベクトル空間の場合は，基本相対不変式は唯一つなので b-関数は定数倍を除き一意的に決まる．

$$(G,\rho,V) = (G' \times GL_m \times GL_n,\ \rho' \otimes \rho^{(m)} \otimes 1 + 1 \otimes \Lambda_1 \otimes \Lambda_1,\ E \oplus M_{m,n}) \qquad (m > n)$$

	(G,ρ,V) and $\deg f$	$d = \deg_y f(x,y)/n$	$b_f(s)$
(A)	$(GL_{m-n} \times GL_m \times GL_n,\ M_{m-n,m} \oplus M_{m,n})$ $\rho' = \Lambda_1,\ \rho^{(m)} = \Lambda_1,\ \deg f = m$	1	$\prod_{j=1}^{m-n}(s+j) \times \boxed{\prod_{k=1}^{n}(s+m-n+k)}$
(B)	$(GL_m \times GL_n,\ \mathrm{Alt}_m \oplus M_{m,n})$ $(m+n = \text{even})$ $G' = \{1\},\ \rho^{(m)} = \Lambda_2,\ \deg f = (m+n)/2$	1	$\prod_{j=1}^{(m-n)/2}(s+2j-1) \times \boxed{\prod_{k=1}^{n}(s+m-n+k)}$
(C)	$(GL_m \times GL_n,\ \mathrm{Sym}_m \oplus M_{m,n})$ $G' = \{1\},\ \rho^{(m)} = 2\Lambda_1,\ \deg f = m+n$	2	$\prod_{j=1}^{m-n}\left(s+\frac{j+1}{2}\right) \times \boxed{\prod_{k=1}^{n}\prod_{i=0}^{1}\left(s+\frac{m-n+i+k}{2}\right)}$
(D)	$(GL_m \times GL_n,\ \mathrm{Sym}_m \oplus M_{m,n})$ $G' = \{1\},\ \rho^{(m)} = (2\Lambda_1)^*,\ \deg f = 3n$	2	$\prod_{j=1}^{n}\left(s+\frac{j+1}{2}\right) \times \boxed{\prod_{k=1}^{n}\prod_{i=0}^{1}\left(s+\frac{m-n+i+k}{2}\right)}$
(E)	$(SO_l \times GL_m \times GL_n,\ M_{l,m} \oplus M_{m,n})$ $(l > m)$ $\rho' = \Lambda_1,\ \rho^{(m)} = \Lambda_1^*,\ \deg f = 4n$	2	$\prod_{p=1}^{n}\left(s+\frac{p+1}{2}\right)\prod_{q=1}^{n}\left(s+\frac{l-q+1}{2}\right) \times$ $\times \boxed{\prod_{k=1}^{n}\prod_{i=0}^{1}\left(s+\frac{m-n+i+k}{2}\right)}$

4 アイディア

このような現象の背後にある原理とは何であろうか? それは，群 G の多項式環への作用を考えることによって理解されるのであるが，いきなり答えを書く前に，素朴な計算を通じてアイディアを説明したい．ナイーブな言い方をすると，b-関数を定義するときに用いられる微分作用素 $f^*(\mathrm{grad}_v)$ も表現の分解に対応した表示式

$$f^*(\mathrm{grad}_v) = \sum_{i=1}^{\nu} f_i^{*(1)}(\mathrm{grad}_x) f_i^{*(2)}(\mathrm{grad}_y)$$

を，(一意的ではないかもしれないが) 持っているわけである．b-関数はこの微分作用素を $f(x,y)^{s+1}$ に作用して出てくるものであるが，b-関数が分解を持つというなら，$f_i^{*(1)}(\mathrm{grad}_x)$ を $f(x,y)^{s+1}$ に作用させても—"微分作用素の方を分解してしまっても"— 何かしら良い振舞いをすることを期待するのはごく自然であろう．

上のように考えれば，当然ながら実例で確かめてみたくなる．例として，前ページの表の (A) という空間を考えよう．簡単のため，$\boldsymbol{n=1}$ とする．つまり，

$$(G,\rho,V) = (GL_m \times GL_{m-1} \times GL_1,\ \Lambda_1 \otimes \Lambda_1 \otimes 1 + \Lambda_1 \otimes 1 \otimes \Lambda_1,\ M_{m,m-1} \oplus M_{m,1})$$

とする．ここで，記号を簡単にするため，GL_m と GL_{m-1} の順番を入れ替え，$M_{m-1,m}$ を転置させて $M_{m,m-1}$ としていることに注意．すると作用は，具体的には，

$$\rho(g)v = (g_m x\, {}^t g_{m-1},\ g_m y g_1) \qquad (g = (g_m, g_{m-1}, g_1) \in G,\ v = (x,y) \in V)$$

により与えられる．このとき，(G,ρ,V) は唯一つの既約相対不変多項式

$$f(v) = \det(x \,|\, y)$$

をもつ．ただし，$(x|y)$ は x と y を並べてできる m 次の正方行列を表す．$\Delta_i(x)$ を x から第 i 行を取り除いて得られる $(m-1)$ 次の正方行列の行列式とすると，余因子展開から

$$\det(x \,|\, y) = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{m-i} y_i \Delta_i(x)$$

が成り立っている．(G,ρ,V) と (G,ρ^*,V^*) を内積 $\langle v, v^* \rangle = \mathrm{tr}\,{}^t x x^* + {}^t y y^*$ で同一視すると，$f^*(v^*) = \det(x^* \,|\, y^*)$ が (G,ρ^*,V^*) の既約相対不変多項式になる．そこで，$\Delta_i(x^*)$ の変数を偏微分作用素で置き換えた $\Delta_i(\mathrm{grad}_x)$ を $f(x,y)^{s+1}$ に作用させるのであるが，実は，小さい m で確かめてみると，

$$\Delta_i(\mathrm{grad}_x) f(x,y)^{s+1} = \left\{ \prod_{j=1}^{m-1} (s+j) \right\} \cdot (-1)^{m-i} y_i \cdot f(x,y)^s \qquad (i = 1,\ldots,m)$$

という式が成り立っているだろうということが比較的容易に予測できる．

そこで一般に，i に依存しないある多項式 $b_1(s)$ が存在して，

$$(\heartsuit) \qquad \Delta_i(\mathrm{grad}_x)f(x,y)^{s+1} = b_1(s)\cdot(-1)^{m-i}y_i\cdot f(x,y)^s \qquad (i=1,\ldots,m)$$

が成り立つ，というところまで何らかの方法で分かったと仮定しよう[*3]．すると，($\heartsuit$) と Euler の恒等式をあわせると，

$$\begin{aligned} f^*(\mathrm{grad}_x,\mathrm{grad}_y)f(x,y)^{s+1} &= \left\{\sum_{i=1}^m(-1)^{m-i}\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)\Delta_i(\mathrm{grad}_x)\right\}\cdot f(x,y)^{s+1} \\ &= \sum_{i=1}^m(-1)^{m-i}\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)\cdot\{b_1(s)\cdot(-1)^{m-i}y_i\cdot f(x,y)^s\} \\ &= b_1(s)\cdot\left\{\sum_{i=1}^m\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)y_i\right\}\cdot f(x,y)^s \\ &= b_1(s)(s+m)\cdot f(x,y)^s \end{aligned}$$

となる．すなわち，m 次の行列式 $f(v)=\det(x\,|\,y)$ の b-関数 $b_{\det,m}(s)$ は

$$b_{\det,m}(s) = b_1(s)\cdot(s+m)$$

と分解することが分かる．一方，($\heartsuit$) において $i=m,\ y={}^t(0,\ldots,0,1)$ とすると，$\Delta_m(\mathrm{grad}_x)\Delta_m(x)^{s+1} = b_1(s)\cdot\Delta_m(x)^s$ となるが，この式は $b_1(s)$ が $(m-1)$ 次の行列式の b-関数 $b_{\det,m-1}(s)$ に一致することを意味している．とくに，$b_{\det,m}(s)=b_{\det,m-1}(s)\cdot(s+m)$ である．ゆえに，($\heartsuit$) を認めれば，m に関する帰納法から

$$b_{\det,m}(s) = (s+1)(s+2)\cdots(s+m)$$

となることが示される．

以上の計算は，b-関数が表現の分解に対応した分解を持つということの根拠が，($\heartsuit$) のような恒等式の存在にあるということを強く示唆している．実際，類似の計算を表にあげたような他の概均質ベクトル空間に対しても実行してみると，同様の恒等式が成り立っていることが確かめられる．

さらに，良く観察してみると，$b_{\det,m}(s)$ に $(s+m)$ という因子（今の場合，これが前節で存在を主張した m,n,d のみに依存する因子に他ならない）が現れるのは，$f(x,y)^s$ に $\sum_{i=1}^n(\partial/\partial y_i)y_i$ という微分作用素が作用しているからだということに気づくであろう．そ

[*3] 実は，行列式の場合に限っていえば，このタイプの恒等式は以前から知られていた．(cf. [HU].)

して，この微分作用素 $\sum_{i=1}^{n}(\partial/\partial y_i)y_i$ の作用が $(s+m)$ に“化けてしまう”のは，$f(x,y)$ の y に関する次数が 1，つまり $d=n=1$ であるからであって，$f(x,y)$ が行列式であるというような構造とは関係がない．

次節以降，このようなメカニズムを G の多項式環への表現に着目して一般化する．

5 重複度 1 条件と b-関数の分解

この節では，次を仮定する．

(A.1) (G,ρ,V) は簡約可能概均質ベクトル空間である．
(A.2) 表現 ρ は可約であり，直和分解 $(\rho,V)=(\rho_1,E)\oplus(\rho_2,F)$ が存在する．
(A.3) $V=E\oplus F$ 上に指標 χ に対応する相対不変多項式 $f(v)=f(x,y)$ が存在する．

はじめに述べたように，上の仮定から双対三つ組 $(G,\rho_1^*\oplus\rho_2^*,E^*\oplus F^*)$ は再び概均質ベクトル空間であり，この空間上に指標 χ^{-1} に対応する相対不変多項式 $f^*(x^*,y^*)$ が存在する．

我々は，V 上の多項式環 $\mathbb{C}[V]$ を

$$(g\circ Q)(v)=Q(\rho(g)^{-1}v)\qquad(g\in G,Q\in\mathbb{C}[V]).$$

により左 G-加群とみなす．同様にして，$\mathbb{C}[V^*]$ も左 G-加群とみなす．すると，自然な G-加群の同型 $\mathbb{C}[V]\cong\mathbb{C}[E]\otimes\mathbb{C}[F]$，$\mathbb{C}[V^*]\cong\mathbb{C}[E^*]\otimes\mathbb{C}[F^*]$ が成り立つ．G の有限次元既約有理表現の同値類の集合を $\widehat{G}$ と表す．また，$\tau\in\widehat{G}$ に対して，$\mathbb{C}[E]$ における τ-同変部分（isotypic component）を $\mathbb{C}[E]_\tau$ と記す．$\mathbb{C}[F]_\tau$, $\mathbb{C}[E^*]_\tau$, $\mathbb{C}[F^*]_\tau$ なども同様に定義する．このとき，相対不変式がその指標により一意的に定まるという事実から次の補題が導かれる．

補題 5.1. $\pi\in\widehat{G}$ で，$\mathbb{C}[E]_{\chi^{-1}\pi^*}\otimes\mathbb{C}[F]_\pi$ が指標 χ^{-1} から定まる 1 次元 G-加群 $\mathbb{C}(\chi^{-1})$ を含むようなものが唯一つ存在する．このとき，$\mathbb{C}(\chi^{-1})$ に自然に対応する $\mathbb{C}[V]$ の部分加群は $\mathbb{C}f$ である．

以後 π は上の補題により定まる表現の同値類を表すとする．$\mathbb{C}[F]_\pi$ の基底 $\{f_1^{(2)}(y),\dots,f_\nu^{(2)}(y)\}$ を一つ fix して，$\mathbb{C}[F^*]_{\pi^*}$ の双対基底を $\{f_1^{*(2)}(y^*),\dots,f_\nu^{*(2)}(y^*)\}$ とする．このとき，f および f^* を

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sum_{i=1}^{\nu} f_i^{(1)}(x)f_i^{(2)}(y) && (x\in E,y\in F),\\ f^*(x^*,y^*) &= \sum_{i=1}^{\nu} f_i^{*(1)}(x^*)f_i^{*(2)}(y^*) && (x^*\in E^*,y^*\in F^*). \end{aligned}$$

と表すことができる．f の b-関数 $b_f(s)$ は $f^*(\mathrm{grad}_x, \mathrm{grad}_y)f(x,y)^{s+1} = b_f(s)f(x,y)^s$ により定義される．

命題 5.2. $k = \deg_x f(x,y)$ として，次を仮定する．

(★) $\qquad \chi^{-(k-1)}\pi$ の $\mathbb{C}[E \oplus F]$ における重複度は 1 である

このとき，ある $b_1(s) \in \mathbb{C}[s]$ が存在して

$$f_i^{*(1)}(\mathrm{grad}_x)f(x,y)^{s+1} = b_1(s)f_i^{(2)}(y)f(x,y)^s \qquad (i = 1, \ldots, \nu) \tag{5.1}$$

となる（ここで，$b_1(s)$ は i に依存しない）．

証明の概略. 次のような “intertwining operator” を考えるところがポイントである：$s \in \mathbb{C}$ に対して，線型写像 $T_s : \mathbb{C}[E^*]_{\chi\pi} \to \mathbb{C}[V][f^{-1}]$ を

$$T_s(Q^*) = \frac{Q^*(\mathrm{grad}_x)f(x,y)^{s+1}}{f(x,y)^s} \qquad (Q^* \in \mathbb{C}[E^*]_{\chi\pi}). \tag{5.2}$$

により定義する．重複度 1 条件 (★) が成り立つと，T_s は $\mathbb{C}[E^*]_{\chi\pi}$ から $\mathbb{C}[F]_\pi$ への線型同型写像を与えることになる．一方，$\mathbb{C}[E^*]_{\chi\pi}$ から $\mathbb{C}[F]_\pi$ への写像としては，

$$T'\left(f_i^{*(1)}(x^*)\right) = f_i^{(2)}(y) \qquad (\text{基底の対応})$$

というのもある．ところが，T_s と T' は同じ変換則をみたしており，さらに，$\mathbb{C}[E^*]_{\chi\pi}$ および $\mathbb{C}[F]_\pi$ は既約であるから，Schur の補題によって，T_s と T' は定数倍を除いて一致しなくてはならない．すなわち，ある $b_1(s) \in \mathbb{C}^\times$ があって，$T_s = b_1(s)T'$ となるが，これは (5.1) 式に他ならない． □

いま，重複度 1 条件 (★) を仮定すると，上の命題から

$$\begin{aligned}
b_f(s) &= \frac{f^*(\mathrm{grad}_x, \mathrm{grad}_y)f(x,y)^{s+1}}{f(x,y)^s} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{\nu} f_i^{*(2)}(\mathrm{grad}_y)f_i^{*(1)}(\mathrm{grad}_x)f(x,y)^{s+1}}{f(x,y)^s} \\
&= b_1(s)\frac{\left\{\sum_{i=1}^{\nu} f_i^{*(2)}(\mathrm{grad}_y)f_i^{(2)}(y)\right\} f(x,y)^s}{f(x,y)^s}
\end{aligned}$$

となる．最右辺に現れた多項式係数微分作用素

$$\sum_{i=1}^{\nu} f_i^{*(2)}(\mathrm{grad}_y)f_i^{(2)}(y)$$

は G の作用に関して不変である．このことから次の補題が成り立つ．

補題 5.3. ある多項式 $b_2(s)\in\mathbb{C}[s]$ が存在して，次の formal identity をみたす:

$$\left\{\sum_{i=1}^{\nu} f_i^{*(2)}(\mathrm{grad}_y)f_i^{(2)}(y)\right\} f(x,y)^s = b_2(s)f(x,y)^s.$$

以上の議論から，次の定理が得られた．

定理 5.4.

$$b_f(s)=b_1(s)\,b_2(s).$$

我々は，上の式を ***b*-関数の分解公式**とよぶ．多項式 $b_1(s)$ は，[Sa1] において（もっと一般的な状況の下で）定義された “*b*-matrices” の特別な場合である．上の定理によって $b_f(s)$ の計算は，$b_1(s), b_2(s)$ の計算に帰着される．$b_1(s)$ の計算は，適当な y や i を選んで行ってよい．しばしば，次元の下がった概均質ベクトル空間の *b*-関数の計算に帰着する．一方，次節で述べるように，あるクラスの概均質ベクトル空間に対しては，$b_2(s)$ の計算はきわめて容易である．

6 $b_2(s)$ の公式

この節以降,

(6.1) $(G,\rho,V)=(G'\times GL_m\times GL_n,\ \rho'\otimes\rho^{(m)}\otimes 1+1\otimes\Lambda_1^*\otimes\Lambda_1^*,\ E\oplus M_{m,n})\qquad (m>n)$

という形の概均質ベクトル空間を考える．記号は第 3 節で説明した通りであるが，$GL_m\times GL_n$ の $M_{m,n}$ への作用が $\Lambda_1\otimes\Lambda_1$ から $\Lambda_1^*\otimes\Lambda_1^*$ に変わっている．これは，$GL_m\times GL_n$ の多項式環 $\mathbb{C}[M_{m,n}]$ への作用を記述するのに便利だからという理由で深い意味はなく，また，このようにしても一般性を損なうことはない[*4]．一方，可約な概均質ベクトル空間の分類についての結果から (6.1) という形をした概均質ベクトル空間がきわめて豊富に存在することが保証されている（cf. [K2]）．

我々はさらに，上の (G,ρ,V) に相対不変多項式 f が存在して，重複度 1 条件 (★) が成り立つと仮定する．すると，*b*-関数 $b_f(s)$ は $b_f(s)=b_1(s)\,b_2(s)$ という分解を持つ．このとき，次の定理がなりたつ．

定理 6.1.

$$b_2(s)=\prod_{k=1}^{n}\prod_{i=0}^{d-1}\left(s+\frac{m-n+i+k}{d}\right)\times(\text{constant}).$$

[*4] GL_n は $M_{m,n}$ にしか作用していないから，ここの作用を変えても概均質性や相対不変式には何の影響も与えない．GL_m については，$\rho^{(m)}$ の方も同時にひねってしまうことにする．

定理 6.1の証明のアイディアを簡単に述べておきたい．キーポイントとなるのは，いわゆる (GL_m, GL_n)-双対性である．次節で，GL_n の表現に関する記号を使う都合もあり，ここで (GL_m, GL_n)-双対性について簡単に復習しておこう．

良く知られているように，GL_n の有限次元既約有理表現は

$$C_n = \{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n\,;\, \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n\}.$$

という集合によって自然にパラメトライズされる．正確にいうと，GL_n の有限次元既約有理表現の同値類の集合 $\widehat{GL_n}$ と GL_n の diagonal torus A_n 上のドミナントウェイトの集合 $\widehat{A_n}$ の間には全単射があり，さらに，$\lambda \in C_n$ に対して，A_n 上の指標 ψ_λ を

$$\psi_\lambda(a) = \prod_{j=1}^{n} a_j^{\lambda_j} \qquad (a = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n) \in A_n)$$

により定義すると，写像 $C_n \ni \lambda \mapsto \psi_\lambda \in \widehat{A_n}$ は,C_n と $\widehat{A_n}$ の間の全単射になる．C_n の部分集合

$$C_n^+ = \{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n\,;\, \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0\}$$

は GL_n の既約多項式表現をパラメトライズしていることに注意しよう．与えられた $\lambda \in C_n$ に対して，最高ウェイト ψ_λ を持つ GL_n の有限次元既約有理表現（の同値類）を λ_{GL_n} と記す．

さて，$GL_m \times GL_n$ $(m > n)$ の $M_{m,n}$ への作用 $\Lambda_1^* \otimes \Lambda_1^*$ を具体的に書くと

$$(g_m, g_n) \cdot y = {}^t g_m^{-1}\, y\, g_n^{-1} \qquad ((g_m, g_n) \in GL_m \times GL_n,\ y \in M_{m,n})$$

となっており，これに付随する多項式環 $\mathbb{C}[M_{m,n}]$ への作用は

$$(g_m, g_n) \circ Q(y) = Q({}^t g_m y g_n) \qquad ((g_m, g_n) \in GL_m \times GL_n,\ Q(y) \in \mathbb{C}[M_{m,n}])$$

となっている．このとき，次の定理が成り立つ．

定理 6.2 ((GL_m, GL_n)-双対性). $\mathbb{C}[M_{m,n}]$ は $GL_m \times GL_n$ の作用で次のように既約分解する．

$$\mathbb{C}[M_{m,n}] \cong \bigoplus_{\lambda \in C_n^+} \lambda_{GL_m} \otimes \lambda_{GL_n}.$$

ここで，$\lambda \in C_n^+$ のことを $\lambda \mapsto (\lambda_1, \ldots, \lambda_n, 0, \ldots, 0)$ により C_m^+ の元とみなしている．

この定理からとくに，$GL_m \times GL_n$ の $M_{m,n}$ への作用は重複度自由（multiplicity free）であることが分かる．すると，重複度自由な作用に付随する不変微分作用素についての議論 (cf. [HU]）を援用でき，$b_2(s)$ を不変微分作用素

$$\sum_{i=1}^{\nu} f_i^{*(2)}(\mathrm{grad}_y) f_i^{(2)}(y)$$

の“固有値”と解釈することができる．よって，$b_2(s)$ は $(G\times GL_m, \rho'\otimes\rho^{(m)}, E)$ の構造に関係なく定まることが分かり，とくに次の補題が成り立つ．

補題 6.3. d を正整数とする．もし，定理 6.1がある特定の $(G_0'\times GL_m, \rho_0'\otimes\rho_0^{(m)}, E)$ および $\deg_y f_0 = dn$ なる相対不変多項式 f_0 について成り立つならば，定理 6.1は任意の $(G\times GL_m, \rho'\otimes\rho^{(m)}, E)$ および $\deg_y f = dn$ なる相対不変多項式 f について成り立つ．

そこで, 補題 6.3における $(G_0'\times GL_m, \rho_0'\otimes\rho_0^{(m)}, E)$ として $(GL_{m-n}\times GL_m, \Lambda_1^*\otimes\Lambda_1^*, M_{m-n,m})$ をとり，f_0 として $\det({}^t x\,|\,y)^d$ $(x\in M_{m-n,m}, y\in M_{m,n})$ をとる．このときは，$b_2(s)$ は容易に計算できるので，定理 6.1が成り立つことが確かめられる．

7 重複度 1 条件 (★) について

以上の議論からすれば，当然，次のことが問題になる:

重複度 1 条件 (★) はどのようなときに成り立つのか?

残念ながら，今のところ，上の問題に対して完全に満足すべき解答が得られているわけではない．しかしながら，(★) に対する有効な判定条件を幾つか見つけることができているので，その結果を紹介したい．

前節と同様に，我々は (6.1) という形の概均質ベクトル空間 (G,ρ,V) を考える．さらに，V 上に指標 χ に対応する相対不変多項式 $f(v)=f(x,y)$ が存在すると仮定する．いま，群が $G=G'\times GL_m\times GL_n$ という形をしているから，指標 χ は

$$\chi(g)=\chi'(g')\cdot(\det g_m)^{-l}\cdot(\det g_n)^{-e}\qquad (g=(g',g_m,g_n)\in G)$$

という形に書ける．ここで，l,e は整数であり，χ' は G' の指標である．実は，GL_n が $M_{m,n}$ にしか作用していないことに注意して，(GL_m,GL_n)-双対性などを使うと $e=d$ $(=\deg_y f(x,y)/n)$ となることが示される．

さて，$\mathbb{C}[E]$ を G'-加群とみたときの $\chi'^{-(k-1)}$-同変部分を $\mathbb{C}[E]_{\chi'^{-(k-1)}}$ と記し，我々は $\mathbb{C}[E]_{\chi'^{-(k-1)}}$ を GL_m-加群とみなす．また，$\mu\in C_m$ に対して，$\mathbb{C}[E]_{\chi'^{-(k-1)}}$ における μ_{GL_m}-同変部分を $\mathcal{R}_\mu^{(m)}$ とかく．さらに，

$$C_{m,\rho}=\{\mu\in C_m\,;\,\mathcal{R}_\mu^{(m)}\neq\{0\}\}$$

とおくと，$\mathbb{C}[E]_{\chi'^{-(k-1)}}$ は GL_m-加群として次のように分解する．

$$\mathbb{C}[E]_{\chi'^{-(k-1)}}=\bigoplus_{\mu\in C_{m,\rho}}\mathcal{R}_\mu^{(m)}.$$

このとき，次のような2つの判定条件が得られている．

定理 7.1. 次の2条件 (a) および (b) が成り立つと仮定する．

(a) $l = d$.

(b) $C_{m,\rho} \subset C_m^+$. すなわち，$\mathbb{C}[E]_{\chi'^{-(k-1)}}$ 内に実現される GL_m の表現はすべて多項式表現である．

このとき，重複度1条件 (★) が成り立つ．

定理 7.2. 次の2条件 (a) および (b) が成り立つと仮定する．

(a) $l = 0$.

(b) $C_{m,\rho} \subset C_m^-$，ここで C_m^- は

$$C_m^- = \{\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m) \in \mathbf{Z}^m\,;\, \mu_m \leq \cdots \leq \mu_1 \leq 0\}.$$

と定義される集合である．すなわち，$\mathbb{C}[E]_{\chi'^{-(k-1)}}$ 内に実現される GL_m の表現はすべて多項式表現ではない有理表現である．

このとき，重複度1条件 (★) が成り立つ．

例えば，第3節の表に現れる概均質ベクトル空間について言うと，(A), (B), (C) については定理 7.1をつかって重複度1条件 (★) が成り立つことを証明でき，(D), (E) については定理 7.2を適用できる．

証明の（ひとつの）ポイントは，今の設定の下では，補題 5.1で与えられる G の表現 π が具体的に書けてしまうという点である．すなわち，[SK] の記号を使うと，π は

$$\pi = 1_{G'} \otimes (d\Lambda_n)_{GL_m} \otimes (d\Lambda_n)_{GL_n}$$

と表される．上の二つの判定条件は，この事実と，一般線型群のテンソル積の分解を記述する Littlewood-Richardson 規則などを使って証明されるのであるが，いささか複雑である．詳細については，[SS] を参照してください．

最後に，これらの結果を利用した非自明な計算例について簡単に紹介しておこう．

$G = GL_2 \times GL_7 \times GL_1$, $V = \mathrm{Alt}_7^{\oplus 2} \oplus M_{7,1}$ とする．$g = (g_2, g_7, g_1) \in G$ および $v = (X_1, X_2\,;\, y) \in V$ に対して

$$\rho(g)v = \rho(g_2, g_7, g_1)(X_1, X_2\,;\, y) = \left(({}^t g_7^{-1} X_1 g_7^{-1},\ {}^t g_7^{-1} X_2 g_7^{-1}) g_2^{-1}\,;\, {}^t g_7^{-1} y g_1^{-1}\right)$$

と定義すると，(G,ρ,V) は唯一つの基本相対不変式 f を持つ非正則な概均質ベクトル空間になる．このとき，定理 7.1 が適用でき，重複度 1 条件 (★) が成り立つことが分かる．よって，b-関数は $b_f(s) = b_1(s)\,b_2(s)$ という分解を持つが，実は $b_1(s)$ は既約正則概均質ベクトル空間 $(SL_6 \times GL_2,\ \Lambda_2 \otimes \Lambda_1,\ \mathrm{Alt}_6^{\oplus 2})$ の b-関数に一致する．一方，$d = \deg_y f/n = 4$ より，定理 6.1から $b_2(s) = \prod_{i=0}^{3}(s + (7+i)/4)$ が分かる．したがって，

$$b_f(s) = (s+1)^2\left(s+\frac{5}{6}\right)\left(s+\frac{7}{6}\right)\left(s+\frac{3}{2}\right)^2\left(s+\frac{7}{4}\right)(s+2)^3\left(s+\frac{9}{4}\right)\left(s+\frac{5}{2}\right)^3\left(s+\frac{7}{3}\right)\left(s+\frac{8}{3}\right)$$

となる．計算の詳細については [SS] を参照してください．

8 closing comment

[1] 具体例の計算から，次のような場合には重複度 1 条件 (★) は成り立たないであろうと予想されている．

(i) 相対不変式 f が可約な場合，あるいは
(ii) (G,ρ_2,F) が相対不変式を持っている場合，あるいは
(iii) (G,ρ_1,E) が裏返し変換（cf. [K3],[SK]）でより次元の低い空間に変換できる場合．

とくに，b-関数の分解公式は多変数の b-関数に対しては適用できない（と考えられる）．

[2] 定理 7.1および定理 7.2はある程度は有効である．しかしながら，「これらの定理の仮定はみたさないが，表現の分解に対応する分解を持つ，ないしは，まず間違いなく持つであろうという b-関数の例」というのも幾つか確認されている．

いずれにせよ，重複度 1 条件 (★) の本質は現時点ではまだ理解できているとはいえず，今後さらに研究されるべき課題である．

[3] 応用については上に述べた例のほかにも，次のようなものがある．

- [Sa2] で扱われたような flag type の概均質ベクトル空間に付随する（1 変数）b-関数に対しては，分解公式を繰り返し適用できて，最後のステップで既約概均質ベクトル空間の b-関数の計算に帰着させることができる．
- GL_m を Borel 部分群 B_m に制限して得られる三つ組 $(G' \times B_m,\ \rho' \otimes \rho^{(m)},\ E)$ が再び概均質ベクトル空間になるならば，概均質ベクトル空間の理論を使って $\mathbb{C}[E]_{\chi'^{-(k-1)}}$ の GL_m-加群としての構造を記述することができる．そのような例が [SS] で扱われている．

- 非正則概均質ベクトル空間への応用は，[Su] でも扱われている．

[4] 冒頭で述べたように，b-関数の分解という現象は，多くの具体例の計算を通じて初めて認識された．その意味で，今回の発見は，A. Gyoja, K. Ukai, S. Wakatsuki の諸氏による仕事（cf. [U], [W], および [U] に引用されている文献）に負うところが大きい．

参考文献

[HU] R. Howe and T. Umeda, The Capelli identity, the double commutant theorem and multiplicity free actions, *Math. Ann.* **290**(1991), 565–619.

[I] J.-I. Igusa, *An introduction to the theory of local zeta functions*, Studies in Advanced Mathematics **14**, American Mathematical Society, 2000.

[K1] T. Kimura, The b-functions and holonomy diagrams of irreducible regular prehomogeneous vector spaces, *Nagoya Math. J.* **85**(1982), 1–80.

[K2] T. Kimura, A classification theory of prehomogeneous vector spaces, *Adv. Studies in pure Math.* **14**(1988), 223–256.

[K3] 木村達雄，概均質ベクトル空間，岩波書店，1998（第 3 刷 2004）.

[Sa1] F. Sato, Zeta functions with polynomial coefficients associated with prehomogeneous vector spaces, *Comment. Math. Univ. St. Pauli* **45**(1996), 177–211.

[Sa2] F. Sato, b-Functions of prehomogeneous vector spaces attached to flag manifolds of the general linear group, *Comment. Math. Univ. St. Pauli* **48**(1999), 129–136.

[SS] F. Sato and K. Sugiyama, Multiplicity one property and the decomposition of b-functions, preprint, 2004.

[SKKO] M. Sato, M. Kashiwara, T. Kimura and T. Oshima, Micro-local analysis of prehomogeneous vector spaces, *Invent. Math.* **62**(1980), 117–179.

[SK] M. Sato and T. Kimura, A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their invariants, *Nagoya Math. J.* **65**(1977), 1–155.

[Su] K. Sugiyama, b-Function of a prehomogeneous vector space with no regular component, preprint, 2004.

[U] K. Ukai, b-Functions of prehomogeneous vector spaces of Dynkin-Kostant type for exceptional groups, *Compositio Math.* **135**(2003), 49–101.

[W] S. Wakatsuki, Some b-functions of regular 2-simple prehomogeneous vector spaces of type I, 数理解析研究所講究録 **1281**(2002), 154–166.