数理解析研究所講究録 1399 巻 2004 年 1-7

Block 上での２つのノルムの同値性について

東京理科大学ポストドクトラル研究員 丹羽 美由紀 (Miyuki Niwa)
Faculty of Science and Technology,
Tokyo University of Science

1. 補間定理の歴史

1926 年，M. Riesz[12] は L_p 空間での補間定理を示した．そして後の 1938 年 G. O. Thorin[15] がこの定理を拡張したため，Riesz-Thorin の補間定理としてよく知られている．Riesz の証明は後の実補間法に，Thorin の証明は後の複素補間法の基となる．

定理 1 (Riesz-Thorin の補間定理). $1 \le p_0, p_1, q_0, q_1 \le \infty, 0 < \theta < 1$, T は線型作用素とする．T が L_{p_0} 空間から L_{q_0} 空間へ作用素ノルム M_0 で有界，かつ，T が L_{p_1} 空間から L_{q_1} 空間へ作用素ノルム M_1 で有界ならば，T は L_p 空間から L_q 空間へ作用素ノルム $M \le M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$ で有界となる．ここで $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1, 1/q = (1-\theta)/q_0 + \theta/q_1$.

この定理に対して，様々な拡張がなされたのであるが，その中の重要な結果のとして 1958 年の Stein-Weiss[14] による，重みつき L_p 空間での補間定理と 1966 年の Calderón[3]-Hunt[8] による Lorentz 空間での補間定理があげられる．

定理 2 (Stein-Weiss の補間定理). $1 \le p_0, p_1 < \infty, 0 < \theta < 1$, T は準線型作用素 $(|T(f+g)| \le |Tf| + |Tg|)$, v_0, v_1, w_0, w_1 は非負可測関数とする．T が $L_{p_0}(v_0 d\mu)$ 空間から $L_{q_0}(w_0 d\nu)$ 空間へ有界，かつ，T が $L_{p_1}(v_1 d\mu)$ 空間から $L_{q_1}(w_1 d\nu)$ 空間へ有界ならば，T は $L_p(v d\mu)$ 空間から $L_q(w d\mu)$ 空間へ有界となる．ここで $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1, 1/q = (1-\theta)/q_0 + \theta/q_1, v^{1/p} = v_0^{(1-\theta)/p_0} v_1^{\theta/p_1}, w^{1/q} = w_0^{(1-\theta)/q_0} w_1^{\theta/q_1}$.

定理 3 (Calderón-Hunt の補間定理). $1 \le p_0, p_1 < \infty$, $1 \le q_0 \ne q_1 \le \infty$, $0 < \theta < 1$, T は擬線型作用素 $(|T(f+g)| \le K(|(Tf| + |Tg|)$, K は定数$)$ とする．T が $L_{p_0 q_0}$ 空間から $L_{r_0 s_0}$ 空間へ有界，かつ，T が $L_{p_1 q_1}$ 空間から $L_{r_1 s_1}$ 空間へ有界ならば，$q \le s$ に対して，L_{pq} 空間から L_{rs} 空間へ有界となる．ここで $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1, 1/r = (1-\theta)/r_0 + \theta/r_1$.

一方，Lions[9, 1959 年], Lions-Peetre[10, 1960 年] らによって，Riesz-Thorin や Stein-Weiss の補間定理が Banach 空間の対 (カップル) の間の線型作用素に拡張された．

定義 4. Banach (quasi Banach) 空間 X_0 と X_1 に対して，分離線型位相空間 $\mathcal{X}$ が存在して X_0 と X_1 が $\mathcal{X}$ に連続的に埋め込まれるとき，(X_0, X_1) は (compatible) couple になるという．(X_0, X_1) を $\bar{X}$ と表す．

- $X_0 + X_1 = \{x : x = x_0 + x_1,\ x_0 \in X_0, x_1 \in X_1\}$
- $\|x\|_{X_0+X_1} = \inf_{x=x_0+x_1} (\|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1})$
- $\|x\|_{X_0 \cap X_1} = \max\{\|x\|_{X_0}, \|x\|_{X_1}\}$

定義 5 (K-関数，K-補間空間). $x \in X_0 + X_1$, $t > 0$ に対して，

$$K(t, x; \bar{X}) = \inf_{x=x_0+x_1} (\|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1})$$

を K-関数と言う．$0 < \theta < 1$, $0 < q \leq \infty$, $x \in X_0 + X_1$ に対して，

$$\|x\|_{\theta,q:K} = \left(\int_0^\infty [t^{-\theta} K(t, x; \bar{X})]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty$$

となる x 全体を K-補間空間といい，$K_{\theta,q}(\bar{X}) = \bar{X}_{\theta,q;K}$ で表す．

定義 6 (J-関数，J-補間空間). $x \in X_0 \cap X_1$, $t > 0$ に対して，

$$J(t, x; \bar{X}) = \max\{\|x\|_{X_0}, t\|x\|_{X_1}\}$$

を J-関数と言う．$0 < \theta < 1$, $0 < q \leq \infty$ とする．$u(t) : [0, \infty) \to X_0 \cap X_1$ は $x = \int_0^\infty u(t) dt/t$ を満たすとする．このとき，

$$\|x\|_{\theta,q:J} = \inf_{x=\int_0^\infty u(t)dt/t} \left(\int_0^\infty [t^{-\theta} J(t, x; \bar{X})]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty$$

となる x 全体を J-補間空間といい，$J_{\theta,q}(\bar{X}) = \bar{X}_{\theta,q;J}$ で表す．

次の２つの定理 (定理 7 と定理 8) は実補間法の２大定理と言われる．

定理 7 (equivalent theorem).

$$K_{\theta,q}(\bar{X}) = J_{\theta,q}(\bar{X}), \quad \textit{with equivalent norm.}$$

注意 1. この定理により，K-法，J-法のどちらで補間空間を考えても同値になるので，K や J を記さないことがある．

定理 8 (reiteration theorem).

$$(\bar{X}_{\theta_0,q_0}, \bar{X}_{\theta_1,q_1})_{\lambda,q} = \bar{X}_{\theta,q},$$

ここで

$$\theta = (1-\lambda)\theta_0 + \lambda\theta_1,\ \theta_0 \neq \theta_1.$$

したがって，実補間法で Riesz-Thorin, Stein-Weiss, Calderón-Hunt はそれぞれ次のように表すことができる.

- $(L_{p_0}, L_{p_1})_{\theta,p} = L_p, \quad 1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1,$
- $(L_{p_0}(w_0 d\mu), L_{p_1}(w_1 d\mu))_{\theta,p} = L_p(w d\mu),$
  $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1, w^{1/p} = w_0^{(1-\theta)/p_0} w_1^{\theta/p_1},$
- $(L_{p_0q_0}, L_{p_1q_1})_{\theta,q} = L_{pq}, \quad 1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1.$

そこで，Stein-Weiss と Calderón-Hunt を統合させた，重みつき Lorentz 空間での補間が考えられるのは自然であるが，1997年に Ferreyra[4] が反例を与えた．即ち，

$$(L_{p_0q_0}(w_0 d\mu), L_{p_1q_1}(w_1 d\mu))_{\theta,q} \neq L_{pq}(w d\mu).$$

ここで p, q, r は前に同じとする.

一方，Gilbert[6, 1972年], Lizorkin[11, 1975年], Freitag[5, 1978年] らによっても，重みつき L_p 空間の補間が考えられ，次の結果が得られた.

$$(L_{p_0}(w_0 d\mu), L_{p_1}(w_1 d\mu))_{\theta,q} = L_{pq}\left(\left(\frac{w_1}{w_0}\right)^{1/(p_1-p_0)}, \left(\frac{w_0^{p_1}}{w_1^{p_0}}\right)^{1/(p_1-p_0)} d\mu\right).$$

これを Stein-Weiss の結果と比べてみると，インデックス q が任意になっていることがわかる．その代わり右辺の空間が多少複雑な重みつき Lorentz 空間になっていることがわかる.

定義 9 (重みつき Lorentz 空間 $L_{p,q}(u, v d\mu)$).

$$L_{p,q}(u, v d\mu) = \{f : \|f\|_{L_{p,q}(u,v d\mu)} < \infty\},$$

ここで，

$$\|f\|_{L_{p,q}(u,v d\mu)} = \begin{cases} \left(\dfrac{q}{p}\displaystyle\int_0^\infty (t^{1/p}(f\cdot u)_v^*(t))^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q}, & 0 < p, q < \infty, \\ \displaystyle\sup_{t>0} t^{1/p}(f\cdot u)_v^*(t), & 0 < p < \infty,\ q = \infty. \end{cases}$$

$u \equiv 1$ ならば $L_{p,q}(v d\mu)$ と表し， $v \equiv 1$ ならば $L_{p,q}(u)$ と表すことにする.

ここで f_v^* は f の v に関する再配列関数を表す.

ここまでは couple に対する補間を述べてきたのであるが，n 個の Banach (quasi Banach) 空間の補間についても考えられてきた．ここで $\bar{X}=(X_0,X_1,\cdots,X_n)$ は n-tuple を表すとする．1974 年，Sparr[13] は次のことを示した．

定理 10. $(n+1)$-*tuple* $\bar{X}$ に対して，*equivalent theorem* が成立するならば *reiterarion theorem* も成立する．

しかし，Sparr 自身が equivalence theorem の反例を示した．これに対して 1997 年，Asecritova-Krugljak[1] が "Banach (quasi Banach) function lattice の n-tuple に対しては equivalent theorem が成立する" ことを示した．この結果を用いて，2001 年 Asecritova-Krugljak-Maligranda-Nikolova- Persson[2] が triple (X_0,X_1,X_2) に対する理論を用いて，重みつき Lorentz 空間の補間空間を表現した．そのために新しい関数空間である block-Lorentz 空間を導入した．

定義 11 (block-Lorentz 空間 $L^{\sigma,q}_{pr}$). $\Omega_k=\Omega_k(w)=\{x\in\Omega:2^k\leq w(x)<2^{k+1}\}$, $\sigma\in\mathbb{R}$, $0<p,q,r\leq\infty$ に対して，

$$L^{\sigma,q}_{pr}=\{f:\|f\|_{L^{\sigma,q}_{pr}}<\infty\},$$

ここで，

$$\|f\|_{L^{\sigma,q}_{pr}}=\Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\|fw^{\sigma}\chi_{\Omega_k}\|^q_{L_{pr}}\Big)^{1/q}$$

注意 2. $p=q=r$ の場合は重みつき L_p 空間に一致する．即ち，

$$L^{\sigma,p}_{pp}=L_p(w^{\sigma}d\mu).$$

次の定理は重みつき Lorentz 空間の補間を表している．$f\approx g$ は $C_1g\leq f\leq C_2g$ を満たす C_1,C_2 が存在することを表す．

定理 12. $0<p_0,p_1,q_0,q_1<\infty$ に対して，$L=(L_{p_0q_0}(w_0d\mu),L_{p_1q_1}(w_1d\mu))_{\theta,q}$ とおく．そのとき，

$$\|f\|_L\approx\Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\|f\chi_{\Omega_k}\|^q_{L_{pq}(wdu)}\Big)^{1/q}$$

ここで

$$\begin{aligned}\Omega_k=\Omega_k(w_0,w_1)=\{x\in\Omega:2^k\leq w_0(x)/w_1(x)<2^{k+1}\},\\ 1/p=(1-\theta)/p_0+\theta/p_1,\\ 1/q=(1-\theta)/q_0+\theta/q_1,\\ w^{1/p}=w_0^{(1-\theta)/p_0}w_1^{\theta/p_1}.\end{aligned}$$

2. 主結果

我々の主結果は，2つのノルム $\|\cdot\|_{L_{pq}(u,vd\mu)}$ (Freitag norm) と $\|\cdot\|_{L_{pq}(wd\mu)}$ (A-K-M-N-P) が block Ω_k 上では同値であることを示した．

定理 13 (G-M-N-S [7]). $0<\theta<1$, $0<p_0,p_1,q<\infty$, $p_0\neq p_1$ とし，$1/p=(1-\theta)/p_0+\theta/p_1$ とする．任意の可測関数 w_0,w_1 に対し $u=(w_1/w_0)^{1/(p_1-p_0)}$, $v=(w_0^{p_1}/w_1^{p_0})^{1/(p_1-p_0)}$ とおく．そのとき任意の $\Omega_k=\{x\in\Omega:2^k\le w_0(x)/w_1(x)<2^{k+1}\}$ に対して，

$$\|f\chi_{\Omega_k}\|_{L_{pq}(u,vd\mu)}\sim\|f\chi_{\Omega_k}\|_{L_{pq}(wd\mu)}.$$

証明. ノルム $\|f\chi_{\Omega_k}\|_{L_{p,q}(wd\mu)}$ を次のように変形する:

$$(1)\quad \|f\chi_{\Omega_k}\|_{L_{p,q}(wd\mu)}=\left(q\int_0^\infty\left(\int_{\{x;f\chi_{\Omega_k}(x)>s\}}w(x)d\mu(x)\right)^{q/p}s^{q-1}ds\right)^{1/q}.$$

$\|f\chi_{\Omega_k}\|_{L_{p,q}(u,vd\mu)}$ に対して変数変換, $\lambda=2^{k/(p_1-p_0)}s$ を施し, 集合 Ω_k と重み関数 u,v と w の定義から次のように変形する:

(2)

$$\begin{aligned}
&\|f\chi_{\Omega_k}\|_{L_{p,q}(u,vd\mu)}\\
&=\left(q\int_0^\infty\left(\int_{\{x;f\chi_{\Omega_k}\cdot u>s\}}v(x)d\mu(x)\right)^{q/p}s^{q-1}ds\right)^{1/q}\\
&\le\left(q\int_0^\infty\left(\int_{\{x;f\chi_{\Omega_k}\cdot 2^{-k/(p_1-p_0)}>s\}}v(x)d\mu(x)\right)^{q/p}s^{q-1}ds\right)^{1/q}\\
&=\left(q\int_0^\infty\left(\int_{\{x;f\chi_{\Omega_k}>\lambda\}}v(x)d\mu(x)\right)^{q/p}2^{-kq/(p_1-p_0)}\lambda^{q-1}d\lambda\right)^{1/q}\\
&\le\left(q\int_0^\infty\left(\int_{\{x;f\chi_{\Omega_k}>\lambda\}}\left(\frac{w_0^{p_1}}{w_1^{p_0}}\right)^{\frac{1}{p_1-p_0}}\cdot 2^{\frac{p}{p_1-p_0}}\left(\frac{w_1}{w_0}\right)^{\frac{p}{p_1-p_0}}d\mu(x)\right)^{q/p}\lambda^{q-1}d\lambda\right)^{1/q}\\
&=2^{1/(p_1-p_0)}\left(q\int_0^\infty\left(\int_{\{x;f\chi_{\Omega_k}>\lambda\}}w(x)d\mu(x)\right)^{q/p}\lambda^{q-1}d\lambda\right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

同様に変数変換 $\lambda=2^{(k+1)/(p_1-p_0)}s$ と集合 Ω_k，重み関数 u,v と w の定義

から

(3)

$$
\begin{aligned}
&\|f\chi_{\Omega_k}\|_{L_{p,q}(u,vd\mu)} \\
&\quad \geq \left(q\int_0^\infty \left(\int_{\{x; f\chi_{\Omega_k} 2^{-(k+1)/(p_1-p_0)} > s\}} v(x)d\mu(x) \right)^{q/p} s^{q-1}ds \right)^{1/q} \\
&\quad = \left(q\int_0^\infty \left(\int_{\{x; f\chi_{\Omega_k} > \lambda\}} v(x)d\mu(x) \right)^{q/p} 2^{-(k+1)q/(p_1-p_0)} \lambda^{q-1}d\lambda \right)^{1/q} \\
&\quad \geq 2^{-1/(p_1-p_0)} \left(q\int_0^\infty \left(\int_{\{x; f\chi_{\Omega_k} > \lambda\}} w(x)d\mu(x) \right)^{q/p} \lambda^{q-1}d\lambda \right)^{1/q}.
\end{aligned}
$$

(1), (2), (3) から結果が得られた. □

参考文献

[1] I. Asekritova, N. Krugljak, *On equivalence of K- and J-methods for $(n+1)$-tuples of Banach spaces*, Studia Math. **122** (1997), 99–116.

[2] I. Asekritova, N. Krugljak, L. Maligranda, L. Nikolova, L. E. Persson, *Lions-Peetre reiteration formulas for triples and their applications*, Studia Math. **145(3)** (2001), 219–254.

[3] A. P. Calderón, *Spaces between L_1 and L_∞ and the theorem of Marcinkiewicz*, Studia Math. **26** (1966), 273-299.

[4] E. V. Ferreyra, *On a negative result concerning interpolation with change of measures for Lorentz spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 1413–1417.

[5] D. Freitag, *Real interpolation of weighted L_p spaces*, Math. Nachr. **86** (1978), 15–18.

[6] J. E. Gilbert, *Interpolation between weighted L^p spaces*, Ark. Mat. **10** (1972), 235-249.

[7] A. Gogatishivili, S. Moritoh, M. Niwa, T. Sobukawa, *Interpolation theorem for block-Lorentz spaces*, Proceedings of the International Symposium on Banach and Function Spaces. (2003), to appear.

[8] R. A. Hunt, *On $L(p,q)$ spaces*, Enseign. Math. **12** (1966), 249–276.

[9] J. L. Lions, *Théorèms de traces et d'interpolation I-V*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. **13** (1959), 389-403.

[10] J. L. Lions, J. Peetre, *Sur une classe d'espace d'interpolation*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.**19** (1964), 5-68.

[11] P. I. Lizorkin, *Interpolation of weighted L^p spaces*, Dokl. Acad. Nauk SSSR **222**(1) (1975), 32-35.

[12] M. Riesz, *Sur les maxima des formes bilinearies et sur les fonctionelles linéaires*, Acta. Math. **49** (1926), 465-497.

[13] G. Sparr, *Interpolation of several Banach spaces*, Ann. Math. Pura Appl. **99** (1974), 247-316.

[14] E. M. Stein, G. Weiss, *Interpolation of operators with change of measures*, Trans. Amer. Math. Soc. **87** (1958), 159-172.

[15] G. O. Thorin, *An extension of a convexity theorem due to M. Riesz*, Kungl. Fysiogr. Sallsk.i Lund Forh. **8** (1938), 166-170.