数理解析研究所講究録 1399 巻 2004 年 157-185

Orlicz 空間の構造と Hardy-Littlewood の最大値関数について

鹿児島大学・教育学部　北　広男 (Hiro-o Kita)
Faculty of Education
Kagoshima University

1. はじめに.

Orlicz 空間の研究は Banach 空間の研究と共に 1931 年に Z. W. Birnbaum and W. Orlicz [BO] によって提唱された．その後 W.Orlicz [Or1], [Or2], [Or3] によって更なる理論が展開された．日本でも Orlicz 空間に関する研究が活発に行われた．H.Nakano [Na] による modular 空間の研究は Orlicz 空間の一般化とも言えるものである．又，T. Andô [An1], [An2], [An3] によって N-function の分類や Orlicz 空間の回帰性についての研究がなされた．近年, Orlicz 空間の重要性が再認識され，様々な方面で再考察され，又，応用もなされている．

Orlicz 空間についての書籍としては M. A. Krasnosel'skii and Ya. B. Rutickii [KR] によるすばらしい本「Convex Functions and Orlicz Spaces」 (English translation)」がある．又，M. M. Rao and Z. D. Ren [RR] による「Theory of Orlicz Spaces」の本が１９９１年に出版された．最近，同じ著者による「Applications of Orlicz Spaces」[RR2] が出版された．この本では，von Neumann-Jordan 定数や James 定数について Orlicz 空間との関連で記述されている．岡山県立大学の高橋氏と九州工業大学の加藤氏の結果 [KaT] との関係についても詳しく書かれている．

日本でも近年，Orlicz 空間に詳しい専門家を招聘する機運も高くなっている．１９９６年には Orlicz の弟子の L. Maligranda 教授 (LuleåUniversity) が，大分大学で開催された実解析学シンポジウムで講演を行った．２００２年には A. Gogatishvili 教授 (チェコ科学アカデミー) が鹿児島大学で行われた実解析学シンポジウムで講演を行った．その後，関心を持つ日本の数学者も増え，今後更なる発展が期待される．

次の section では，Orlicz 空間を定義するのに必要となる Young function と N-function の概念について説明する．

2. Notations and definitions.

我々が扱う関数は n 次元 Euclid 空間 R^n 上で定義された実数値可測関数とする．R^n の部分集合 E の Lebesgue 測度は $|E|$ で表すものとする．解析学で重要な役割を果たす $L^p(R^n)$ 空間は $\int_{R^n}|f(x)|^p dx<\infty$ となる関数 f の集合として定義される． $\Phi(t)=t^p$ と置くとき，すぐ前の積分は $\int_{R^n}\Phi(|f(x)|)ds<\infty$ となる．この関数の概念を一般化した *Young function* について説明する．

Definition 2.1. R^n 上で定義された measurable function $w(x)$ が R^n 上の *weight function* であるとは，次の性質を持つときとする．

(2.1) $$0<w(x)<+\infty \quad \text{for almost everywhere} \quad x\in R^n\ ;$$

(2.2) $$\int_Q w(x)dx<+\infty \quad \text{for any compact cube} \quad Q \quad \text{in} \quad R^n\ .$$

次に，Young function と N-function の概念について説明する．

Definition 2.2. $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ が次の性質を持つとき，*Young function* と呼ばれる．

$$\Phi(t) = \int_0^{|t|} \varphi(s)ds \quad \text{for} \quad t \in R \tag{2.3}$$

と表すことができる．ここで，$\varphi(s)$ は $[0,\infty)$ で定義された non-decreasing right continuous function で，$\varphi(0) \geq 0$ かつ，$\varphi(s) > 0$ $(s > 0)$ を満たす関数である．

【注意】ここでは，我々は $\varphi(s)$ が $s = 0$ の近傍で恒等的にゼロになる場合や，$s = +\infty$ の近傍で $+\infty$ となる場合はさけた．

Definition 2.3. $\Phi(t)$ を Young function とする。この $\Phi(t)$ が *N-function* であるとは，次の条件を満たすときとする。

$$\lim_{t\to 0+} \frac{\Phi(t)}{t} = 0 \qquad \text{and} \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = +\infty\,. \tag{2.4}$$

関数 $\varphi(t)$ は (2.3) の中にあらわれる non-decreasing right continuous function とする。$\varphi(t)$ の *right inverse* は次の式で定義される。

$$\varphi^{-1}(s) := \sup\{u : \varphi(u) \leq s\} \quad s \geq 0\,. \tag{2.5}$$

関数 $\varphi^{-1}(s)$ を right derivative に持つ N-function，すなわち

$$\Psi(t) = \int_0^{|t|} \varphi^{-1}(s)ds \qquad t \in R^n \tag{2.6}$$

は $\Phi(t)$ の *complementary N-function* と言われる．次に N-function の例を述べる．

<u>**例 1**.</u> $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, (1 < p < \infty)$ とする．

$$\Phi(t) = \int_0^{|t|} s^{p-1}ds = \frac{1}{p}|t|^p, \quad \Psi(t) = \int_0^{|t|} s^{p'-1}ds = \frac{1}{p'}|t|^{p'}\,.$$

<u>**例 2**.</u>

$$\Phi(t) = \int_0^{|t|} (e^s - 1)ds, \qquad \Psi(t) = \int_0^{|t|} \log(s+1)ds\,.$$

Definition 2.4. $\Phi(t)$ をひとつの N-function とする．$\alpha > 0$ に対して，

$$\Phi(\alpha L) := \left\{ f : \int_{R^n} \Phi(\alpha|f(x)|)dx < +\infty \right\} \tag{2.7}$$

とおく．

空間 $\Phi(\alpha L)$ は一般に線形空間にならない．実際，$R^n = R^1 = (-\infty,\infty)$ で考える．N-function $\Phi(t)$ として $\Phi(t) = \int_0^t (e^s - 1)ds = e^t - t - 1$, $(t > 0)$ とする．関数 $f(x)$ を

$f(x) = (1/2)\log(1/x)$ for $0 < x \leq 1$, $f(x) = 0$ otherwise とする．このとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(|f(x)|)dx < +\infty \qquad \text{and} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(2|f(x)|)dx = +\infty \,.$$

Definition 2.5. $\Phi(t)$ をひとつの Young function とし，$w(x)$ を R^n 上のひとつの weight とする．関数空間を次のように定義する．

$$\Phi(\alpha L)_w := \left\{ f : \int_{R^n} \Phi(\alpha|f(x)|)w(x)dx < +\infty \right\} \quad \alpha > 0 \,, \tag{2.8}$$

$$L_w^\Phi(R^n) := \bigcup_{\varepsilon>0} \Phi(\varepsilon L)_w \,, \tag{2.9}$$

$$M_w^\Phi(R^n) := \bigcap_{\alpha>0} \Phi(\alpha L)_w \,. \tag{2.10}$$

空間 $L_w^\Phi(R^n)$ は Orlicz 空間と呼ばれている．又，$M_w^\Phi(R^n)$ は Orlicz 空間 $L_w^\Phi(R^n)$ の部分空間であり，Morse-Transue 空間と呼ばれている．通常の $L_w^p(R^n)$ 空間は $\Phi(t) = |t|^p$ によって定められる．又，例 2 の $\Psi(t)$ によって定められる Orlicz 空間はよく知られている Zygmund class である．又，$1 < p < q < +\infty$ とするとき，$\Phi(t) \approx \min(|t|^p, |t|^q)$ で定められる Orlicz 空間は $L_w^p(R^n) + L_w^q(R^n)$ となる．又，$\Phi(t) \approx \max(|t|^p, |t|^q)$ で定められる Orlicz 空間は $L_w^p(R^n) \cap L_w^q(R^n)$ となる．

Definition 2.5 からすぐに次のことがわかる．

$$M_w^\Phi(R^n) \subseteq \Phi(L)_w \subseteq L_w^\Phi(R^n) \,. \tag{2.11}$$

次に，Orlicz 空間 $L_w^\Phi(R^n)$ に Banach 空間の構造をいれる．

Definition 2.6. $\Phi(t)$ を N-function とする．$f \in L_w^\Phi(R^n)$ に対して，

$$\|f\|_{\Phi,w} := \inf\left\{ \lambda > 0 : \int_{R^n} \Phi\left(\frac{1}{\lambda}|f(x)|\right) w(x)dx \leq 1 \right\} \tag{2.12}$$

と置く．

上の (2.12) で定義される $\|f\|_{\Phi,w}$ は norm の性質を持ち，Luxemburg-Nakano norm と呼ばれる．

例 3. $1 < p < \infty$, $\Phi(t) = \frac{1}{p}t^p$, $t > 0$ とする．このとき

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\Phi,w} &= \inf\left\{\lambda > 0 : \int_{R^n} \frac{1}{p}\left(\frac{1}{\lambda}|f(x)|\right)^p w(x)dx \le 1\right\} \\
&= \inf\left\{\lambda > 0 : \int_{R^n} \frac{1}{p}|f(x)|^p w(x)dx \le \lambda^p\right\} \\
&= \inf\left\{\lambda > 0 : \left\{\int_{R^n} \frac{1}{p}|f(x)|^p w(x)dx\right\}^{1/p} \le \lambda\right\} \\
&= \left\{\int_{R^n} \frac{1}{p}|f(x)|^p w(x)dx\right\}^{1/p}.
\end{aligned}$$

例 4. 簡単な計算により次のことがわかる．$1 < p < q < +\infty$ とする．
$\Phi(t) \approx \min(|t|^p, |t|^q)$, ならば,

$$L_w^\Phi(R^n) = L_w^p(R^n) + L_w^q(R^n), \quad \|f\|_{\Phi,w} \approx \|f_1\|_{L_w^p} + \|f_2\|_{L_w^q},$$

ここで，$f_1 = f\chi_{\{|f|>1\}} \in L_w^p(R^n)$, $f_2 = f\chi_{\{|f|\le 1\}} \in L_w^q(R^n)$ で $\chi(E)$ は集合 E 上の特性関数を表す.
$\Phi(t) \approx \max(|t|^p, |t|^q)$, ならば,

$$L_w^\Phi(R^n) = L_w^p(R^n) \bigcap L_w^q(R^n), \quad \|f\|_{\Phi,w} \approx \max\{\|f\|_{L_w^p}, \|f\|_{L_w^q}\}.$$

3. Orlicz 空間の構造と関数列の収束について.

前の section で Orlicz 空間に Luxemburg-Nakano norm を入れることにより，Banach 空間の構造を入れた．関数列 $\{f_n; n \ge 1\}$ を Orlicz 空間 $L_w^\Phi(R^n)$ における関数列とする．この関数列 $\{f_n; n \ge 1\}$ が Orlicz 空間 $L_w^\Phi(R^n)$ の関数 f に Luxemburg-Nakano norm の意味で収束するとはどのような事かを考えて見る．はじめに Δ_2-条件について述べる.

Definition 3.1. $\Phi(t)$ をひとつの Young function とする．Φ が $[0, \infty)$ で，Δ_2-条件を満足するとは，ある正の数 $C > 0$ が存在して

$$\Phi(2t) \le C\Phi(t) \quad \text{for all} \quad 0 \le t < +\infty \tag{3.1}$$

が成立することとする.

例として，$\Phi(t) = |t|^p$, $(1 \le p < +\infty)$ は $[0, +\infty)$ で Δ_2-条件を満足する．$\Phi(t) \approx e^t$ は $t \to +\infty$ で Δ_2-条件を満足しない．次の結果が知られている.

Theorem 3.1. $M_w^\Phi(R^n) = L_w^\Phi(R^n)$ となるための必要十分条件は，Φ が Δ_2-条件を満足することである.

Orlicz 空間においては，$M_w^\Phi(R^n) \subsetneq L_w^\Phi(R^n)$ の場合がたいへん興味深い.

Definition 3.2. Φ をひとつの N-function とし，Ψ を Φ の complementary N-function とする．Orlicz norm $\|\cdot\|_{L_w^\Phi}$ を次の式で定義する．

(3.2)
$$\|f\|_{L_w^\Phi} := \sup\left\{\left|\int_{R^n} f(x)g(x)w(x)dx\right| \ :\ \int_{R^n}\Psi(|g(x)|w(x)dx \le 1\right\}\ ,\ f\in L_w^\Phi(R^n)\ .$$

Orlicz norm を計算するには次の Young の不等式が有益である．

Lemma 3.2. Φ *をひとつの N-function とし，* Ψ *を* Φ *の complementary N-function とする．このとき*

$$st \le \Phi(s)+\Psi(t) \qquad \textit{for all} \qquad s,t\ge 0 \tag{3.3}$$

次のことに注意しよう．$f\in L_w^\Phi(R^n)$ ならば，$\|f\|_{L_w^\Phi}<+\infty$．実際，$f\in L_w^\Phi(R^n)$ だから，十分小さな $\varepsilon_0>0$ が存在して，

$$\int_{R^n}\Phi(\varepsilon_0|f(x)|)w(x)dx<+\infty$$

とできる．このとき Young の不等式より，$\int_{R^n}\Psi(|g(x)|)w(x)dx\le 1$ なら，

$$\begin{aligned}\left|\int_{R^n} f(x)g(x)w(x)dx\right| &\le \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{R^n}\varepsilon_0|f(x)|\cdot|g(x)|w(x)dx\\ &\le \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{R^n}\{\Phi(\varepsilon_0|f(x)|)+\Psi(|g(x)|)\}w(x)dx\\ &= \frac{1}{\varepsilon_0}\left\{\int_{R^n}\Phi(\varepsilon_0|f(x)|)w(x)dx+\int_{R^n}\Psi(|g(x)|)w(x)dx\right\}\\ &\le \frac{1}{\varepsilon_0}\left\{\int_{R^n}\Phi(\varepsilon_0|f(x)|)w(x)dx+1\right\} < +\infty\ .\end{aligned}$$

ここで，g について sup をとって $\|f\|_{L_w^\Phi}<+\infty$ がわかった． □

Orlicz norm $\|f\|_{L_w^\Phi}$ と Luxemburg-Nakano norm $\|f\|_{\Phi,w}$ の関係について述べる。はじめにいくつかの Lemma を述べる。

Lemma 3.3. $f\in L_w^\Phi(R^n)$ *とする．もし*

$$\|f\|_{L_w^\Phi}\le 1 \quad \text{ならば} \quad \int_{R^n}\Phi(|f(x)|)w(x)dx \le \|f\|_{L_w^\Phi} \tag{3.4}$$

証明については，[KR], [RR] を参照．

Lemma 3.4. $f \in L_w^\Phi(R^n)$, $f \neq 0$ とする．このとき

$$\int_{R^n} \Phi\left(\frac{1}{\|f\|_{L_w^\Phi}}|f(x)|\right) w(x)dx \leq 1 \tag{3.5}$$

が成立する．

Proof. $f_1(x) = f(x)/\|f\|_{L_w^\Phi}$ とおく．このとき $\|f_1\|_{L_w^\Phi} = 1$ だから，Lemma 3.3 より，

$$\int_{R^n} \Phi(|f_1(x)|)w(x)dx \leq \|f_1\|_{L_w^\Phi} = 1$$

よって，

$$\int_{R^n} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L_w^\Phi}}\right) w(x)dx \leq 1$$

となり，(3.5) が示された． □

Lemma 3.5. Φ を *N-function* とする．このとき次の不等式が成立する．

$$\|f\|_{\Phi,w} \leq \|f\|_{L_w^\Phi} \leq 2\|f\|_{\Phi,w} \quad \textit{for all} \quad f \in L_w^\Phi \,. \tag{3.6}$$

Proof. はじめの不等式は，(3.5) と norm $\|f\|_{\Phi,w}$ の定義から明らかである．後半の不等式を示す．Young の不等式より，

$$\begin{aligned}\|f\|_{L_w^\Phi} &= \sup\left\{\left|\int_{R^n} f(x)g(x)w(x)dx\right| : \int_{R^n} \Psi(|g(x)|)w(x)dx \leq 1\right\} \\ &\leq \int_{R^n} \Phi(|f(x)|)w(x)dx + 1 \,.\end{aligned}$$

ここで，f のかわりに $|f(x)|/\|f\|_{\Phi,w}$ で考えると，

$$\begin{aligned}\left\|\frac{f}{\|f\|_{\Phi,w}}\right\|_{L_w^\Phi} &\leq \int_{R^n} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{\Phi,w}}\right) w(x)dx + 1 \\ &\leq 1 + 1 = 2,\end{aligned}$$

ここで，$\int_{R^n} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{\Phi,w}}\right) w(x)dx \leq 1$ となることは，norm $\|\cdot\|_{\Phi,w}$ の定義から明らかである．よって，$\|f\|_{L_w^\Phi} \leq 2\|f\|_{\Phi,w}$ が示された． □

さて，関数列の収束について次の性質が成り立つ．

Theorem 3.6. Φ をひとつの *N-function* とする．関数列 $\{f_j : j \geq\}$ は $f_j \in M_w^\Phi$ $(j \geq 1)$, $f \in M_w^\Phi$ とする．このとき

$$\|f_j - f\|_{\Phi,w} \to 0 \quad \textit{as} \quad j \to +\infty \tag{3.7}$$

となるための必要十分条件は，

$$\lim_{j\to\infty} \int_{R^n} \Phi(\alpha|f_j(x) - f(x)|)w(x)dx = 0 \quad \textit{for every} \quad \alpha > 0 \,. \tag{3.8}$$

Proof. はじめに (3.8) を仮定して (3.7) を示す．ここで，$g(x)$ を $\int_{R^n} \Psi(|g(x)|)w(x)dx \leq 1$ となる任意の関数とする。ここで，Ψ は Φ の complementary Young function．このとき $\alpha > 1$ とすると，Young の不等式より

$$
\begin{aligned}
I_j &:= \left|\int_{R^n} (f_j(x) - f(x))g(x)w(x)dx\right| \leq \int_{R^n} |f_j(x) - f(x)||g(x)|w(x)dx \\
&= \int_{R^n} (\alpha|f_j(x) - f(x)|)\left(\frac{1}{\alpha}|g(x)|\right)w(x)dx \\
&\leq \int_{R^n} \Phi(\alpha|f_j(x) - f(x)|)w(x)dx + \int_{R^n} \Psi\left(\frac{1}{\alpha}|g(x)|\right)w(x)dx \\
&\leq \int_{R^n} \Phi(\alpha|f_j(x) - f(x)|)w(x)dx + \frac{1}{\alpha}\int_{R^n} \Psi(|g(x)|)w(x)dx \\
&\leq \int_{R^n} \Phi(\alpha|f_j(x) - f(x)|)w(x)dx + \frac{1}{\alpha}\cdot 1\ .
\end{aligned}
$$

g について sup をとると，

$$\|f_j - f\|_{L_w^\Phi} \leq \int_{R^n} \Phi(\alpha|f_j(x) - f(x)|)w(x)dx + \frac{1}{\alpha}\cdot 1\ .$$

Lemma 3.5 の不等式 (3.6) より，

$$\|f_j - f\|_{\Phi,w} \leq \int_{R^n} \Phi(\alpha|f_j(x) - f(x)|)w(x)dx + \frac{1}{\alpha}\cdot 1\ .$$

よって，$\overline{\lim}_{j\to\infty}\|f_j - f\|_{\Phi,w} \leq 1/\alpha$．$\alpha > 1$ は任意だから，$\lim_{j\to\infty}\|f_j - f\|_{\Phi,w} = 0$．

逆を示す．$\lim_{j\to\infty}\|f_j - f\|_{\Phi,w} = 0$ を仮定する．$\alpha > 0$ を任意に固定する．仮定より，ある十分大きな自然数 $j_0 \in N$ が存在して，

$$\alpha\|f_j - f\|_{\Phi,w} \leq \frac{1}{2} \quad \text{for} \quad j \geq j_0\ . \tag{3.9}$$

このとき，Lemma 3.5 より，$j \geq j_0$ のとき

$$\|\alpha(f_j - f)\|_{L_w^\Phi} \leq 2\|\alpha(f_j - f)\|_{\Phi,w} = 2\alpha\|f_j - f\|_{\Phi,w} \leq 1\ .$$

よって

$$\|\alpha(f_j - f)\|_{L_w^\Phi} \leq 1 \quad \text{for} \quad j \geq j_0\ .$$

よって，Lemma 3.3 と Lemma 3.5 より，$j \geq j_0$ のとき

$$
\begin{aligned}
\int_{R^n} \Phi(\alpha|f_j(x) - f(x)|)w(x)dx &\leq \|\alpha(f_j - f)\|_{L_w^\Phi} \\
&\leq 2\|\alpha(f_j - f)\|_{\Phi,w} \\
&= 2\alpha\|(f_j - f)\|_{\Phi,w} \to 0 \quad \text{as} \quad j \to \infty\ .
\end{aligned}
$$

よって，

$$\lim_{j\to+\infty}\int_{R^n} \Phi(\alpha|f_j(x) - f(x)|)w(x)dx = 0$$

が示された． □

さて，空間 $\Phi(L)$ は一般に線形空間にならないが，次のような平均収束が考えられている。

$$\int_{R^n} \Phi(|f_j(x) - f(x)|)w(x)dx \to 0 \quad \text{as} \quad j \to \infty .$$

よって，$\Phi(L)$ より広い Orlicz 空間 $L^{\Phi}_{w}(R^n)$ では次のような収束を考えるのは自然であるように思われる。ある十分小さな正の数 ε_0 が存在して

$$\int_{R^n} \Phi(\varepsilon_0|f_j(x) - f(x)|)w(x)dx \to 0 \quad \text{as} \quad j \to \infty . \tag{3.10}$$

Orlicz 空間 L^{Φ}_{w} に ranked space（階位空間）の構造をいれて，(3.10) の収束と同値にできることが知られている [KY3].

Orlicz space は Banach space となるのでたいへん魅力的であり，種々の norm 不等式を導くことができる．Young function が Δ_2-条件を満足しない場合には Orlicz space の構造としては ranked space としての構造を入れて考察するほうが自然であるように思われる．ただし，ranked space としての取り扱いは単純ではないので，今後の研究が更に必要となる．

4. 一般化された Orlicz space 及び，Modular function space について．

Orlicz 空間 $L^{\Phi}_{w}(R^n)$ を定義するための N-function は convex function であった．convex 性は、三角不等式

$$\|f + g\|_{\Phi,w} \le \|f\|_{\Phi,w} + \|g\|_{\Phi,w}$$

と密接に関係している．しかし，実際の応用の場合には convex でない Φ を扱う必要が生じてくる．次のような不等式の例がある．

$$\int\limits_{Mf\le 1} \frac{Mf(x)w(x)dx}{(1-\log Mf(x))(1+\log(1-\log Mf(x)))^{1+\varepsilon}} + \int\limits_{Mf>1} \frac{Mf(x)w(x)dx}{(1+\log Mf(x))^{1-\varepsilon}}$$

$$\le \frac{C}{\varepsilon}\left\{ \int\limits_{|f|\le 1} \frac{|f(x)|w(x)dx}{(1+\log(1-\log|f(x)|))^{\varepsilon}} + \int\limits_{|f|>1} |f(x)|(1+\log|f(x)|)^{\varepsilon}w(x)dx \right\} .$$

ここで，$0<\varepsilon<1$, M は Hardy-Littlewood の最大値関数,

$$Mf(x) := \sup_{x\in Q} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|dy ,$$

sup は軸に平行なすべての cubes $Q \subseteq R^n$ についてとられるものとする．上の不等式に対応する関数 $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ は

$$\Phi(t) = \begin{cases} \frac{t}{(1-\log t)(1+\log(1-\log t))^{1+\varepsilon}}, & 0<t\le 1; \\ \frac{t}{(1+\log t)^{1-\varepsilon}}, & t>1 \end{cases}$$

$$\Psi(t) = \begin{cases} \frac{t}{\varepsilon(1+\log(1-\log t))^{\varepsilon}}, & 0<t\le 1; \\ \frac{1}{\varepsilon}t(1+\log t)^{\varepsilon}, & t>1. \end{cases}$$

このとき，すぐ前でのべた不等式は,

$$\int_{R^n} \Phi(Mf(x))w(x)dx \le C\int_{R^n} \Psi(|f(x)|)w(x)dx$$

となる．関数 $\Phi(t)$ は convex ではない．convex でない関数 $\Phi(t)$ に対応する関数空間を考える．

Definition 4.1. $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ が φ-function であるとは，次の性質を満足するときとする．

(1) $\Phi(0) = 0$;
(2) $\lim_{t\to\infty} \Phi(t) = +\infty$;
(3) Φ は strictly increasing
(4) Φ は continuous ;

Definition 4.2. Φ をひとつの φ-function とする．このとき

$$\rho_\Phi(f) := \int_{R^n} \Phi(|f(x)|)w(x)dx$$

によって functional ρ_Φ を定める．

ρ_Φ は次に述べる modular functional の重要な例である．$\mathcal{M}$ を R^n 上で定義された extended real valued measurable functions の全体とする．

Definition 4.3. functional $\rho : \mathcal{M} \longrightarrow [0,\infty]$ が modular functional on $\mathcal{M}$ であるとは次の性質を持つときとする．

(MF-1) : $\rho(f) = 0$ if and only if $f = 0$;
(MF-2) : $\rho(f) = \rho(|f|)$ for all $f \in \mathcal{M}$;
(MF-3) : $\rho(\alpha f + \beta g) \le \rho(f) + \rho(g)$ for all $f, g \in \mathcal{M}$ ，ここで $\alpha, \beta \ge 0, \alpha + \beta = 1$;
(MF-4) : $0 \le g \le f$ *a.e.* $\Longrightarrow$ $\rho(g) \le \rho(f)$;
(MF-5) : $0 \le f_j \uparrow f$ as $j \to \infty$ a.e. $\Longrightarrow \rho(f_j) \uparrow \rho(f)$ as $j \to \infty$;
(MF-6) : $|E| < \infty,$ $\Longrightarrow$ $\rho(\frac{1}{\lambda}\chi_E) < \infty$ for some $\lambda > 0$;
(MF-7) : $\rho(f) < \infty, f \in \mathcal{M}$ $\Longrightarrow$ $f(x)$ is finite a.e. $x \in R^n$.

modular functional ρ を用いて関数空間 X_ρ^*, X_ρ を次のように定義する．

$$X_\rho^* := \{f \in \mathcal{M} : \rho(\lambda f) < \infty \quad \text{for some} \quad \lambda > 0\},$$
$$X_\rho := \{f \in \mathcal{M} : \lim_{\lambda\to 0+} \rho(\lambda f) = 0\}.$$
$$(\text{明らかに} X_\rho \subseteq X_\rho^*)$$

又，$f \in X_\rho^*$ の F-norm $|f|_\rho$ を次のように定義する．

$$|f|_\rho := \inf\{u > 0 : \rho(f/u) \le u\}$$

このとき，$|f|_\rho < +\infty$ となるための必要十分条件は $f \in X_\rho^*$ であることが知られている．

Theorem 4.1. $|f|_\rho$ について次の性質が成り立つ．

(1) : $|f|_\rho = 0 \ f \in X_\rho^* \ \Leftrightarrow \ f = 0$;

(2) : $|-f|_\rho = |f|_\rho$ *for all* $f \in X_\rho^*$;

(3) : $|f+g|_\rho \leq |f|_\rho + |g|_\rho$ *all* $f, g \in X_\rho^*$;

(4) : $f_k \in X_\rho^*, f \in X_\rho$ とする
$\alpha_k \to \alpha, \quad |f_k - f|_\rho \to 0 \ \Rightarrow \ |\alpha_k f_k - \alpha f|_\rho \to 0 \ (k \to \infty)$

modular function space についての詳細については，H. Kita, T. Miyamoto and K. Yoneda, *Modular function spaces and control functions of almost everywhere convergence*, Commentationes Mathematicae (Poznan). **41** (2001) 99- 133. を参照してほしい．

5. Hardy Littlewood の最大値関数について．

はじめに，いくつかの notations と definitions を与えることから始めよう．R^n によって，n 次元 Euclidean 空間を表す．我々は R^n 上で定義された real valued measurable functions f を考える．ここでは $|E|$ は R^n の measurable subset E の the Lebesgue measure を意味する．

Definition 5.1. 古典的な Hardy-Littlewood の 最大値関数は次の式で定義される．

$$Mf(x) := \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy ,$$

ここで，supremum は $x \in Q$ となるすべての cubes Q （cube はいつでも軸に平行な辺を持つ cube を意味する）にわたって取られる．

Definition 5.2. A locally integrable almost everywhere positive function $w : R^n \to [0, \infty)$ は weight function と言われる．

Muckenhoupt は [Muc] の中で， Hardy-Littlewood の最大値関数が $L^p(\mathbb{R}^n, w(x)dx)$ で bounded となるための w のすばらしい特徴付けを与えた．即ち次の結果をあたえた．

Theorem 5.1. (Muckenhoupt) $1 < p < \infty$ とする．*Hardy-Littlewood* の最大値関数 M が $L^p(\mathbb{R}^n, w(x)dx)$ 上で *bounded* となるための必要十分条件は， *weight* w が次の性質を持つことである．ある正数 $C > 0$ が存在して，

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{\frac{-1}{p-1}}dx\right)^{p-1} \leq C \quad \text{for all cubes} \quad Q \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n. \tag{5.1}$$

A weight function w が (5.1) を満足するとき，w は A_p condition を満足するという．$w \in A_p$ と表す．

Kerman and Torchinsky [KT] は weighted Orlicz spaces の場合に Muckenhoupt の結果を拡張した．彼らは weight function の class として A_Φ を定義した (see Definition 5.4). Bagby [Ba] は Hardy-Littlewood の 最大値関数が weak type の不等式

$$\int_{\{x:Mf(x)>\lambda\}} w(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(C|f(x)|/\lambda)w(x)dx \quad \text{for all} \quad \lambda > 0 \quad \text{and all} \quad f$$

を満足するような weight の class B_Φ を導入した．(see Definition 5.6).

この節では，我々はふたつの weight class A_Φ と B_Φ の関係を論議し，いくつかの新しい結果を与える．

Kerman and Torchinsky [KT] は Φ と $\widetilde{\Phi}$ がともに Δ_2 に属するとき A_p weight の概念を拡張して次の A_Φ weight の概念を与えた．

Definition 5.3. Φ をひとつの Young function とし，$\widetilde{\Phi}$ をその complementary Young function とする．$\Phi, \widetilde{\Phi}$ がともに Δ_2 条件を満足するとする．このとき，weight w が A_Φ weight (A_Φ 条件を満たす) とは，($w \in A_\Phi$ とあらわす), ある正の定数 $C > 0$ が存在して，

$$(5.2) \qquad \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \varepsilon w(x)dx\right)\varphi\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \varphi^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon w(x)}\right)dx\right) \leq C$$

がすべての cube Q とすべての $\varepsilon > 0$ にたいして成立する．ここで，φ は Φ の right derivative で φ^{-1} は φ の right inverse である．

Kerman and Torchinsky [KT] の中で次の結果が与えられている．

Theorem 5.2. (Kerman and Torchinsky) Φ を *Young function* とする．$\Phi, \widetilde{\Phi}$ がともに Δ_2 条件を満足するとする．w をひとつの *weight function* とする．このとき *Hardy-Littlewood* の *maximal function* M について次の不等式

$$(5.3) \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(Mf(x))w(x)dx \leq C\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|f(x)|)w(x)dx \quad \textit{for all} \quad f$$

が成立するための必要十分条件は $w \in A_\Phi$ となることである．

この論文では，Φ が必ずしも Δ_2 条件を満足しない場合にも適用したいので，A_Φ weight の定義を少し拡張しておく．

Definition 5.4. Φ をひとつの N-function とし，$\widetilde{\Phi}$ をその complementary N-function とする．$\Phi, \widetilde{\Phi}$ の right derivative をそれぞれ φ, φ^{-1} とする．このとき，weight w が A_Φ^ε weight (A_Φ^ε 条件を満たす) とは，($w \in A_\Phi^\varepsilon$ とあらわす), ある正の定数 $C_1 > 0$ （十分小）と $C_2 > 0$ (十分大) が存在して，

$$(5.4) \qquad \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \varepsilon w(x)dx\right)\varphi\left(\frac{C_1}{|Q|}\int_Q \varphi^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon w(x)}\right)dx\right) \leq C_2$$

がすべての cube Q とすべての $\varepsilon > 0$ にたいして成立することとする．

上で与えられた定義は，Kokilashvili and Krbec ([KK] p. 43) の中で与えられている定義と同値である．即ち，次の Lemma が成立する．

Lemma 5.3. Φ をひとつの *N-function* とし，$\widetilde{\Phi}$ をその *complementary N-function* とする．更に，$R_\Phi(t) = \Phi(t)/t$, $S_\Phi(t) = \widetilde{\Phi}(t)/t$ とおく．このとき，*weight* w が A_Φ^e *weight* となるための必要十分条件は，ある正の定数 $C_1 > 0$ （十分小）と $C_2 > 0$ （十分大）が存在して，

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \varepsilon w(x)dx\right) R_\Phi\left(\frac{C_1}{|Q|}\int_Q S_\Phi\left(\frac{1}{\varepsilon w(x)}\right)dx\right) \leq C_2 \tag{5.5}$$

がすべての *cube* Q とすべての $\varepsilon > 0$ にたいして成立することである．

Proof. はじめに $w \in A_\Phi^e$ であると仮定する．このとき，ある正の定数 $C_1, C_2 > 0$ が存在して，(5.4) の不等式が成立する．即ち，

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \varepsilon w(x)dx\right) \varphi\left(\frac{C_1}{|Q|}\int_Q \varphi^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon w(x)}\right)dx\right) \leq C_2$$

がすべての cubes Q と すべての $\varepsilon > 0$ に対して成立する．又，$R_\Phi(t)$, $S_\Phi(t)$ の定義より

$$\begin{aligned} R_\Phi(t) &= \frac{\Phi(t)}{t} = \frac{\int_0^t \varphi(s)ds}{t} \leq \frac{t\varphi(t)}{t} = \varphi(t), \\ S_\Phi(t) &= \frac{\widetilde{\Phi}(t)}{t} = \frac{\int_0^t \varphi^{-1}(s)ds}{t} \leq \frac{t\varphi^{-1}(t)}{t} = \varphi^{-1}(t). \end{aligned}$$

よって (5.4) より，

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \varepsilon w(x)dx\right) R_\Phi\left(\frac{C_1}{|Q|}\int_Q S_\Phi\left(\frac{1}{\varepsilon w(x)}\right)dx\right) \\ &\qquad \leq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \varepsilon w(x)dx\right) \varphi\left(\frac{C_1}{|Q|}\int_Q \varphi^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon w(x)}\right)dx\right) \leq C_2 \end{aligned}$$

となり (5.5) がすべての cube Q と $\varepsilon > 0$ に対して成立することがわかった．

次に，逆を示す．即ち，ある正の定数 C_1 と C_2 が存在して，(5.5) が成立したとする．又，R_Φ 及び S_Φ の定義より

$$\begin{aligned} 2R_\Phi(2t) &= \frac{2\Phi(t)}{2t} = \frac{\int_0^{2t} \varphi(s)ds}{t} \geq \frac{\int_t^{2t} \varphi(s)ds}{t} \geq \frac{t\varphi(t)}{t} = \varphi(t), \\ 2S_\Phi(2t) &= \frac{2\widetilde{\Phi}(t)}{2t} = \frac{\int_0^{2t} \varphi^{-1}(s)ds}{t} \geq \frac{\int_t^{2t} \varphi^{-1}(s)ds}{t} \geq \frac{t\varphi^{-1}(t)}{t} = \varphi^{-1}(t). \end{aligned}$$

このとき,

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q (2\varepsilon)w(x)dx\right)\varphi\left(\frac{C_1}{4|Q|}\int_Q \varphi^{-1}\left(\frac{1}{(2\varepsilon)w(x)}\right)dx\right)\\
&\quad\le \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q (2\varepsilon)w(x)dx\right)\varphi\left(\frac{C_1}{4|Q|}\int_Q 2S_\Phi\left(\frac{1}{\varepsilon w(x)}\right)dx\right)\\
&\quad= 2\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \varepsilon w(x)dx\right)\varphi\left(\frac{C_1}{2|Q|}\int_Q S_\Phi\left(\frac{1}{\varepsilon w(x)}\right)dx\right)\\
&\quad\le 2\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \varepsilon w(x)dx\right)2R_\Phi\left(\frac{C_1}{|Q|}\int_Q S_\Phi\left(\frac{1}{\varepsilon w(x)}\right)dx\right)\\
&\quad= 4\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \varepsilon w(x)dx\right)R_\Phi\left(\frac{C_1}{|Q|}\int_Q S_\Phi\left(\frac{1}{\varepsilon w(x)}\right)dx\right)\le 4C_2\,.
\end{aligned}
$$

よって, $2\varepsilon=\varepsilon'$, $(1/4)C_1=C_1'$, $4C_2=C_2'$ とおくとき, 次の不等式が成立することがわかった.

$$
\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \varepsilon' w(x)dx\right)\varphi\left(\frac{C_1'}{|Q|}\int_Q \varphi^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon' w(x)}\right)dx\right)\le C_2',
$$

ここで, $Q, \varepsilon'>0$ は任意であった. よって $w\in A_\Phi^{\varepsilon}$ がわかった. □

また, Bagby [Ba] は Hardy-Littlewood の maximal operator M の weak type の不等式に関して weight class B_Φ を導入した.

Definition 5.5. ひとつの weight w が doubling measure であるとは, ある正の定数 $C>0$ が存在して,

(5.6) $$w(2Q)\le Cw(Q) \quad \text{for all cubes} \quad Q,$$

ここで, $2Q$ は中心が Q と同じで, 1辺の長さが Q の2倍の cube である.

次に, weight class B_Φ を定義する.

Definition 5.6. w をひとつの nontrivial weight とし, Φ をひとつの N-function とする. w が B_Φ 条件を満足するとは, $(w\in B_\Phi)$, ある正の定数 $C>0$ が存在して

(5.7) $$w\{x\in\mathbb{R}^n : Mf(x)>\lambda\}\le\int_{\mathbb{R}^n}\Phi\left(\frac{C|f(x)|}{\lambda}\right)w(x)dx$$

がすべての $\lambda>0$ とすべての $f\in L^\Phi(\mathbb{R}^n, w(x)dx)$ に対して成立するときとする.

Definition 5.7. Φ をひとつの N-function とし, w をひとつの weight function とする. 任意の cube $Q\subseteq\mathbb{R}^n$ をひとつ固定する. このとき,

(5.8) $$\|f\|_{\Phi,w,Q} := \inf\left\{\lambda>0 : \int_Q \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)w(x)dx\le w(Q)\right\}$$

と置く. $\|f\|_{\Phi,w,Q}<+\infty$ となる f の全体を $L^\Phi(Q, \frac{w(x)}{w(Q)}dx)$ で表す.

この概念を利用して，Bagby [Ba] は次の重要な結果を示した．

Theorem 5.4 (Bagby). Φ をひとつの *N-function* とし，w をひとつの *nontrivial weight* とする．このとき，$w \in B_\Phi$ となるための必要十分条件は w がひとつの *doubling measure* であってかつ，ある正の定数 $C > 0$ が存在して

$$\frac{w(Q)}{|Q|}\left\|\frac{1}{w}\right\|_{\widetilde{\Phi},w,Q} \le C \quad \textit{for all cubes} \quad Q \tag{5.9}$$

となることである．

不等式 (5.9) は次の不等式の statement と同値であることは，Definition 5.7 からすぐにわかる．即ち，十分小さな正の定数 $\varepsilon_0 > 0$ が存在して，

$$\int_Q \widetilde{\Phi}\left(\frac{\varepsilon_0 w(Q)}{|Q|}\cdot\frac{1}{w(x)}\right) w(x)dx \le w(Q) \quad \text{for all cubes} \quad Q \subseteq \mathbb{R}^n. \tag{5.10}$$

次に， weight class A_Φ^e と B_Φ との関係について論議する．前に述べた Kerman and Torchinsky の結果より．次のことがすぐに分かる．

Theorem 5.5. Φ をひとつの *N-function* とする．もし，$\Phi, \widetilde{\Phi} \in \Delta_2$ ならば，$A_\Phi^e \subseteq B_\Phi$ が成立する．

Proof. Φ をひとつの Young fuction とし，Φ の right derivative を φ とする．$\Phi \in \Delta_2$ のとき φ もまた $\varphi \in \Delta_2$ であることに注意しておく．実際，$\Phi \in \Delta_2$ だから

$$\Phi(4t) = \Phi(2\cdot 2t) \le C\Phi(2t) \le C^2\Phi(t) \quad \text{for} \quad t \ge 0,$$

ここで，定数 $C > 0$ は Definition 2.4 の中の定数である．よって $t \ge 0$ のとき，

$$\begin{aligned}(2t)\varphi(2t) &\le \textstyle\int_{2t}^{4t}\varphi(s)ds \le \int_0^{4t}\varphi(s)ds = \Phi(4t)\\ &\le C^2\Phi(t) = C^2\textstyle\int_0^t\varphi(s) \le C^2 t\varphi(t).\end{aligned}$$

よって $t > 0$ のとき両辺を $2t > 0$ で割ると，

$$\varphi(2t) \le \frac{C^2}{2}\varphi(t)$$

となる．$t = 0$ のときには φ の右連続性により，もし $\varphi(0) = 0$ なら上の式は両辺ともゼロで成立する．もし $a = \varphi(0+) > 0$ なら，$C > 0$ をあらためて $C^2/2 \ge 1$ と取りなおせば上の式は $t = 0$ でも成立する．よって $\varphi \in \Delta_2$ が成立する．

さて，$w \in A_\Phi^e$ を任意の weight とする．$\varphi \in \Delta_2$ であったから weight の定義より $w \in A_\Phi$ となる．また，この定理の仮定より $\Phi, \widetilde{\Phi} \in \Delta_2$ だから，Kerman Torchinsky の定理 Theorem 5.2 より strong type の不等式 (5.3) が成立する．不等式 (5.3) で f の代わりに f/λ で置き換える．ここで $\lambda > 0$ は任意．このとき

$$\int_{\mathbb{R}^n}\Phi\Big(\frac{1}{\lambda}Mf(x)\Big)w(x)dx \le C\int_{\mathbb{R}^n}\Phi\Big(\frac{1}{\lambda}|f(x)|\Big)w(x)dx \quad \text{for all} \quad f \tag{5.11}$$

次に，集合 $E(\lambda)$ を $E(\lambda) := \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}$ と置く．このとき，(5.11) より

$$\Phi(1)\int_{E(\lambda)} w(x)dx \le C\int_{\mathbb{R}^n}\Phi\Big(\frac{1}{\lambda}|f(x)|\Big)w(x)dx \quad \text{for all} \quad f.$$

$\Phi \in \Delta_2$ だから $\Phi(t) > 0$ がすべての $t > 0$ が成立するから，$\Phi(1) > 0$ となる．よって必要ならば $C > 0$ を十分大きく取り直して $C/\Phi(1) > 1$ としておく．このとき $C_1 = C/\Phi(1) > 1$ とおいたとき，Φ の凸性により次の不等式が得られる．

$$\begin{aligned} w(E(\lambda)) &\le C_1 \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\Big(\frac{1}{\lambda}|f(x)|\Big) w(x)dx \\ &\le \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\Big(\frac{C_1}{\lambda}|f(x)|\Big) w(x)dx\,. \end{aligned}$$

よって，Definition 5.6 の不等式 (5.7) が成立することがわかった．よって $w \in B_\Phi$ が示された． □

Theorem 5.5 においては，Φ と $\widetilde{\Phi}$ の両方が Δ_2-条件を満足することが仮定されている．Φ の Δ_2-条件を仮定しない場合については，Kokilashvili and Krbec [KK] p. 43 の中で次の結果が与えられている．

Theorem 5.6. Φ をひとつの *N-function* とし，$\widetilde{\Phi} \in \Delta_2$ とする．w を *weight function on* $\mathbb{R}^1$（一次元）で，もし $w \in A_\Phi^e$ ならば，ある正の数 $C > 0$ が存在して，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(Mf(x))w(x)dx \le C \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(|f(x)|)w(x)dx \quad \textit{for all} \quad f$$

上の結果は一次元の場合であることに注意してほしい．この結果からすぐに次の結果が得られる．

Theorem 5.7. Φ をひとつの *N-function* とし，$\widetilde{\Phi} \in \Delta_2$ とする．もし w が $\mathbb{R}^1$（一次元）上の *weight function* で，$w \in A_\Phi^e$ ならば，$w \in B_\Phi$ となる．すなわち，$A_\Phi^e \subseteq B_\Phi$ となる．

Proof. Φ をひとつの Young function とし，$\widetilde{\Phi} \in \Delta_2$ とする．$w \in A_\Phi^e$ ならば，Theorem 5.6 より，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(Mf(x))w(x)dx \le C \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(|f(x)|)w(x)dx \quad \text{for all} \quad f \tag{5.12}$$

が成り立つ．今，Φ は $\lim_{t\to\infty}\Phi(t) = +\infty$ だから，十分大きな定数 $C_1 > 0$ が存在して，$\Phi(C_1) > 0$ とできる．必要ならば，(5.12) の定数 $C > 0$ を大きくとりなおして $C/\Phi(C_1) > 1$ としておく．$\lambda > 0$ を任意の正数として，f の代わりに $C_1 f/\lambda$ で置き換える．このとき，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{C_1 Mf(x)}{\lambda}\right) w(x)dx \le C \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{C_1|f(x)|}{\lambda}\right) w(x)dx \quad \text{for all} \quad f$$

次に，$E(\lambda) := \{x \in \mathbb{R}^1 : Mf(x) > \lambda\}$ と置く．上の不等式より，

$$\Phi(C_1) \int_{E(\lambda)} w(x)dx \le C \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{C_1|f(x)|}{\lambda}\right) w(x)dx.$$

$\Phi(C_1) > 0$ だから

$$w(E(\lambda)) \le \frac{C}{\Phi(C_1)} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{C_1|f(x)|}{\lambda}\right) w(x)dx.$$

となる．また，$C/\Phi(C_1) > 1$ であり，Φ は convex だから，

$$w(E(\lambda)) \le \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{C_2|f(x)|}{\lambda}\right) w(x)dx \quad \text{for all} \quad \lambda > 0,$$

ここで，$C_2 = CC_1/\Phi(C_1)$ である．よって $w \in B_\Phi$ が示された． □

我々の目的は，$A_\Phi^e \subseteq B_\Phi$ となることを，より一般的に直接，Hardy-Littlewood の maximal function を使うことなしに証明することである．Fiorenza [Fi] は，N-function Φ に条件をつけることにより次の結果を証明した．

Theorem 5.8 (Fiorenza). *N-function* Φ は次の性質を持つものとする．Φ の *right derivative* $\varphi(s)$ は *continuous, nondecreasing* で次の性質を持つものとする．

$$\varphi(s) > 0 \quad \textit{if} \quad s > 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \lim_{s\to\infty} \varphi(s) = +\infty. \tag{5.13}$$

更に，$\widetilde{\Phi} \in \Delta_2$ と仮定する．このとき，$A_\Phi \subseteq B_\Phi$ が成立する．

Fiorenza の論文の中では，Φ の Δ_2 条件を仮定することなしに，又 Hardy-Littlewood の maximal function を使うことなく証明が与えられている．我々は上の Theorem 5.8 をより一般的な条件のもと（Φ の Δ_2 条件を仮定せず，$\widetilde{\Phi}$ の Δ_2 条件も仮定せず，又 Hardy-Littlewood の maximal function も使用しない）で次の結果を得ることができた．

Theorem 5.9. Φ をひとつの *N-function* とする．このとき，次の包含関係が成立する．

$$A_\Phi^e \subseteq B_\Phi \tag{5.14}$$

Proof. $w \in A_\Phi^e$ を任意に取り出す．このとき，A_Φ^e weight の定義の Definition 5.4 よりある正の定数 C_1, C_2 が存在して，

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \varepsilon w(x)dx\right) \varphi\left(\frac{C_1}{|Q|}\int_Q \varphi^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon w(x)}\right)dx\right) \le C_2$$

具体的な $\varepsilon > 0$ は後ほど与える．このとき

$$\varphi\left(\frac{C_1}{|Q|}\int_Q \varphi^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon w(x)}\right)dx\right) \le \frac{C_2|Q|}{\varepsilon \cdot w(Q)}$$

が成立する．又，関数 φ^{-1} は nondecreasing だから

$$\varphi^{-1}\left(\varphi\left(\frac{C_1}{|Q|}\int_Q \varphi^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon w(x)}\right)dx\right)\right) \le \varphi^{-1}\left(\frac{C_2|Q|}{\varepsilon \cdot w(Q)}\right). \tag{5.15}$$

さて，φ は Φ の right derivative で φ^{-1} は $\widetilde{\Phi}$ の right derivetive だから，φ, φ^{-1} は共に right continuous である．よって，

$$\varphi^{-1}(\varphi(a)) \ge a \quad \text{for all} \quad a \ge 0.$$

が成立する．よって，(5.15) より次の不等式が成立する．

$$\frac{C_1}{|Q|}\int_Q \varphi^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon w(x)}\right)dx \le \varphi^{-1}\left(\frac{C_2|Q|}{\varepsilon\cdot w(Q)}\right) \quad \text{for every cube} \quad Q \quad \text{and} \quad \varepsilon>0.$$

よって次の結果が得られた．

$$\int_Q \varphi^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon w(x)}\right)dx \le \frac{|Q|}{C_1}\varphi^{-1}\left(\frac{C_2|Q|}{\varepsilon\cdot w(Q)}\right) \quad \text{for every cube} \quad Q \quad \text{and} \quad \varepsilon>0. \tag{5.16}$$

次に，正の定数 C_0 を十分大きくとって

$$C_0 > \max\left(C_2, \frac{\varphi^{-1}(1)}{C_1}\right) \tag{5.17}$$

となるようにしておく，C_0 は cube Q や $\varepsilon>0$ に無関係な定数．又，$\widetilde{\Phi}(t)=\int_0^t \varphi^{-1}(s)ds \le t\varphi^{-1}(t)$ だから，

$$\begin{aligned}
&\int_Q \widetilde{\Phi}\left(\frac{w(Q)}{C_0|Q|w(x)}\right)w(x)dx \\
&\le \int_Q \varphi^{-1}\left(\frac{w(Q)}{C_0|Q|w(x)}\right)\cdot\frac{w(Q)}{C_0|Q|w(x)}\cdot w(x)dx \\
&= \frac{w(Q)}{C_0|Q|}\int_Q \varphi^{-1}\left(\frac{w(Q)}{C_0|Q|w(x)}\right)dx.
\end{aligned}$$

よって，次の不等式が得られる．

$$\int_Q \widetilde{\Phi}\left(\frac{w(Q)}{C_0|Q|w(x)}\right)w(x)dx \le \frac{w(Q)}{C_0|Q|}\cdot\int_Q \varphi^{-1}\left(\frac{1}{\frac{w(Q)}{C_0|Q|}}\cdot\frac{1}{w(x)}\right)dx.$$

ここで，(5.16) の不等式で，$\varepsilon=\frac{C_0|Q|}{w(Q)}$ と置く，このとき

$$\begin{aligned}
&\int_Q \widetilde{\Phi}\left(\frac{w(Q)}{C_0|Q|w(x)}\right)w(x)dx \\
&\le \frac{w(Q)}{C_0|Q|}\cdot\frac{|Q|}{C_1}\cdot\varphi^{-1}\left(\frac{w(Q)}{C_0|Q|}\cdot\frac{C_2|Q|}{w(Q)}\right) = \frac{w(Q)}{C_0C_1}\cdot\varphi^{-1}\left(\frac{C_2}{C_0}\right).
\end{aligned}$$

このとき，(5.17) より，$0<C_2/C_0<1$ で $\varphi^{-1}(1)/C_0C_1<1$ だから次の不等式が得られる．

$$\int_Q \widetilde{\Phi}\left(\frac{w(Q)}{C_0|Q|w(x)}\right)w(x)dx \le \frac{w(Q)}{C_0C_1}\varphi^{-1}(1) \le w(Q).$$

よって，Theorem 5.4 及び (5.10) より $w\in B_\Phi$ がわかった．　□

次に，我々は今までの問題の逆を考える．即ち，次のような問題を考える．

【問題】関数 $w(x)$ を B_Φ の任意の weight とする．Young function $\Phi(t)$ がどのような条件を満たせば $w(x)\in A_\Phi^\varepsilon$ となるか？

このことについては，Fiorenza [Fi] の論文の中でいくつかの結果が与えられている．彼の論文の中では Young function Φ の right derivative φ の連続性が仮定されている．こ

こでは φ の連続性を仮定しなくとも同様の結果が成立することを示す．はじめに次の定義を与える．

Definition 5.8. 関数 Φ をひとつの Young function とする．$\Phi \in \Delta'$ であるとは，ある正の定数 $C > 0$ が存在して，

$$\Phi(st) \leq C\Phi(s)\Phi(t) \quad \text{for all} \quad s, t \geq 0 \tag{5.18}$$

が成立することとする．

ここで，Δ' を満足する Young function Φ の基本的な性質をまとめておこう．

Lemma 5.10. Φ をひとつの *Young function* とする．もし，$\Phi \in \Delta'$ ならば $\Phi \in \Delta_2$ が成立する．

Proof. $\Phi \in \Delta'$ とする．このとき，ある正の定数 C が存在して，

$$\Phi(st) \leq C\Phi(s)\Phi(t) \quad \text{for all} \quad s, t \geq 0\,.$$

が成立する．ここで，$s = 2$ とすると，

$$\Phi(2t) \leq C\Phi(2)\Phi(t) \quad \text{for all} \quad t \geq 0$$

となり，$\Phi \in \Delta_2$ がわかった． □

Remark. $\Phi \in \Delta'$ ならば，$\Phi(t)$ は $t = 0$ の近傍で恒等的にゼロになることはない．

Lemma 5.11. $\Phi \in \Delta'$ とする．このとき

$$\Phi(t) \leq t\varphi(t) \leq C_1\Phi(t) \quad \textit{for all} \quad t \geq 0\,, \tag{5.19}$$

が成立する．ここで，$C_1 = C\Phi(2)$ であって，定数 $C > 0$ は不等式 (5.18) の中の定数である．

Proof. $\Phi(t)$ が Δ' 条件を満足することから次のことがわかる．

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \int_0^t \varphi(s)ds \leq t\varphi(t) \leq \int_t^{2t} \varphi(s)ds \\ &\leq \int_0^{2t} \varphi(s)ds = \Phi(2t) \leq C\Phi(2)\Phi(t)\,.\end{aligned}$$

よって Lemma が証明された． □

Lemma 5.12. Φ を *Young function* として，その *right derivative* を φ とする．もし，$\Phi \in \Delta'$ ならば $\varphi \in \Delta'$ である．すなわち

$$\varphi(st) \leq C_2\varphi(s)\varphi(t) \quad \textit{for all} \quad s, t \geq 0\,, \tag{5.20}$$

ここで，$C_2 = CC_1 = C^2\Phi(2)$, であり C は不等式 (5.18) の中の定数である．

Proof. $C_1 = C\Phi(2)$ とするとき，Lemma 5.11 の (5.19) より，

$$\begin{aligned}\Phi(st) &\leq \frac{C_1\Phi(st)}{st} \leq \frac{C_1 C\Phi(s)\Phi(t)}{st} \\ &= CC_1 \cdot \frac{\Phi(s)}{s} \cdot \frac{\Phi(t)}{t} \leq CC_1 \cdot \frac{s\varphi(s)}{s} \cdot \frac{t\varphi(t)}{t} \\ &= CC_1\varphi(s)\varphi(t) = C^2\Phi(2)\varphi(s)\varphi(t).\end{aligned}$$

よって，$\varphi(t)$ もまた Δ' 条件を満足することがわかった. □

Remark. $\varphi \in \Delta'$ より φ は $t=0$ の近傍で恒等的にゼロにはならない.

今後の論議の中でたいへん重要な役割を果たす次の Lemma を与えておく. これはBagby [Ba] の中で与えられている.

Lemma 5.13 (Bagby). 関数 Φ をひとつの *Young function* とする. このとき，区間 $[0,\infty)$ 上で定義された *continuous nondecreasing function* $g(t) \geq 0$ で次の性質を持つものが存在する.

$$\widetilde{\Phi}(g(t)) \leq tg(t) \leq \widetilde{\Phi}(2g(t)) \quad \textit{for all} \quad t \geq 0, \tag{5.21}$$

$$2\Phi\left(\frac{t}{2}\right) \leq tg(t) \leq \Phi(2t) \quad \textit{for all} \quad t \geq 0. \tag{5.22}$$

ここではこの Lemma を利用して，いくつかの結果を与える.

Lemma 5.14. Φ をひとつの *Young function* として，Φ の *right derivative* を φ, Lemma 5.13 の中の関数を $g(t)$ とする. このとき

$$\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{t}{4}\right) \leq g(t) \leq 2\varphi(2t) \quad \textit{for all} \quad t \geq 0 \tag{5.23}$$

が成立する.

Proof. はじめに，(5.23) の右側の不等式を示す. (5.22) の第2の不等式より次の結果がわかた.

$$tg(t) \leq \Phi(2t) = \int_0^{2t} \varphi(s)ds \leq (2t)\varphi(2t).$$

よって，$t>0$ のとき $g(t) \leq 2\varphi(2t)$ となる. また，$g(t)$ は $t=0$ で連続で，$\varphi(t)$ は $t=0$ で右連続だから $t \to 0$ として $g(0) \leq 2\varphi(0)$ が得られる. よって $g(t) \leq 2\varphi(2t)$ がすべての $t \geq 0$ が成立することがわかった.

次に，(5.23) の左側の不等式を示す. (5.22) の左側の不等式より次の不等式が得られる.

$$tg(t) \geq 2\Phi\left(\frac{t}{2}\right) = 2\int_0^{t/2} \varphi(s)ds \geq 2\int_{t/4}^{t/2} \varphi(s)ds \geq 2 \cdot \frac{t}{4} \cdot \varphi\left(\frac{t}{4}\right).$$

よって，$t>0$ のとき，$g(t)\geq (1/2)\varphi(t/4)$ が成立することがわかった．又，$g(t)$ の連続性と $\varphi(t)$ の右連続性より，$t\to 0$ として，$g(0)\geq (1/2)\varphi(0)$ となり，$t=0$ でも成立することがわかった．以上により (5.23) が示された． □

Lemma 5.15. Φ をひとつの *Young function* とし，その *complementary Young function* $\widetilde{\Phi}$ の *right derivative* を φ^{-1} とする．，Lemma 5.13 の中の関数を $g(t)$ の *right derivative* を $g^{-1}(t)$ とする．このとき

$$\varphi^{-1}(s)\leq 2g^{-1}(2s)\quad \textit{for all}\quad s\geq 0 \tag{5.24}$$

が成立する．

Proof. Lemma 5.13 の不等式 (5.21) の第 1 の不等式より，

$$\begin{aligned} tg(t) &\geq \widetilde{\Phi}(g(t))=\int_0^{g(t)}\varphi^{-1}(s)ds \\ &\geq \int_{g(t)/2}^{g(t)}\varphi^{-1}(s)ds\geq \frac{g(t)}{2}\cdot\varphi^{-1}\left(\frac{g(t)}{2}\right). \end{aligned}$$

よって，次の不等式が得られた．

$$tg(t)\geq \frac{g(t)}{2}\cdot\varphi^{-1}\left(\frac{g(t)}{2}\right)\quad \text{for all}\quad t\geq 0. \tag{5.25}$$

ここで，$g(t)/2=s$ と置く．関数 $g(t)$ は単調増加だから，$\lim_{t\to 0+}g(t)/2$ が存在するので，その値を s_0 と置く．即ち，$s_0=\lim_{t\to 0+}g(t)/2$.

(i) $s_0=0$ のとき，もし $g(t)/2=s>0$ ならば，(5.25) より $\varphi^{-1}(s)\leq 2t$. また，$g^{-1}(2s)=g^{-1}(g(t))\geq t$. よって，$\varphi^{-1}(s)\leq 2g^{-1}(2s)$ となる．

また，(5.22) の第 1 の不等式と Φ が Young function である性質 (2.4) より

$$g(t)\geq \frac{\Phi\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}}\to +\infty$$

だから，s の値はすべての正の値を取りうる．また，φ^{-1} と g^{-1} は共に右連続だから

$$\varphi^{-1}(0)=\lim_{s\to 0+}\varphi^{-1}(s)\leq \lim_{s\to 0+}2g^{-1}(2s)=2g^{-1}(0).$$

よって，$\varphi^{-1}(s)\leq 2g^{-1}(2s)$ がすべての $s\geq 0$ で成立する．

(ii) $s_0>0$ のとき．$g(t)/2=s>s_0$ ならば (5.25) より $\varphi^{-1}(s)\leq 2t$. また，$g^{-1}(2s)=g^{-1}(g(t))\geq t$. よって $\varphi^{-1}(s)\leq 2g^{-1}(2s)$ となることがわかった．又，$g(t)\to\infty$ であったから，$s>s_0$ なるすべての s に対して $\varphi^{-1}(s)\leq 2g^{-1}(2s)$ が成立する．

次に，$0\leq s\leq s_0$ のとき，(5.25) で $t\to 0+$ とすると，$g(t)$ の連続性と，φ^{-1} の右連続性より，

$$0\geq \frac{g(0)}{2}\cdot\varphi^{-1}\left(\frac{g(0)}{2}\right)=\frac{g(0)}{2}\cdot\varphi^{-1}(s_0)\geq 0.$$

$g(0)=2s_0>0$ だから $\varphi^{-1}(s_0)=0$. よって，$leqs\leq s_0$ のとき $\varphi^{-1}(s)=0$. よって $\varphi^{-1}(s)\leq 2g^{-1}(2s)$ が成立する．以上によりすべての $s>0$ に対して (5.24) が成立することがわかった． □

Lemma 5.16. 関数 Φ をひとつの *Young function* とし，Φ の *complementary Young function* を $\widetilde{\Phi}$ とする．今，$\widetilde{\Phi} \in \Delta'$ と仮定する．即ち，ある正の数 $C > 0$ が存在して，次の不等式

$$\widetilde{\Phi}(st) \leq C\widetilde{\Phi}(s)\widetilde{\Phi}(t) \quad \textit{for all} \quad s, t \geq 0\,.$$

が成立するならば，

$$\frac{1}{w(Q)}\int_Q \widetilde{\Phi}(|u(x)|)w(x)dx \leq C\widetilde{\Phi}(\|u\|_{\widetilde{\Phi},w,Q}) \quad \textit{for all} \quad u \tag{5.26}$$

が成り立つ．

Remark. この Lemma では Φ が Δ_2 条件を満たすことを仮定していない．よって，$\varphi(t) = 0$ in a n.b.d of zero でもよい．

Proof. $\|u\|_{\widetilde{\Phi},w,Q} = 0$ なら，Q 上で $u = 0$ なので，$\widetilde{\Phi}(0) = 0$ より (5.26) は自明なので，我々は，$0 < \|u\|_{\widetilde{\Phi},w,Q} < +\infty$ として示す．$\widetilde{\Phi} \in \Delta'$ だから，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{w(Q)}\int_Q \widetilde{\Phi}(|u(x)|)w(x)dx \\
&= \frac{1}{w(Q)}\int_Q \widetilde{\Phi}\left(\|u\|_{\widetilde{\Phi},w,Q} \cdot \frac{|u(x)|}{\|u\|_{\widetilde{\Phi},w,Q}}\right)w(x)dx \\
&\leq \frac{1}{w(Q)}\int_Q C \cdot \widetilde{\Phi}(\|u\|_{\widetilde{\Phi},w,Q})\widetilde{\Phi}\left(\frac{|u(x)|}{\|u\|_{\widetilde{\Phi},w,Q}}\right)w(x)dx \\
&= C \cdot \widetilde{\Phi}(\|u\|_{\widetilde{\Phi},w,Q})\int_Q \widetilde{\Phi}\left(\frac{|u(x)|}{\|u\|_{\widetilde{\Phi},w,Q}}\right)\frac{w(x)}{w(Q)}dx \\
&= C \cdot \widetilde{\Phi}(\|u\|_{\widetilde{\Phi},w,Q}) \cdot 1 = C \cdot \widetilde{\Phi}(\|u\|_{\widetilde{\Phi},w,Q})\,.
\end{aligned}$$

となり，(5.26) が示された． □

Lemma 5.17. 関数 Φ をひとつの *Young function* として，Φ の *complementary Young function* を $\widetilde{\Phi}$ とする．今，$\widetilde{\Phi} \in \Delta'$ と仮定する．もし，$w \in B_\Phi$ ならば，ある十分小さな $\varepsilon_1 > 0$ を選んで，

$$\frac{\varepsilon_1}{|Q|}\int_Q \varphi^{-1}\left(\frac{1}{w(x)}\right)dx \leq \varphi^{-1}\left(\left\|\frac{1}{w}\right\|_{\widetilde{\Phi},w,Q}\right) \quad \textit{for every cube} \quad Q \subseteq R^n \tag{5.27}$$

ここで，定数 ε_1 は $\varepsilon_1 = 1/(CC_1H)$ でとれる．$C > 0$ は (5.18) の中の定数であり，$C_1 = C\widetilde{\Phi}(2)$, H は (5.24) の右辺の定数を意味する．

Proof. (注意) 証明を始める前に，一つの注意を与えておく．上の Lemma では，関数 Φ の Δ_2 条件は仮定されていない．また，$\varphi(t)$ は $t = 0$ の近傍で恒等的に zero でもよい．更に，$\varphi(t)$ の $[0, \infty)$ での連続性も仮定しない．

さて，Lemma の証明をしよう．Q を任意の cube とする．仮定より，$\widetilde{\Phi} \in \Delta'$ であるから次の不等式が成立する．

$$s\varphi^{-1}(s) \leq \int_s^{2s} \varphi^{-1}(u)du \leq \widetilde{\Phi}(2s) \leq C\widetilde{\Phi}(2)\widetilde{\Phi}(s),$$

ここで，定数 C は (5.18) の不等式の中に現れる定数である．次に，$C_1 = C\widetilde{\Phi}(2)$ と置くとき次の不等式が成立する．

$$\varphi^{-1}(s) \leq \frac{C_1\widetilde{\Phi}(s)}{s} \quad \text{for all} \quad s > 0\,. \tag{5.28}$$

ここで一つ注意を与えておく．$\widetilde{\Phi} \in \Delta'$ だからとくに $\widetilde{\Phi} \in \Delta_2$ となる．よって，$\widetilde{\Phi}$ は $t = 0$ の近傍で恒等的にゼロになることはない．よって，$\widetilde{\Phi}(2) > 0$. よって $C_1 > 0$ ととれる．よって，(5.28) より次の不等式が得られる．

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|}\int_Q \varphi^{-1}\left(\frac{1}{w(x)}\right)dx &\leq \frac{1}{|Q|}\int_Q C_1\frac{\widetilde{\Phi}\left(\frac{1}{w(x)}\right)}{\frac{1}{w(x)}}dx \\ &= \frac{C_1}{|Q|}\int_Q \widetilde{\Phi}\left(\frac{1}{w(x)}\right)w(x)dx\,.\end{aligned}$$

よって，Lemma 5.15 より次の不等式が得られる．

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|}\int_Q \varphi^{-1}\left(\frac{1}{w(x)}\right)dx &\leq \frac{C_1}{|Q|}\int_Q \widetilde{\Phi}\left(\frac{1}{w(x)}\right)w(x)dx \\ &= C_1\cdot\frac{w(Q)}{|Q|}\cdot\frac{1}{w(Q)}\int_Q \widetilde{\Phi}\left(\frac{1}{w(x)}\right)w(x)dx \\ &\leq C_1\cdot\frac{w(Q)}{|Q|}\cdot C\cdot\widetilde{\Phi}\left(\left\|\frac{1}{w}\right\|_{\widetilde{\Phi},w,Q}\right) \\ &\leq CC_1\cdot\frac{w(Q)}{|Q|}\cdot\left\|\frac{1}{w}\right\|_{\widetilde{\Phi},w,Q}\cdot\varphi^{-1}\left(\left\|\frac{1}{w}\right\|_{\widetilde{\Phi},w,Q}\right)\,.\end{aligned}$$

仮定より，$w \in B_\Phi$ だから Theorem 5.4 より (5.9) の不等式が成立するので，ある正数 $H > 0$ が存在して，

$$\frac{w(Q)}{|Q|}\cdot\left\|\frac{1}{w}\right\|_{\widetilde{\Phi},w,Q} \leq H \quad \text{for all cubes} \quad Q \subseteq R^n\,.$$

よって，次の不等式が得られた．

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \varphi^{-1}\left(\frac{1}{w(x)}\right)dx \leq CC_1H\varphi^{-1}\left(\left\|\frac{1}{w}\right\|_{\widetilde{\Phi},w,Q}\right)\,.$$

両辺を CC_1H で割って，$\varepsilon_1 = 1/CC_1H$ と置けば，証明すべき不等式 (5.27) が得られる． □

Theorem 5.18. 関数 $\Phi(t)$ をひとつの *Young function* とする．$\widetilde{\Phi} \in \Delta'$ と仮定する．このとき，$B_\Phi \subseteq A_\Phi^c$ が成立する．

Proof. (注意) この定理でも，$\Phi \in \Delta_2$ は仮定しない．更に，$\varphi(t) > 0$ $(t > 0)$ も仮定しない．$\varphi(t)$ の $[0, \infty)$ での連続性も仮定しない．

さて，$w \in B_\Phi$ とする．このとき Lemma 5.17 より，すべての cube $Q \subseteq R^n$ に対して次の不等式が成立する．

$$\frac{1}{CC_1H} \cdot \frac{1}{|Q|} \int_Q \varphi^{-1}\left(\frac{1}{w(x)}\right) dx \le \varphi^{-1}\left(\left\|\frac{1}{w}\right\|_{\tilde{\Phi},w,Q}\right) .$$

$s \ge 0$ を任意に与える．Lemma 5.13 の中の関数 $g(t)$ を考える．このとき，(5.23) と (5.24) より，

$$\varphi\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}\varphi^{-1}(s)\right) \le \varphi\left(\frac{1}{4} \cdot g^{-1}(2s)\right) \le 2 \cdot g(g^{-1}(2s)). \tag{5.29}$$

また，仮定より $\tilde{\Phi} \in \Delta'$ だから，Lemma 5.12 より，$\varphi^{-1} \in \Delta^{-1}$ となる．よって，Lemma 5.10 より $\varphi^{-1} \in \Delta_2$ となる．よって $\varphi^{-1}(t)$ は $t = 0$ の近傍で恒等的にゼロにならない．よって，$t \to 0$ のとき $\varphi(t) \to 0$ となる．よって Lemma 5.14 より $\lim_{t \to +0} g(t) = 0$ となる．更に，$g(t)$ が $[0, \infty)$ で連続だから，

$$g(g^{-1}(2s)) = 2s \quad \text{for every} \quad s \ge 0 . \tag{5.30}$$

よって，(5.29) と (5.30) より，

$$\varphi\left(\frac{1}{8}\varphi^{-1}(s)\right) \le 4s \quad \text{for every} \quad s \ge 0 . \tag{5.31}$$

よって，(5.31) より

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{CC_1H} \cdot \frac{1}{|Q|} \int_Q \varphi^{-1}\left(\frac{1}{w(x)}\right) dx\right) &\le \varphi\left(\frac{1}{8}\varphi^{-1}\left(\left\|\frac{1}{w}\right\|_{\tilde{\Phi},w,Q}\right)\right) \\ &\le 4\left\|\frac{1}{w}\right\|_{\tilde{\Phi},w,Q} .\end{aligned} \tag{5.32}$$

よって，(5.32) 及び，$w \in B_\Phi$ であることと，定数 H の定め方より，

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)dx\right)\varphi\left(\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{CC_1H} \cdot \frac{1}{|Q|} \int_Q \varphi^{-1}\left(\frac{1}{w(x)}\right) dx\right) \\ &\qquad \le \frac{w(Q)}{|Q|} \cdot 4 \cdot \left\|\frac{1}{w}\right\|_{\tilde{\Phi},w,Q} \le 4H .\end{aligned}$$

よって，すべての cube $Q \subseteq R^n$ について

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)dx\right)\varphi\left(\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{CC_1H} \cdot \frac{1}{|Q|} \int_Q \varphi^{-1}\left(\frac{1}{w(x)}\right) dx\right) \le 4H$$

となり，(5.9) が $\varepsilon = 1$ の場合に成立することがわかった．

次に，一般の $\varepsilon > 0$ の場合を考える．今までの議論の中で $w(x)$ の変わりに $\varepsilon w(x)$ を考える．Q を任意の cube とする．Lemma 5.17 の証明と同様にして (5.28) より次の不等

式が成立する.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|}\int_Q \varphi^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon w(x)}\right)dx &\le \frac{C_1}{|Q|}\int_Q \widetilde{\Phi}\left(\frac{1}{\varepsilon w(x)}\right)\varepsilon w(x)dx \\
&= C_1\cdot\frac{\varepsilon w(Q)}{|Q|}\cdot\frac{1}{\varepsilon w(Q)}\int_Q \widetilde{\Phi}\left(\frac{1}{\varepsilon w(x)}\right)\varepsilon w(x)dx \\
&\le C_1\cdot\frac{\varepsilon w(Q)}{|Q|}\cdot C\cdot\widetilde{\Phi}\left(\left\|\frac{1}{\varepsilon w}\right\|_{\widetilde{\Phi},\varepsilon w,Q}\right) \\
&= CC_1\cdot\frac{\varepsilon w(Q)}{|Q|}\cdot\widetilde{\Phi}\left(\left\|\frac{1}{\varepsilon w}\right\|_{\widetilde{\Phi},\varepsilon w,Q}\right).
\end{aligned}
$$

ここで，一般的に，ノルム $\|\cdot\|_{\widetilde{\Phi},w,Q}$ の定義より，

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{\widetilde{\Phi},\varepsilon w,Q} &= \inf\{\lambda>0:\frac{1}{\varepsilon w(Q)}\int_Q \widetilde{\Phi}\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)\varepsilon w(x)dx\le 1\} \\
&= \inf\{\lambda>0:\frac{1}{w(Q)}\int_Q \widetilde{\Phi}\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)w(x)dx\le 1\} \\
&= \|f\|_{\widetilde{\Phi},w,Q}.
\end{aligned}
$$

よって，次の不等式を得る.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|}\int_Q \varphi^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon w(x)}\right)dx &\le CC_1\cdot\frac{\varepsilon w(Q)}{|Q|}\cdot\widetilde{\Phi}\left(\left\|\frac{1}{\varepsilon w}\right\|_{\widetilde{\Phi},\varepsilon w,Q}\right) \\
&= CC_1\cdot\frac{\varepsilon w(Q)}{|Q|}\cdot\widetilde{\Phi}\left(\left\|\frac{1}{\varepsilon w}\right\|_{\widetilde{\Phi},w,Q}\right) \\
&\le CC_1\cdot\frac{\varepsilon w(Q)}{|Q|}\cdot\left\|\frac{1}{\varepsilon w}\right\|_{\widetilde{\Phi},w,Q}\cdot\varphi^{-1}\left(\left\|\frac{1}{\varepsilon w}\right\|_{\widetilde{\Phi},w,Q}\right) \\
&= CC_1\cdot\frac{w(Q)}{|Q|}\cdot\left\|\frac{1}{w}\right\|_{\widetilde{\Phi},w,Q}\cdot\varphi^{-1}\left(\left\|\frac{1}{\varepsilon w}\right\|_{\widetilde{\Phi},w,Q}\right).
\end{aligned}
$$

また，仮定より，$w\in B_\Phi$ だから，Theorem 5.8 より，(5.9) の不等式が成立するので，ある正の定数 $H>0$ が存在して

$$
\frac{w(Q)}{|Q|}\cdot\left\|\frac{1}{w}\right\|_{\widetilde{\Phi},w,Q}\le H \quad \text{for all cubes} \quad Q\subseteq R^n .
$$

ここで，H は $\widetilde{\Phi},w$ に依存するが，Q や $\varepsilon>0$ に依存しない．よって，次の不等式が得られる.

$$
\frac{1}{|Q|}\int_Q \varphi^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon w(x)}\right)dx\le CC_1H\varphi^{-1}\left(\left\|\frac{1}{\varepsilon w}\right\|_{\widetilde{\Phi},w,Q}\right) \quad \text{for all cubes} \quad Q\subseteq R^n .
$$

よって，次の結果が成立する．

$$\frac{1}{CC_1H}\cdot\frac{1}{|Q|}\int_Q \varphi^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon w(x)}\right)dx \le \varphi^{-1}\left(\left\|\frac{1}{\varepsilon w}\right\|_{\widetilde{\Phi},w,Q}\right) \quad \text{for all cubes} \quad Q\subseteq R^n .$$

さて，$s\ge 0$ を任意に与える．Lemma 5.13 の中の関数 $g(t)$ を選ぶ．このとき，(5.23) と (5.24) より

$$\varphi\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\varphi^{-1}(s)\right)\le\varphi\left(\frac{1}{4}\cdot g^{-1}(2s)\right)\le 2\cdot g(g^{-1}(2s)) \tag{5.33}$$

が得られる．また，仮定より $\widetilde{\Phi}\in\Delta'$ だから，Lemma 5.12 より $\varphi^{-1}\in\Delta^{-1}$．よって，Lemma 5.10 より $\widetilde{\Phi}\in\Delta_2$ となる。よって，$\varphi^{-1}(t)$ は $t=0$ の近傍で恒等的にゼロになることはない。よって，$\lim_{t\to 0+}\varphi(t)=0$ となることがわかる。よって，Lemma 5.14 より，$\lim_{t\to 0+}g(t)=0$ となる。更に，$g(t)$ が $[0,\infty)$ で連続だから，

$$g(g^{-1}(2s))=2s \quad \text{for every} \quad s\ge 0 . \tag{5.34}$$

よって，(5.33) と (5.34) より

$$\varphi\left(\frac{1}{8}\varphi^{-1}(s)\right) \quad \text{for every} \quad s\ge 0 . \tag{5.35}$$

となる．よって，(5.35) より次の結果が得られる。

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{CC_1H}\cdot\frac{1}{|Q|}\int_Q\varphi^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon w(x)}\right)dx\right) &\le \varphi\left(\frac{1}{8}\cdot\varphi^{-1}\left(\left\|\frac{1}{\varepsilon w}\right\|_{\widetilde{\Phi},w,Q}\right)\right)\\ &\le 4\cdot\left\|\frac{1}{\varepsilon w}\right\|_{\widetilde{\Phi},w,Q}\\ &\le \frac{4}{\varepsilon}\cdot\left\|\frac{1}{w}\right\|_{\widetilde{\Phi},w,Q} .\end{aligned} \tag{5.36}$$

よって，$w\in B_\Phi$ だから，

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\varepsilon w(x)dx\right)\varphi\left(\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{CC_1H}\cdot\frac{1}{|Q|}\int_Q\varphi^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon w(x)}\right)dx\right)\\ &\le \frac{1}{|Q|}\cdot\varepsilon w(Q)\cdot\frac{4}{\varepsilon}\cdot\left\|\frac{1}{w}\right\|_{\widetilde{\Phi},w,Q}\\ &= \frac{4\cdot w(Q)}{|Q|}\left\|\frac{1}{w}\right\|_{\widetilde{\Phi},w,Q}\le 4H .\end{aligned}$$

よって，

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\varepsilon w(x)dx\right)\varphi\left(\frac{1}{8CC_1H}\cdot\frac{1}{|Q|}\int_Q\varphi^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon w(x)}\right)dx\right)\le 4H$$

がすべての cubes Q と $\varepsilon>0$ について成立する．ここで，定数 $1/8CC_1H$ と $4H$ は $\varepsilon>0$ に無関係な定数であることを注意しておく．よって $w\in A_\Phi^\varepsilon$ が示された． □

この節の最後に興味深い結果を一つ与える.

Definition 5.9. 関数 $w(x)$ が R^n 上のの A_1-weight ($w \in A_1$) であるとは，ある正の定数 C が存在して，

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)dy \leq C \operatorname*{ess\,inf}_{x\in Q} w(x) \quad \text{for all cubes} \quad Q \subseteq R^n$$

が成立するときと定める.

また，関数 $a(s)$, $b(s)$ は $[0,\infty)$ 上で定義された positive continuous function で次の条件を満たすものとする.

$$a(s) > 0, \quad b(s) > 0 \quad \text{if} \quad s > 0 \quad \text{and} \quad a(0) = b(0) = 0; \tag{5.37}$$

$$\int_0^1 \frac{a(s)}{s}ds < +\infty, \quad \int_1^\infty a(s)ds = +\infty; \tag{5.38}$$

$$b(s) \text{ は } nondecreasing \text{ で } \quad \lim_{s\to\infty} b(s) = +\infty \ . \tag{5.39}$$

関数 $\Phi(t)$ と $\Psi(t)$ を次のように置く.

$$\Phi(t) := \int_0^t a(s)ds, \quad \Psi(t) := \int_0^t b(s)ds \quad \text{for} \quad t \geq 0. \tag{5.40}$$

次の不等式を考える.

$$\int_0^t \frac{a(s)}{s}ds \leq C_1 b(C_2 t) \quad \text{for all} \quad t > 0\,, \tag{5.41}$$

$$\int_{R^n} \Phi(Mf(x))w(x)dx \leq C_3 \int_{R^n} \Psi(C_4|f(x)|)w(x)dx \quad \text{for all} \quad f \in L^\Psi_w(R^n)\ . \tag{5.42}$$

我々は次の結果を得る.

Theorem 5.19. 上の性質 (5.37) から (5.42) を満足するすべての関数 $a(s)$, $b(s)$, $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ に対して，(5.41) ならば (5.42) が成立するための必要十分条件は，$w \in A_1$ となることである.

最後の定理の証明の中では，B_Φ weight の概念が重要な役割を果たす．詳しくは [Ki] を参考にしてほしい.

REFERENCES

[An1] T. Andô, *On some properties of convex function*, BullÀcadPolonSciSérmath'**8** 1960, 413–418.

[An2] T. Andô, *Linear functionals on Orlicz spaces*, Nieuw ArchWisk'**8** (1960), 1–6.

[An3] T. Andô, *Certain classes of convex functions*, Soviet Math'**2** (1961), 139–142.

[Ba] R. J. Bagby, *Weak bounds for the maximal function in weighted Orlicz spaces,* Studia Math. **95** (1990), 195–204.

[BO] Z. W. Birnbaum and W. Orlicz, *Über die Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander konjugierten Potenzen,* Studia Math. **3** (1931), 1–67.

[Ca] L. Carleson, *On convergence and growth of partial sums of Fourier series,* Acta Math˙**116** (1966) 135–157.

[FS] C. Fefferman and E. M. Stein, *Some maximal inequalities,* Amer. J. Math. **93** (1971), 107–115.

[Fi] A. Fiorenza, *On certain inequalities in weighted Orlicz spaces,* Rendiconti di Mathematica, Serie VII **13**, Roma(1993), 421–430.

[Po] Ch. J. de la Vallée Poussin, *Sur l'integrale de Lebesgue,* Trans. Amer. Math. Soc. **16** (1915), 435–501.

[Cu] García-Cuerva and J. Rubio de Francia, *Weighted norm inequalities and related topics,* North Holland (Amsterdam, 1985).

[Ga] I. Genebashvili, A. Gogatishvili, V. Kokilashvili and M. Krbec, *Weight theory for integral transforms on spaces of homogeneous type*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Math. **92**, Longman, (England, 1998).

[Hu] R. Hunt, *On the convergence of Fourier series,* in: ProcĊonfȧt Southern Illinois Univ(1967) 235–255.

[KaT] M. Kato and Y. Takahashi, *On the von Neumann-Jordan constant for Banach spaces,* Proc. Amer. Soc., **125** 1997, 1055-1062.

[KT] R. A. Kerman and A. Torchinsky, *Integral inequalities with weights for the Hardy maximal function*, Studia Math. **71** (1981/82), 277–284.

[Ki] H. Kita, *Weighted inequalities for iterated maximal functions in Orlicz spaces,* Math. Nachr., (2004) to appear.

[Ki1] H. Kita, *On interpolation of the Fourier maximal operator in Orlicz spaces,* Acta Math. Hungar. **81(3)** (1998), to appear.

[Ki2] H. kita, *Integrability properties of the maximal operator on partial sums of Fourier series in Orlicz Spaces,* Math. Nachr. **193** (1998), 57–74.

[Ki3] H. kita, *On maximal operator of partial sums of Fourier series in Orlicz spaces,* Acta Math. Hungar. **77(1-2)** (1997), 1–13.

[Ki4] H. Kita, *On Hardy-Littlewood maximal functions in Orlicz spaces,* Math. Nachr. bf 183 (1997), 135–155.

[Ki5] H. Kita, *On maximal functions in Orlicz spaces,* Proc. Amer. Math. Soc. **124(10)** (1996), 3019–3025.

[Ki6] H. Kita, *Inequalities with weights for maximal functions in Orlicz spaces*, Acta Math. Hungar. **72** (1996) , 291–305.

[Ki7] H. Kita, *On a converse inequality for maximal functions in Orlicz spaces*, Studia Mathematica **118** (1996), 1–10.

[Ki8] H. Kita, *On an interpolation theorem of Hunt-Sjölin*, Acta Math. Hungar. **67** (1995), 97–107.

[KY1] H. Kita and K. Yoneda *On quasi $\varphi(L)^*$-a.e. convergence of Fourier series of functions in Orlicz spaces*, Acta Math. Hungar. **65** (1995), 339–360.

[KY2] H. Kita K. Yoneda *Orlicz space L^*_φ and some inclusion relations*, Math. Japon. **37** (1992), 1189–1199.

[KY3] H. Kita and K. Yoneda *A treatment of Orlicz spaces as a ranked space*, Math. Japon. **37** (1992), 775-802.

[Ki9] H. Kita, *Convergence of Fourier series of a function on generalized Wiener's class $BV(p(n)\uparrow\infty)$*, 1991, Acta Math. Hungar. **57** (1991), 233-243.

[Ki10] H. Kita, *On control functions of a.e. convergence of the Fourier series of bounded functions*, Math. Japon. **36** (1991), 649–655.

[KY4] H. Kita and K. Yoneda, *A generalization of bounded variation*, Acta Math. Hungar. **56** (1990), 229–238.

[KY5] H. Kita, T. Miyamoto and K. Yoneda, *Modular function spaces and control functions of almost everywhere convergence*, Commentationes Mathematicae (Poznan). **41** (2001) 99– 133.

[Ki11] H. Kita, *On the constant of Hunt's L^p-estimate and control functions*, Math. Japon. **35** (1990), 283–288.

[KK] V. Kokilashvili and M. Krbec, *Weighted inequalities in Lorentz and Orlicz spaces*, World Scientific, (1991).

[KR] M. A. Krasnosel'skii and Ya. B. Rutickii, *Convex Functions and Orlicz Spaces* (English translation), Noordhoff LtdGroningen (1961).

[Muc] B. Muckenhoupt, *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function*, Trans. Amer. Math. Soc. **165** (1972), 207–226.

[Na] H. Nakano, *Modulared Semi-ordered Linear Spaces*, Maruzen Tokyou (1950).

[Or1] W. Orlicz, *Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B*, Bullint'lde l'AcadPolsérie A **8** (1932), 207–220.

[Or2] W. Orlicz, *Über Räume (L^M)*, Bullint'lde l'AcadPolsérie A **10** (1936), 93-107.

[Or3] W. Orlicz, *Some classes of modular spaces*, Studia Math **26** (1966) 165–192.

[RR] M.M. Rao and Z.D. Ren *Theory of Orlicz Spaces*, Marcel Dekker 1991.

[RR2] M.M. Rao and Z.D. Ren *Applications of Orlicz Spaces*, Marcel Dekker 2002.

[Sj] P. Sjölin, *Two theorems on Fourier integrals and Fourier series*, Uppsala University Report **3** 1986.

[So] F. Soria, *Integrability properties of the maximal operator on partial sums of Fourier series*, Sem. Universidad Autónoma de Madrid, (1986).

[Zyg] A. Zygmund, *Trigonometric series*, Cambridge Univ. Press, (Cambridge, 1959).

Department of Mathematics, Faculty of Education,
Kagoshima University, 20-6 Korimoto 1-chome Kagoshima 890-0065, Japan
E-mail address: hkita@edu.kagoshima-u.ac.jp