数理解析研究所講究録 1399 巻 2004 年 23-30



# あるBANACH 空間の間の補間空間について

日本大学・経済学部　松 岡 勝 男 (KATSUO MATSUOKA)
COLLEGE OF ECONOMICS OF NIHON UNIVERSITY

## 1. Introduction

以下において, $B(0,R)\subset\mathbb{R}^n$ は 中心 0, 半径 $R>0$ の open ball を表すとする. 最初に, Beurling algebra $A^p$, $B^p$ 空間, $B_0^p$ 空間を定義する ([B], [CL], [G] 参照).

**Definition 1.** $1<p<\infty$ とするとき,

$$\begin{aligned} A^p &= A^p(\mathbb{R}^n) \\ &= \left\{ f : \|f\|_{A^p} = \inf_{\omega\in\Omega} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega(x)^{-(p-1)} dx \right)^{1/p} < \infty \right\}. \end{aligned}$$

ただし, $\Omega$ は positive, radial, $|x|$ に関して nonincreasing, そして

$$\omega(0) + \int_{\mathbb{R}^n} \omega(x) dx = 1$$

である $\mathbb{R}^n$ 上の関数 $\omega$ の class である;

$$\begin{aligned} B^p &= B^p(\mathbb{R}^n) \\ &= \left\{ f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{B^p} = \sup_{R\geq 1} \left( \frac{1}{|B(0,R)|} \int_{B(0,R)} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \right\}; \end{aligned}$$

$$B_0^p = B_0^p(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in B^p : \lim_{R\to\infty} \frac{1}{|B(0,R)|} \int_{B(0,R)} |f(x)|^p dx = 0 \right\}.$$

ここで, $1<p<\infty$ に対して,

$$A^p, B^p, B_0^p : \text{Banach 空間}$$

である. また, $1<p_1<p_2<\infty$ に対して,

$$L^1 \cap L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \supset A^{p_1} \supset A^{p_2}$$

そして

$$B^{p_1} \supset B^{p_2} \supset L^\infty(\mathbb{R}^n)$$

である.

なお, 次の duality が成り立つ.

**Theorem 2** ([B], [CL], [G]). $1 < p, p' < \infty$ with $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ とする．このとき,

$$(A^p)^* = B^{p'}$$

であり, また,

$$(B_0^p)^* = A^{p'}$$

である.

また, [CL], [G] において, 次の Hardy 空間 $HA^p$ と $CMO^p$ 空間が定義された.

**Definition 3.** $1 < p < \infty$ とする．このとき, Hardy 空間 $HA^p$ associated to $A^p$ を

$$HA^p = \{f \in A^p : f \text{ real}, \quad f^* \in A^p\}$$

で定義する．ただし, $f^*$ は $f$ の Poisson 積分の nontangential maximal 関数, i.e. $\forall x \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \sup_{|y-x|<t} |(f * P_t)(y)| \\ &= \sup_{|y-x|<t} \left| c_n \int_{\mathbb{R}^n} f(y-x') \frac{t}{(t^2+|x'|^2)^{(n+1)/2}} dx' \right|, \quad c_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{(n+1)/2}}, \end{aligned}$$

である．また, norm $\|\cdot\|_{HA^p}$ を

$$\|f\|_{HA^p} = \|f^*\|_{A^p},$$

で定義する.

ここで, $1 < p < \infty$ に対して,

$$HA^p : \text{Banach 空間}$$

である．また, $1 < p_1 < p_2 < \infty$ に対して,

$$H^1 \cap A^{p_1} \supset HA^{p_1} \supset HA^{p_2}$$

である.

**Definition 4.** $1 < p < \infty$ のとき, $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ が central mean oscillation of order $p$ の関数の class, $CMO^p$, に属するとは,

$$\|f\|_{CMO^p} = \sup_{R\geq 1} \left( \frac{1}{|B(0,R)|} \int_{B(0,R)} |f(x) - m_R(f)|^p dx \right)^{1/p} < \infty$$

を満たすことである．ただし,

$$m_R(f) = \frac{1}{|B(0,R)|} \int_{B(0,R)} f(x) dx$$

である.

ここで, $1 < p < \infty$ に対して,

$$CMO^p : \text{Banach 空間}$$

そして

$$CMO^p \supset B^p \supset B_0^p$$

である. また, $1 < p_1 < p_2 < \infty$ に対して,

$$CMO^{p_1} \supset CMO^{p_2} \supset BMO$$

である.

なお, Fefferman-Stein's $H^1$-$BMO$ duality の analog として, 次の duality が示された.

**Theorem 5** ([CL], [G]). $1 < p, p' < \infty$ with $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ とする. このとき,

$$(HA^p)^* = CMO^{p'}$$

である。

次に, [Ma$_1$] において, $A^p, B^p, B_0^p$ 空間それぞれの間の複素補間空間が示された (複素補間空間 $(\cdot, \cdot)_{[\theta]}$, $(\cdot, \cdot)^{[\theta]}$ の定義については, [BL], [S], [T] 参照).

**Theorem 6** ([Ma$_1$]). $1 < p_0, p_1 < \infty$, $0 < \theta < 1$ のとき,

$$(A^{p_0}, A^{p_1})_{[\theta]} = (A^{p_0}, A^{p_1})^{[\theta]} = A^p \quad \text{(equal norms)}$$

である. ただし, $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1}$.

**Theorem 7** ([Ma$_1$]). $1 < p_0, p_1 < \infty$, $0 < \theta < 1$ のとき,

$$(B^{p_0}, B^{p_1})_{[\theta]} = (B^{p_0}, B^{p_1})^{[\theta]} = B^p \quad \text{(equal norms)}$$

である. ただし, $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1}$.

**Theorem 8** ([Ma$_1$]). $1 < p_0, p_1 < \infty$, $0 < \theta < 1$ のとき,

$$(B_0^{p_0}, B_0^{p_1})_{[\theta]} = B_0^p \quad \text{(equal norms)}$$

である. ただし, $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1}$.

さらに, [Ma$_2$] において, C. Fefferman and E. M. Stein の $L^p(\mathbb{R}^n)$ と $BMO$ の間の補間定理 ([FS], [GR], [J], [S] 参照) の analog である, 次の $B_0^p$ と $BMO$ の間の補間定理が示された.

**Theorem 9** ([Ma$_2$]). $1 < p_0 < \infty$ とし, $T$ は linear operator で,

$$T : B^{p_0} \to B_0^{p_0}$$

そして

$$T : L^\infty(\mathbb{R}^n) \to BMO$$

boundedly, とする. このとき, $\forall p$ with $p_0 < p < \infty$ に対して,

$$T : B^p \to CMO^p$$

boundedly.

本講演の目的は, この $B_0^p$ と $BMO$ の間の補間定理に現れる $CMO^p$ 空間について, それらの間の複素補間空間を構成することである.

## 2. Hardy 空間 $HA_{p,q}$

最初に, $k \in \mathbb{Z}$ に対して, $B_k = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \le 2^k\}$, $C_k = B_k \backslash B_{k-1}$, $\chi_k = \chi_{C_k}$ と定義する. ただし, $\chi_{C_k}$ は $C_k$ の characteristic function である. また, $\tilde{\chi}_k = \chi_k$ if $k \in \mathbb{N}$, そして $\tilde{\chi}_0 = \chi_{B_0}$ とする.

[G] において, J. Garcia-Cuerva は $A^p$ 空間と $B^p$ 空間のもう一つの定義を与えた (one-dimensional case は, [F] において, 与えられた).

**Definition 10.** $1 < p < \infty$ とするとき,

$$A^p = A^p(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \|f\|_{A^p} = \sum_{k=0}^{\infty} \left( 2^{kn/p'} \|f\tilde{\chi}_k\|_p \right) < \infty \right\}.$$

ただし, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ である;

$$B^p = B^p(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \|f\|_{B^p} = \sup_{k \le 0} \left( 2^{-kn/p} \|f\tilde{\chi}_k\|_p \right) < \infty \right\}.$$

また, [GH] において, J. Garcia-Cuerva and M. -J. L. Herrero は, 次の $A_{p,q}$ 空間と $B_{p,q}$ 空間を定義した.

**Definition 11.** $0 < q \le 1$, $q \le p < \infty$ に対して,

$$A_{p,q} = A_{p,q}(\mathbb{R}^n)$$
$$= \left\{ f : \|f\|_{A_{p,q}} = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left( 2^{kn(1/q-1/p)} \|f\tilde{\chi}_k\|_p \right)^q \right\}^{1/q} < \infty \right\}$$

そして, $0 < q \leq 1$, $1 < p < \infty$ に対して,

$$\begin{aligned} B_{p,q} &= B_{p,q}(\mathbb{R}^n) \\ &= \left\{ f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{B_{p,q}} = \sup_{k \leq 0} \left\{ 2^{-kn(1/q-1/p')} \|f\tilde{\chi}_k\|_p \right\} < \infty \right\} \end{aligned}$$

と定義する. ただし, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ である.

ここで, $1 < p < \infty$ に対して,

$$B_{p,1} = B^p \qquad \text{そして} \qquad A_{p,1} = A^p$$

である. また, $0 < q \leq 1$, $1 < p < \infty$ に対して,

$$A_{p,q} \subset A^p \subset L^p \subset B^p \subset B_{p,q}$$

である.

**Proposition 12** ([GH]). $f \in B_{p,q}$ であるための必要十分条件は

$$\sup_{R \geq 1} \left\{ |B(0,R)|^{1-1/q} \left( \frac{1}{|B(0,R)|} \int_{B(0,R)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \right\} < \infty$$

である.

なお, 次の duality が成り立つ.

**Theorem 13** ([GH]). $0 < q \leq 1$, $1 < p < \infty$ そして $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ とする. このとき,

$$(A_{p,q})^* = B_{p',q}$$

である.

さらに, [GH] において, 次の Hardy 空間 $HA_{p,q}$ と $\Lambda_{p,q}$ 空間が定義された.

**Definition 14.** $0 < q \leq 1, q \leq p < \infty$ そして $f \in \mathcal{S}'$ とする. このとき, $f$ が Hardy 空間 $HA_{p,q}$ に属するとは, $f$ が調和関数 $u(x,t)$ in $\mathbb{R}^{n+1}_+$ の boundary distribution であり,

$$m_u(x) = \sup_{|y-x|<t} |u(y,t)| \in A_{p,q}$$

を満たすことである. また, quasi-norm $\|\cdot\|_{HA_{p,q}}$ を

$$\|f\|_{HA_{p,q}} = \|m_u\|_{A_{p,q}}$$

で定義する.

ここで, $0<q\leq 1, q\leq p<\infty$ に対して,

$$HA_{p,q} : \text{complete 空間}$$

そして

$$HA_{p,q}\subset H^q$$

である.

**Definition 15.** $1<p<\infty$ のとき, $f\in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ が $\Lambda_{p,q}$ with $0<q\leq 1$ and $1<p<\infty$ に属するとは, $\forall R\geq 1$ に対して, 高々 $N=[n\,(1/q-1)]$ の多項式 $P_R^N f(x)$ が存在して,

$$\|f\|_{\Lambda_{p,q}}=\sup_{R\geq 1}\left\{|B(0,R)|^{1-1/q}\left(\frac{1}{|B(0,R)|}\int_{B(0,R)}|f(x)-P_R^N f(x)|^p dx\right)^{1/p}\right\}<\infty$$

を満たすことである.

ここで, $0<q\leq 1, 1<p<\infty$ に対して,

$$\Lambda_{p,q} : \text{Banach 空間}$$

であり, また,

$$\Lambda_{p,1}=CMO^p$$

である.

なお, 次の duality が成り立つ.

**Theorem 16** ([GH]). $0<q\leq 1, 1<p<\infty$ そして $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$ とする. このとき,

$$(HA_{p,q})^*=\Lambda_{p',q}$$

である。

## 3. $CMO^p$ の間の複素補間空間

最初に, $HA_{p,q}$ の間の複素補間空間について述べる.

**Theorem 17** ([HY]). $0<q_0,q_1\leq 1$, $1<p_0,p_1<\infty$, $0<\theta<1$ とし, $\dfrac{1}{p}=\dfrac{1-\theta}{p_0}+\dfrac{\theta}{p_1}$, $\dfrac{1}{q}=\dfrac{1-\theta}{q_0}+\dfrac{\theta}{q_1}$ とする. このとき,

$$(HA_{p_0,q_0},HA_{p_1,q_1})_{[\theta]}=HA_{p,q}$$

である.

ここで, $0<q_0,q_1<1$ のときの Theorem 17 は, [GH] において示された.

**Corollary 18.** $1 < p_0, p_1 < \infty$, $0 < \theta < 1$ とし, $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1}$ とする. このとき,

$$(HA_{p_0,1}, HA_{p_1,1})_{[\theta]} = HA_{p,1},$$

i.e.

$$(HA^{p_0}, HA^{p_1})_{[\theta]} = HA^p$$

である.

次に, 複素補間法における duality theorem について述べる ([BL], [S], [T] 参照).

**Theorem 19.** compatible Banach 空間 $A_0, A_1$ に対して, $A_0 \cap A_1$ が $A_0, A_1$ で dense のとき,

$$(A_0, A_1)^*_{[\theta]} = (A_0^*, A_1^*)^{[\theta]} \quad \text{(equal norms)}$$

である.

また, 次の定義を用いて, [LY] において, $HA_{p,q}$ における denseness が示された ([Mi] 参照).

**Definition 20.** 整数 $k$ に対して, $k \geq 0$ のとき, $\mathcal{P}_k$ を次数 $k$ を越えない $\mathbb{R}^n$ 上の多項式関数の全体, $k < 0$ のとき, $\mathcal{P}_k = \{0\}$ と定義する.

また, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ のとき, $f \perp \mathcal{P}_k$ であるとは, $\forall P \in \mathcal{P}_k$ に対して,

$$fP \in L^1(\mathbb{R}^n) \qquad \text{そして} \qquad \int_{\mathbb{R}^n} f(x)P(x)dx = 0$$

を満たすことである.

**Proposition 21** ([LY]). $0 < q \leq 1$, $q \leq p < \infty$ のとき,

$$X_k = \{f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) : f \perp \mathcal{P}_k\} \quad \text{with} \quad k \geq n\left(\frac{1}{q} - 1\right)$$

は $HA_{p,q}$ の dense subspace である.

このとき, これらの結果を用いると, 次の $CMO^p$ 空間の間の複素補間空間が得られる.

**Theorem 22.** $1 < p < \infty$, $0 < \theta < 1$ とし, $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1}$ とする. このとき,

$$(CMO^{p_0}, CMO^{p_1})^{[\theta]} = CMO^p$$

である.

*Proof.* 最初に, Theorem 5, Theorem 19, Proposition 21 により,

$$(CMO^{p_0}, CMO^{p_1})^{[\theta]} = \left(\left(HA^{p_0'}\right)^*, \left(HA^{p_1'}\right)^*\right)^{[\theta]} = \left(HA^{p_0'}, HA^{p_1'}\right)^*_{[\theta]}.$$

ただし, $\frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i'} = 1$ $(i = 0, 1)$ である. このとき, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ とすると, $\frac{1-\theta}{p_0'} + \frac{\theta}{p_1'} = \frac{1}{p'}$ であるから, Corollary 18 により,

$$\left(HA^{p_0'}, HA^{p_1'}\right)_{[\theta]} = HA^{p'}.$$

故に,

$$(CMO^{p_0}, CMO^{p_1})^{[\theta]} = \left(HA^{p'}\right)^* = CMO^p$$

が得られる. □

## REFERENCES


[BL] J. Bergh and J. Löfström, *Interpolation Spaces*, Springer-Verlag, 1976.

[B] A. Beurling, Construction and analysis of some convolution algebra, Ann. Inst. Fourier, **14** (1964), 1–32.

[CL] Y. Chen and K. Lau, Some new classes of Hardy spaces, J. Func. Anal., **84** (1989), 255–278.

[FS] C. Fefferman and E. M. Stein, $H^p$ spaces of several variables, Acta Math., **129** (1972), 137–193.

[F] H. Feichtinger, An elementary approach to Wiener's third Tauberian theorem on Euclidean $n$-spaces, *Proceedings, Conference at Cortona* 1984, Symposia Mathematica (Academic Press, New York), **29** (1987), 267–301.

[G] J. Garcia-Cuerva, Hardy spaces and Beurling algebras, J. London Math. Soc. (2), **39** (1989), 499–513.

[GH] J. Garcia-Cuerva and M. -J. L. Herrero, A theory of Hardy spaces associated to the Herz spaces, J. London Math. Soc. (3), **69** (1994), 605–628.

[GR] J. Garcia-Cuerva and J. L. Rubio de Francia, *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*, North-Holland, Amsterdam, 1985.

[HY] E. Hernándes and D. Yang, Interpolation of Herz-type Hardy spaces, Illinois J. Math., **42** (1998), 564–581.

[J] P. W. Jones, Interpolation between Hardy spaces, 437–451 in *Conference on Harmonic Analysis in Honor of Antoni Zygmund*, edited by W. Beckner, A. P. Calderón, R. Fefferman and P. W. Jones, Wadsworth, Belmont, California, 1983.

[LY] S. Lu and D. Yang, Some characterizations of weighted Herz-type Hardy spaces and their applications, Acta Mathematica Sinica (New Ser.), **13** (1997), 45–58.

[Ma$_1$] K. Matsuoka, Interpolation between some Banach spaces in generalized harmonic analysis, Tokyo J. Math., **13** (1990), 117–124.

[Ma$_2$] K. Matsuoka, Interpolation theorem between $B_0^p$ and $BMO$, Scientiae Mathematicae Japonicae, **53** (2001), 547–554.

[Mi] A. Miyachi, Remarks on Herz-type Hardy spaces , Acta Mathematica Sinica, English Series, **17** (2001), 339–360.

[S] C. Sadosky, *Interpolation of Operators and Singular Integrals*, Marcel Dekker, New York, 1979.

[T] H. Triebel, *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*, North-Holland, 1979.