

反円分拡大の岩澤理論と一般 Heegner サイクル

(Anticyclotomic Iwasawa theory and generalized Heegner cycles)

By

小林 真一 (SHINICHI KOBAYASHI)*

Abstract

In this survey article, we explain a background and recent developments on Iwasawa theory for generalized Heegner cycles in the anticyclotomic extension.

§ 1. はじめに

本稿では近年活発に研究されている一般 Heegner サイクルに関する反円分拡大の岩澤理論を概説する。概説にあたり多くの方に興味を持っていただけるように、反円分拡大の岩澤理論の歴史や背景、動機から始め、その後一般 Heegner サイクルの最近の研究について触れ、最後に筆者の仕事について解説する。内容的には筆者がこの集会で行った講演を概説記事としてまとめ直したものである。

一般 Heegner サイクルは Bertolini-Darmon-Prasanna [3] によって定義された。その後 Darmon を中心とするグループは、Diagonal サイクルの研究を始め (同変)BSD 予想に新しい成果をもたらした (cf. [8])。さらに Beilinson-Flach 元の Euler 系も見つかって岩澤理論は新たな局面を迎えた。これら一連の仕事のアイデアや手法は [3] の中にそのプロトタイプを見出すことができる。このような意味で一般 Heegner サイクルの岩澤理論を理解することは、単にそれだけに止まらず、最新の研究の理解のための近道のように思われる。本稿が少しでもお役に立てば幸いである。

§ 2. Mazur 予想

まずは反円分拡大の岩澤理論の歴史を遡って Mazur 予想から始めたい。

Received April 26, 2017. Revised July 12, 2019.

2010 Mathematics Subject Classification(s): 11G05 · 11G40 · 11G50 · 14L05 · 11E95

Key Words: 岩澤理論, 反円分拡大, *Heegner cycle*.

本研究は科研費 (若手 (A)25707001) の助成を受けたものである。

*Kyushu University, 744, Motooka, Nishi-ku, Fukuoka, 819-0395, Japan.

e-mail: kobayashi@math.kyushu-u.ac.jp

K を (有限次) 代数体とし, E を K 上定義された楕円曲線とする. このとき Mordell-Weil の定理によれば $E(K)$ は有限生成アーベル群になる. ただし $E(K)$ の自由階数 $r_E(K)$ を具体的に決定することは難しく, Birch and Swinnerton-Dyer 予想 (BSD 予想) の困難さの原因となっている. 岩澤理論の哲学に基づけば, 代数体 K 上の対象を調べるためには, 基礎体 K を $\mathbb{Z}_p$ -拡大して, 調べたい対象を族として研究することが有用である. 楕円曲線の岩澤理論も, K の $\mathbb{Z}_p$ -拡大 K_∞ の中間体 K_n ($n = 1, 2, \dots$) に対して, 階数 $r_E(K_n)$ の挙動を調べることから始まったといってもよい. まずは B. Mazur による 1983 年の ICM 講演の中で述べられた定理について簡単に思い出したい. (より正確な記述は原論文をみてほしい. 証明は Mazur のコントロール定理を使う.)

Theorem 1. E を代数体 K 上定義された楕円曲線で, 素数 p 上の任意の素点で良通常還元をもつものとする. K_∞/K を $\mathbb{Z}_p$ -拡大で, E の悪い素点においてマイルドな条件を満たすものとする. このときある整数 a, e があって, 十分大きな n に対して,

$$r_E(K_n) = ap^n + e.$$

上の階数の増大度 “ a ” は E, K_∞, p の取り方に依存するが, 依存の度合いは正確に記述できると思われる. つまり Mordell-Weil 階数は, 族としては組織的に振る舞うことが期待される. 増大度 a に関して実際に証明されていることをいくつか思い出す.

まず $K = \mathbb{Q}$ で, K_∞ が円分拡大のときは, $a = 0$ である (Kato-Rohrlich). とくに $E(K_\infty)$ も有限生成アーベル群である. これは加藤の Euler 系を必要とする非常に深い結果である. また非通常素点においても同じことが成り立つ.

次に K を虚二次体とする. このとき K のすべての $\mathbb{Z}_p$ -拡大の合併は $\mathbb{Z}_p^2$ -拡大となり, とくに K の $\mathbb{Z}_p$ -拡大は無限個存在する. ただし特徴的な $\mathbb{Z}_p$ -拡大が 2 つあり, ひとつは円分 $\mathbb{Z}_p$ -拡大で, もう一つが反円分 (anticyclotomic) 拡大 K_∞^{ac}/K である. 反円分拡大は, $\mathbb{Q}$ 上ガロワで $\text{Gal}(K_\infty^{ac}/\mathbb{Q})$ が二面体群となる唯一の $\mathbb{Z}_p$ -拡大として特徴づけられる. また p -ベキ導手をもつ K の環類体の合併に含まれる唯一の $\mathbb{Z}_p$ -拡大でもある. このとき, Mazur は同じ ICM 講演の中で次を予想した.

Conjecture 2 (Mazur). E を $\mathbb{Q}$ 上定義された楕円曲線で, 素数 p で良通常還元をもつものとする. K を虚二次体とし, $w_{E/K} = \pm 1$ を E/K のルートナンバー (関数等式の符号) とする. このとき増大度 a は次で与えられる.

$$a = \begin{cases} 0 & (w_{E/K} = 1 \text{ または } K_\infty \neq K_\infty^{ac}) \\ 1 & (w_{E/K} = -1 \text{ かつ } K_\infty = K_\infty^{ac} \text{ かつ一般型}) \\ 2 & (w_{E/K} = -1 \text{ かつ } K_\infty = K_\infty^{ac} \text{ かつ特殊型}) \end{cases}$$

ここで E/K は虚数乗法を基礎体と同じ体 K でもつとき特殊型といわれ, 特殊型でないとき一般型といわれる. 現在ではこの予想は, Greenberg, Rohrlich, Rubin (特殊型), Cornut, Vatsal (一般型) らの仕事によって証明されている. 証明には Heegner 点を用い

る. ただし Hilbert 類体 (導手 1 の環類体) 上定義される一つの Heegner 点だけでなく, 任意の導手の環類体上に Heegner 点がシステムとして存在し, システムとしては非自明であることが鍵となる. 特殊型のときは, K_n 上の Mordell-Weil 群には CM 作用により K が作用するので, アーベル群としての階数は偶数になることを注意しておく.

§ 3. Perrin-Riou 予想

このような現象を背景として, B. Perrin-Riou は 1980 年代後半に Heegner 点の岩澤理論を定式化した. 以下, 本稿の終わりまで, K を虚二次体, K_∞ は K の反円分拡大とする.

E を $\mathbb{Q}$ 上定義された楕円曲線で, E の導手 N を割る有理素数は K で分解すると仮定する. これは所謂 Heegner 条件で, E/K の Hasse-Weil L -関数の符号が常に -1 になることを保証する極めて重要なものである. また Heegner 条件下では, Heegner 点を構成できる (レベル構造が自然に定義される).

ここで Heegner 点の構成を簡単に復習しておく. Heegner 条件より $\mathcal{O}_K/\mathfrak{N} \cong \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ となるイデアル $\mathfrak{N}$ が取れる. N と互いに素な自然数 c に対し $\mathcal{O}_c = \mathbb{Z} + c\mathcal{O}_K$ とおく. このとき $\mathfrak{N}_c := \mathfrak{N} \cap \mathcal{O}_c$ は $\mathcal{O}_c$ の可逆イデアルとなり, 楕円曲線と $\Gamma_0(N)$ -レベル構造の組 $(\mathbb{C}/\mathcal{O}_c, \mathfrak{N}_c^{-1}/\mathcal{O}_c)$ は, モジュラー曲線 $X_0(N)$ の点 z_c を定める. 虚数乗法論により z_c は K の導手 c の環類体 H_c 上定義されていることがわかる. z_c や, z_c を modular parametrization $X_0(N) \rightarrow E$ により E に送ってできる点 $z_{c,E} \in E(H_c)$ のことを, 導手 c の Heegner 点という. $\mathfrak{N}$ の取り方に曖昧さがあるが, この曖昧さは Atkin-Lehner 対によって制御できるので, あまり気にしなくてよい. また $\mathcal{O}_c$ の可逆イデアル $\mathfrak{a}$ を取り, $\mathbb{C}/\mathcal{O}_c$ の代わりに, $\mathbb{C}/\mathfrak{a}$ を考えることも可能だが, こちらもガロワ作用 $\text{Gal}(H_c/K)$ によって z_c と関連づけられるので本質的な違いはない.

素数 p に対し E/K_∞ の (離散) p -Selmer 群を $\varprojlim_n \text{Sel}(K_n, E[p^\infty])$ で定義し, その Pontryagin 双対を $\mathcal{X}_\infty$ とおく. また $\mathcal{S}_\infty$ を E のコンパクト p -Selmer 群のノルムに関する射影系とする. すなわち $\mathcal{S}_\infty = \varprojlim_n \text{Sel}(K_n, T_p E)$ とおく. $\mathcal{S}_\infty$ は Kummer 写像により $\varprojlim_n E(K_n) \otimes \mathbb{Z}_p$ を自然に含んでおり, Tate-Shafarevich 群の有限性を認めるなら, $\mathcal{S}_\infty = \varprojlim_n E(K_n) \otimes \mathbb{Z}_p$ である. また $\Lambda := \mathbb{Z}_p[[\text{Gal}(K_\infty/K)]]$ とおくと, $\mathcal{S}_\infty$ には Λ が自然に作用する. ここで E が p で良通常還元を持つと仮定すると, p -ベキ導手の Heegner 点からなる norm compatible system, つまり $\varprojlim_n E(K_n) \otimes \mathbb{Z}_p \subset \mathcal{S}_\infty$ の元を構成することができる. この元で生成される Λ -加群を $\mathcal{H}_\infty \subset \mathcal{S}_\infty$ とおく. Cornut-Vatsal によれば $\mathcal{H}_\infty$ は自由階数 1 となる.

Conjecture 3 (Perrin-Riou [25]). E は p で良通常還元をもち, p は K で分解すると仮定する. このとき

i) $\mathcal{S}_\infty$ はねじれない自由階数 1 の Λ -加群.

- ii) ある有限生成 Λ -ねじれ加群 $\mathcal{M}$ に対し, $\mathcal{X}_\infty \sim \Lambda \oplus \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}$ (擬同型) .
- iii) (岩澤主予想) $\text{Char}(\mathcal{M}) = \text{Char}(\mathcal{S}_\infty/\mathcal{H}_\infty)$. (ここで Λ -ねじれ加群 $\mathcal{X}$ に対して $\text{Char}(\mathcal{X})$ で $\mathcal{X}$ の特性イデアルを表す.)

この予想の意味を少し説明する. 導手 1 の Heegner 点から $E(K)$ の Heegner 点 $z_{K,E}$ を作ることができるが, この有理点が自明になる (ねじれ元になる) ことは起こり得る. Gross-Zagier 公式の重要な帰結として, Heegner 点 $z_{K,E}$ が非自明 (無限位数) であることと, E/K の Hasse-Weil L -関数の微分値 $L'(E/K, 1)$ が 0 でないことが同値になる. $z_{K,E}$ が非自明なとき, Kolyvagin は適当な仮定のもとで $E(K)$ の階数は 1 であることを示した. とくに $\mathbb{Z}z_{K,E} \subset E(K)$ は有限指数の部分群になる. さらに E/K の Tate-Shafarevich 群は有限で, その位数の平方根は指数 $[E(K) : \mathbb{Z}z_{K,E}]$ で抑えられることも示した. 実際には Birch and Swinnerton-Dyer 予想を認めれば, $[E(K) : \mathbb{Z}z_{K,E}]$ は局所玉河数などの簡単な因子を無視すれば Tate-Shafarevich 群の位数の平方根である.

上の Perrin-Riou 予想はこの Kolyvagin の結果を Λ -進, つまり岩澤理論化したものである. $\mathcal{S}_\infty$ は Λ -進 Mordell-Weil 群, $\mathcal{X}_\infty$ は (定義より) Λ -進 Selmer 群の双対, $\mathcal{M}$ は Λ -進 Tate-Shafarevich 群の Λ -加群的平方根という気持ちである. Perrin-Riou の岩澤予想は, Λ -進 Mordell-Weil 群に占める Λ -進 Heegner 点の割合が, Λ -進 Tate-Shafarevich 群の “位数” の平方根であることを主張している.

このように Λ -進化するメリットは次の点にある. 通常は Mordell-Weil 群は不規則に振る舞い, 階数が 1 とは限らない. Kolyvagin の結果も Heegner 点が消えていないことが大前提となっている. しかし族として Λ -進で考えると, i) は Λ -進 Mordell-Weil 群は常に階数 1 であると主張している. 実際これは Heegner 点が system としては常に生き残っていること (Cornut-Vatsal) と関係しており, Gross-Zagier 公式の観点から言えば, L -関数の微分値を補間していると考えられる後述の BDP-B の p -進 L -関数が, 恒等的に 0 ではないことと結びついている. このように族として考えることで, K 上でのみで考えるよりも規則的な振る舞いを期待できるのである. またこの利点をいかして Parity 予想 (BSD 予想 mod 2) が Nekovář [23] らにより示されている.

Perrin-Riou 予想は, 2000 年代初頭に B. Howard [10] によって i), ii) と iii) の半分 (⊃) が Kolyvagin system の手法によって示された. iii) の残りの半分 (⊂) は, X. Wan によって Ribet, Mazur-Wiles に端を発する Skinner-Urban 的手法により, 最近大きな進展があった. (cf. [30].) ¹

§ 4. Perrin-Riou 予想と p 進 Gross-Zagier 公式

Perrin-Riou 予想は p 進 Gross-Zagier 公式とも深く結びついている. Gross-Zagier 公式の証明は, 左辺と右辺を独立に計算してそれらが等しいことを確かめるというもので, 理論的背景が全くわからないものであった. p 進 Gross-Zagier 公式の証明も現在完成され

¹Wan の結果は Heegner 条件が本稿のものと異なり, 厳密にいうと本稿の設定では何も示されていない.

ているものは同じ方針で、計算に基づくものである。しかしながら p 進 Gross-Zagier 公式は、Perrin-Riou 予想などの岩澤理論的に自然な幾つかの予想を認めると、理論的に証明できることが Perrin-Riou 自身や Mazur-Rubin らによって指摘されていた ([22], [25])。最近の Perrin-Riou 予想の進展により、F. Castella は Howard によって証明されていた Λ -進 Gross-Zagier 公式 (ordinary のとき) の別証明を与えた。 (cf. [5].) ² これについても少しだけ証明の雰囲気を書いておく。

K のすべての $\mathbb{Z}_p$ -拡大の合併 $\mathcal{K}_\infty$ は $\mathbb{Z}_p^{\oplus 2}$ -拡大になるので、岩澤理論においては自然に 2 変数形式ベキ級数 $\Lambda^{(2)} = \mathbb{Z}_p[[\text{Gal}(\mathcal{K}_\infty/K)]] \cong \mathbb{Z}_p[[S, T]]$ 上の対象が現れる。とくに 2 変数 p -進 L 関数 $\mathcal{L}_p(E/K, S, T) \in \Lambda^{(2)}$ が自然に考えられる。 S を円分拡大のパラメーター、 T を反円分拡大のパラメーターとすると、 $\mathcal{L}_p(E, S, T) \in \mathbb{Z}_p[[T]][[S]] = \Lambda[[S]]$ とみなし、反円分 Λ 上相対的に 1 変数とみなす。このときこの S 変数 Λ 進 L -関数の解析的階数は 1 であることがわかる。 (Perrin-Riou 予想 i) より Λ 進 Mordel-Weil 階数は 1 に注意。) Schneider や Perrin-Riou により、一般に p 進 L 関数の先頭項公式は、岩澤主予想や p -進高さ関数の非退化性を認めると証明できる。今の場合も Λ 進 L 関数の先頭項公式を示すことができる。 (ここで 2-変数岩澤主予想が必要である。 [5] では Λ 進高さの非自明性は仮定されているように見える。) Λ 進 Mordell-Weil 群の生成元を $\mathcal{P}$ とし、 $\langle \mathcal{P}, \mathcal{P} \rangle_\Lambda$ をその Λ 進高さ、 $\mathcal{M}^{\oplus 2}$ が Λ 進 Tate-Shafarevich 群であることに注意すれば、先頭項公式は Birch and Swinnerton-Dyer 予想の先頭項予想と同じ形で、 Λ のイデアルとして

$$\left(\frac{\partial}{\partial S} \mathcal{L}_p(E/K, S, T) \Big|_{S=0} \right) = \text{Char}(\mathcal{M}^{\oplus 2}) \langle \mathcal{P}, \mathcal{P} \rangle_\Lambda$$

となる。 (簡単のため、局所玉河数やねじれ部分の“位数”は無視している。) Perrin-Riou 予想の iii) から、この右辺は Λ 進 Heegner 点の高さ $\langle \mathcal{H}_\infty, \mathcal{H}_\infty \rangle_\Lambda$ に等しい。これから Howard の Λ -進 Gross-Zagier 公式を得る。 ($T = 0$ とすれば Perrin-Riou の p 進 Gross-Zagier 公式になる。) 先頭項公式や Perrin-Riou 予想の証明では、2 変数の Beilinson-Flach 元という Euler 系が活躍することに注意しておく。これは特殊型の場合の楕円単数の Euler 系に相当するものである。 (我々の E は Heegner 条件より一般型であることに注意しておく。)

§ 5. Mazur 予想および Perrin-Riou 予想の一般化に関する最近の進展

Perrin-Riou 予想の一般化の方向としてただちに思いつくのは、楕円曲線を 2 より大きな重さをもつ保型形式にする方向と、通常素点を非通常素点にする方向である。

まず高次重さをもつ保型形式への一般化について述べる。ここでは保型形式は p 上のすべての素点で通常と仮定する。Heegner 点の類似としては Heegner サイクルが古くから研究されていたが、近年は Bertolini-Darmon-Prasanna による一般 Heegner サイクルがより自然な一般化として定着しつつある。一般 Heegner サイクルは Heegner サイク

² 正確には Perrin-Riou 予想が解決したとはいえない状況なので、別証明が本当に完成したとはいえない。また最終的に得られている公式も Howard のものより粗いものとなっている。 p -進 Gross-Zagier 公式は Howard の Λ -進のものの特特殊化になっているが、 [5] の精度では特殊化するとかなり弱い結果になる。

ルを含むより広いクラスであるが, Heegner サイクルのみを考えるより様々な点で筋がよい. 一般 Heegner サイクルを使うことで, Hsieh [12], Castella-Hsieh [6] により Mazur 予想の類似が得られている. より詳しいことは次節で述べる. また Longo-Vigni [19] によって Perrin-Riou 予想の一般化と Howard の結果の一般化 (主予想の半分の包含関係) が得られている. また Castella による肥田族を使って重さの 2 の場合に帰着するアプローチもある.

次に非通常素点への一般化について述べる. このときは norm compatible な Heegner 点が存在しないことが大きなネックとなる ($\mathcal{H}_\infty = \{0\}$.) norm compatible ではないが, Euler 因子に基づく 3 項間漸化式をみたすシステムなら存在する.³ この 3 項間の関係式と norm compatible な関係式のギャップを埋めるのが問題で, とくに重さが 2 より大きくなると違いが著しい. 後で説明するように, このときは Heegner サイクルのみでは不十分であり, 一般 Heegner サイクルを真に必要とする.

重さが 2 のときの非通常素点における最近の進展を述べる. $a_p = 0$ の $\mathbb{Q}$ 上の定義された楕円曲線に対し, Castella-Wan [7], Longo-Vigni [20] によって Perrin-Riou 予想の類似が定式化され, Howard [10] と Wan [30] により通常素点のときと同様の結果が得られている. $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線の場合, $p \geq 5$ ならば, $a_p = 0$ と p で超特異還元をもつことは同値である. $a_p = 0$ の場合は, 円分拡大に関しては [15] のプラスマイナス Selmer 群の理論があり, Castella-Wan, Longo-Vigni では, この手法の反円分拡大類似をたどることで通常素点と同様の扱いを可能にしている. 岩澤主予想の半分の不等式を示す Howard の Euler 系の理論は公理的であり, プラスマイナス Selmer 群と Heegner 点のプラスマイナス分解による Euler 系を構成し, Howard の公理を満たすことを確認するのが証明方針である. 一般の重さで一般の非通常素点のときは, 筆者と太田和惟氏による最近の結果がある. (cf. [18].)

§ 6. 反円分 Hecke twist による岩澤理論

前節までは楕円曲線や保型形式の L -関数の特殊値を, 関数等式の中心 ($s = k/2$) で, 反円分方向の p -進的挙動を調べていた. 円分拡大方向の岩澤理論では円分指標でひねることで, 他の整数点 $s \in \mathbb{Z}$ での状況を調べられたように, ここでは保型形式を反円分指標でひねったときの現象について解説する.

f を重さ $k = 2r$ の $\Gamma_0(N)$ の正規化された eigen newform とする. 前節と同様 K を Heegner 条件 (N の素因子は K で分解) をみたす虚二次体とする. また簡単のため判別式 d_K は奇数で $d_K < -3$ とする.

K の Hecke 指標 χ は, infinity type (i, j) が $i + j = k$ を満たし, $\chi|_{\mathbb{A}_\mathbb{Q}^\times} = \text{Norm}^k$ となるとき, (f に対して) central critical と呼ばれる. central critical 指標全体がなす集合を Σ_{cc} と書き, これを次の 2 つの部分集合に分割する:

- $\Sigma_{cc}^+ \subset \Sigma_{cc}$: infinity type (i, j) が, $i \geq k$ または $i \leq 0$ を満たす.

³ 正確には通常素点のときも最初に出てくるのは同じ 3 項間漸化式関係式であるが, p -進単数の固有値があるので, それを利用してそこから norm compatible なシステムを構成できる.

- $\Sigma_{cc}^- \subset \Sigma_{cc}$: infinity type (i, j) が $0 < i < k$ を満たす.

central critical 指標の重要性は次にある. V_f を f に伴う p -進ガロワ表現, $V_f(\chi^{-1})$ を V_f を Hecke 指標 χ^{-1} で twist してできる $\text{Gal}(\overline{K}/K)$ の表現とする. $L(f, \chi^{-1}, s)$ を $V_f(\chi^{-1})$ に付随する Hasse-Weil L -関数とする. このとき $\chi \in \Sigma_{cc}$ ならば, $L(f, \chi^{-1}, s)$ は self-dual($s \leftrightarrow -s$) で, $s = 0$ で critical である. critical は Deligne の意味だが, Riemann ゼータ関数の正の偶数点のように, よい周期 Ω が定義され, $L(f, \chi^{-1}, 0)/\Omega$ が代数的数になるという状況と思ってよい.

$\chi \in \Sigma_{cc}$ のとき self-dual なので $L(f, \chi^{-1}, s)$ の関数等式の符号 $w_{f, \chi}$ は ± 1 であるが, 今の設定においては符号は簡単に決定できて次のようになる:

$$w_{f, \chi} = \begin{cases} 1 & (\chi \in \Sigma_{cc}^+), \\ -1 & (\chi \in \Sigma_{cc}^-). \end{cases}$$

$\chi \in \Sigma_{cc}^-$ のときは, $w_{f, \chi} = -1$ より $L(f, \chi^{-1}, 0) = 0$ となる. したがって Bloch-Beilinson 予想的観点から特別な代数的サイクルの存在が期待できる. しかもこのように組織的に特殊値が消えているときは, 代数的サイクルの自然な構成法があると期待される. 実際, それが Bertolini-Darmon-Prasanna によって構成された一般 Heegner サイクルである. (定義は §7 で与える.) 一般 Heegner サイクルは $k = 2$ のときは Heegner 点, k が一般で $i = j = r$ のときは (簡単な因子を除いて) Heegner サイクルとなっている. このとき Castella-Hsieh は次を示した.

Theorem 4 (Castella-Hsieh [6]). $\chi \in \Sigma_{cc}^-$ で導手は N と素とする. また p は K で分裂し, $p \nmid 2N$ と仮定する. $V_f(\chi^{-1})$ の Selmer 群を $\text{Sel}_{p^\infty}(K, V_f(\chi^{-1}))$ とし, $z_{f, \chi} \in \text{Sel}_{p^\infty}(K, V_f(\chi^{-1}))$ を一般 Heegner サイクルの p -進 Abel-Jacobi 像の (f, χ) -部分とする. (cf. §7.) このとき

i) $z_{f, \chi} \neq 0$ ならば,

$$\text{Sel}_{p^\infty}(K, V_f(\chi^{-1})) = Fz_{f, \chi^{-1}}.$$

ここで F は f の $V_f(\chi^{-1})$ の係数体である.

ii) ある非負整数 e に対し, 反円分方向の増大度は

$$\dim_F \text{Sel}_{p^\infty}(K_n, V_f(\chi^{-1})) = p^n + e \quad (n \gg 0).$$

証明は一般 Heegner サイクルに対して Euler 系の理論を用いる. 本質的には Nekovář による Heegner サイクルの Euler 系の議論と同じである.

$\chi \in \Sigma_{cc}^+$ のときは, $w_{f, \chi} = 1$ より, 一般には $L(f, \chi^{-1}, 0) \neq 0$ となることが期待される. M.-L. Hsieh は, infinity type と分岐素点を固定したとき, そのような $\chi \in \Sigma_{cc}^+$ のうち有限個の例外を除けば, $L(f, \chi^{-1}, 0) \neq 0$ であることを示した (cf. [12]). このとき Coates-Wiles 型の次の定理が成り立つ.

Theorem 5 (Castella-Hsieh [6], K. [17]). $\chi \in \Sigma_{cc}^+$ で導手は N と素とする. p は K で分裂し, $p \nmid 2N$ と仮定する. このとき, もし $L(f, \chi^{-1}, 0) \neq 0$ ならば,

$$\mathrm{Sel}_{p^\infty}(K, V_f(\chi^{-1})) = \{0\}.$$

また $\dim_F \mathrm{Sel}_{p^\infty}(K_n, V_f(\chi^{-1}))$ は n に関して有界である.

この定理は p が f の通常素点 (a_p が p -進単数) のときは, Castella-Hsieh により示されていたが, 非通常素点の場合が今回筆者により新しく得られた結果である.

Theorem 5 の証明の鍵は次の 2 つである.

- (1) 一般 Heegner サイクルの Euler 系の Soulé twist (integral Perrin-Riou twist).
- (2) explicit reciprocity law により上の Soulé twist を L -関数の特殊値と結びつけること. とくに Bertolini-Darmon-Prasanna, Brakočević の p -進 L -関数 (BDP-B の p -進と略記する) を, zeta 元と Coleman 写像を使って構成すること.

今 $\chi \in \Sigma_{cc}^+$ なので一般的には $L(f, \chi^{-1}, 0) \neq 0$ であり, この特殊値と直接結びつく一般 Heegner サイクルは存在しない. 最初の鍵は, Σ_{cc}^- の元による twist と結びつく一般 Heegner サイクルの Euler 系を, Soulé twist によって Σ_{cc}^+ の領域に移動させることである. 次の鍵はこの移動してきた元たちが, 実は L -関数の値 $L(f, \chi^{-1}, 0)(\chi \in \Sigma_{cc}^+)$ を知っているというミステリアスなものである. これにより $L(f, \chi^{-1}, 0) \neq 0$ ならば, Euler 系 (の最初の layer) は非自明であることがわかり, Selmer 群を抑えることができる.

(1) について. 通常素点のときは Euler 系は p -ベキ方向に norm compatible なので, よく知られた Soulé twist の手法が使える. 非通常素点のときは norm compatible ではないので単純には Soulé twist ができないことが難点である. norm compatible にするためには分母が必要になるが, $k > 2$ のときは n -th layer において p^n より悪い分母があることがあるので, このようなときは Soulé twist の原理そのものが破壊されてしまう. この障害を Amice-Velú, Vishik ([1], [29]) にさかのぼる方法 (integral Perrin-Riou twist) で解決するのが, [17] において最もオリジナリティーのある点である. この方法は局所岩澤理論では Perrin-Riou によって用いられていたものである. これについては § 8 で詳しく説明する.

(2) について. BDP-B の p -進関数とは, Bertolini-Darmon-Prasanna [3], Brakočević [2] で構成された p -進関数で, その平方は $\chi \in \Sigma_{cc}^+$ を動かしたとき, $L(f, \chi^{-1}, 0)$ の代数的部分を補間するものである.⁴ explicit reciprocity law は Castella-Hsieh では Loeffler-Zerbes の結果を用いるが, 今回は Perrin-Riou のオリジナルの定式化を高さ 1 の相対 Lubin-Tate $\mathbb{Z}_p$ -拡大に一般化することで用いる. この explicit reciprocity law を使った計算における鍵は, 一般 Heegner サイクルの Abel-Jacobi 像を補間する (対数的) Coleman ベキ級数の存在である. この Coleman ベキ級数は modular form f を, cusp での q -展開のかわりに,

⁴[3] では単に解析関数として, [2] では岩澤関数として構成されている. [3] では tame な $\chi \in \Sigma_{cc}^-$ の値を一般 Heegner サイクルで表しているが, [2] ではそのような計算はしていない.

modular curve の Heegner 点の近傍で Serre-Tate 座標を使って展開することで得られる. このようにして得られる Coleman ベキ級数が, 一般 Heegner サイクルを補間すると同時に本質的に BDP-B の p -進関数になることは, Bertolini-Darmon-Prasanna, Brakočević, Castella-Hsieh の結果で, 明示的 p -進 Waldspurger 公式と呼ばれるものである.⁵ これについては §10 で詳しく説明する.

§ 7. 一般 Heegner サイクル

極大 order $\mathcal{O}_K$ で虚数乗法をもつ楕円曲線 A/H を固定する. (ここで H は K の Hilbert 類体である). また Heegner 条件から定まる A の $\Gamma_0(N)$ -レベル構造も固定する. この節では $k > 2$ とし W_{k-2} を $\Gamma_1(N)$ -レベル構造に関する Kuga-Sato 多様体とする. これは普遍楕円曲線の $X_1(N)$ 上の $(k-2)$ 個の積を非特異化したものである. ここで

$$X_{k-2} := A^{k-2} \times_H W_{k-2}$$

とおく. $\mathcal{O}_c$ を K の導手 c の order, つまり $\mathcal{O}_c = \mathbb{Z} + c\mathcal{O}_K$ とし, $H_c = H(j(\mathcal{O}_c))$ を導手 c の環類体 (標準的に $\text{Gal}(H_c/H) \cong \text{Pic } \mathcal{O}_c$ となる体) とする.

同種 $\iota: A \rightarrow A'$ に対し, X_{k-2} 上の一般 Heegner サイクル Z_ι を次で定義する.

$$Z_\iota := (\iota \text{ のグラフ})^{k-2} \subset (A \times A')^{k-2} \subset A^{k-2} \times W_{k-2} = X_{k-2}.$$

ここで $(A')^{k-2} \subset W_{k-2}$ は, A' が $X_1(N)$ 上の普遍楕円曲線の適当な点におけるファイバーであることから得られるものである.⁶ とくに ι が自然な同種 $\iota_c: \mathbb{C}/\mathcal{O}_K \rightarrow \mathbb{C}/\mathcal{O}_c, z \mapsto cz$ から得られるとき, Z_ι を Z_c と書く. 虚数乗法論により $\mathbb{C}/\mathcal{O}_c$ は H_c 上によりモデル A_c を持ち, ι_c は H_c 上の同種 $A \rightarrow A_c$ から得られる. これより Z_c は本質的に H_c 上定義される.⁷ p が K で $(p) = \text{pp}^*$ と分解するとき, 写像

$$\begin{aligned} \text{CH}^{k-1}(X_{k-2} \otimes H_c)_0 &\longrightarrow H_f^1(H_c, H_{\text{ét}}^{2k-3}((X_{k-2})_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_p(k-1))) \\ &\longrightarrow H_f^1(H_c, V_f \otimes \text{Sym}^{k-2} H_{\text{ét}}^1(A_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_p)(k-1)) \\ &= \prod_{i=1}^{k-1} H_f^1(H_c, V_f(\psi_p^i \psi_{p^*}^{k-i})) \end{aligned}$$

を考える. ここで最初の写像は p -進 Abel-Jacobi 写像, 次は Künneth 分解, Scholl の作用素, f -部分への射影を組み合わせ得られる. 最後は A の p -進 Hecke 指標

$$\psi_{A,p} = (\psi_p, \psi_{p^*}) : \text{Gal}(\overline{H}/H) \rightarrow \text{Aut}_{K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p}(V_p A) = (K \otimes \mathbb{Q}_p)^\times = K_p^\times \times K_{p^*}^\times = \mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times$$

⁵[3] ではこの公式を p -進 Gross-Zagier 公式と呼んでいるが, 高さ関数や微分値を扱っているわけではないので, 前述の p -進 Gross-Zagier 公式とはまったく異なる. 誤解が生じないように現在では p -進 Waldspurger 公式と呼ぶ方が普通になってきている.

⁶厳密には A' 上に A の $\Gamma_0(N)$ -レベル構造と ι により両立する $\Gamma_1(N)$ -レベル構造をひとつ選ぶ. この選択は我々の最終的目的に本質的な影響は与えない.

⁷便宜的に $\Gamma_1(N)$ -レベル構造を取っているので厳密には H_c 上ではない.

により, H のガロワ表現として

$$H_{\text{ét}}^1(A_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_p(1)) = V_p A^\vee(1) = V_p A = \mathbb{Q}_p(\psi_p) \oplus \mathbb{Q}_p(\psi_{p^*})$$

となることから従う.

Z_c に Scholl 作用素を作用させると, homologically trivial になり $\text{CH}^{k-1}(X_{k-2} \otimes H_c)_0$ に入る. この元の上の写像による像を $(z_c^{(i)})_i$ と書く. これは Euler 系になる. ただし Heegner 点のときと同様, ノルム関係式は Rubin [28] にある Euler 系の公理とは少し異なる. 例えば, $p \nmid c$ と $n \geq 1$ に対し,

$$\text{Cor}_{n+2/n}(z_{cp^{n+2}}^{(i)}) - a_p(f) \text{Cor}_{n+2/n}(z_{cp^{n+1}}^{(i)}) + p^{k-1} z_{cp^n}^{(i)} = 0$$

をみtas. ここで $\text{Cor}_{m/n}$ は H_{cp^m}/H_{cp^n} の corestriction である. 通常の Euler 系では上の状況で norm compatible であることを要請していた. $a_p(f)$ が単数 (p が f の通常素点) のときは, 上の 3 項間形式から初等的変形で norm compatible システムを作ることができる. 非通常素点では同じ操作をするためには分母が必要になる. Euler 系の議論は様々な合同関係式が本質的なので, 分母の存在は議論を破壊してしまう.

後述の計算において, 一般 Heegner サイクルの Abel-Jacobi 像をガロワ表現の拡大として表すことを使う. K の拡大体 F 上定義される同種 $\iota: A \rightarrow A'$ と A' の $\Gamma_1(N)$ -レベル構造に対し,

$$V = \epsilon_X H^{2k-3}((X_{k-2})_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_p(k-1)), \quad W = \epsilon_X H^{2k-3}((X_{k-2} - X_P)_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_p(k-1)),$$

$$V_P = \epsilon_X H^{2k-4}((X_P)_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_p)(k-2) = \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(\text{Sym}^{k-2} V_p A, \text{Sym}^{k-2} V_p A')$$

とおく. ここで ϵ_X は Scholl 作用素, $P \in X_1(N)$ は A' とそのレベル構造が定める点, X_P は P における $X_{k-2} \rightarrow X_1(N)$ のファイバーである. このとき Gysin 列より

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow W \longrightarrow V_P$$

が得られる. $\mathbb{Q}_p \mapsto V_P$ を, $1 \in \mathbb{Q}_p$ を ι が定める自然な V_P の元を送る写像とし, 上の完全列を引き戻すと, ガロワ表現の拡大

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow W_{\Delta_\iota} \longrightarrow \mathbb{Q}_p \longrightarrow 0$$

が得られる. この拡大類が定める $H^1(F, V)$ の元が, 同種 ι から定まる一般 Heegner サイクルの p -進 Abel-Jacobi 像に一致する. (f, i) -成分は, $T_p A$ と $T_{p^*} A$ の基底 e_p, e_{p^*} に対し, V_P の商

$$V_{P,i} := \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(\mathbb{Q}_p e_p^{k-1-i} e_{p^*}^{i+1}, \text{Sym}^{k-2} V_p(A')).$$

を使って同様に構成される拡大類に対応している.

§ 8. Integral Perrin-Riou twist

ここでは [17], [18] で導入された integral Perrin-Riou twist について簡単に説明する. Perrin-Riou twist は Soulé twist の一般化で, そのアイデアは Amice-Vélu-Vishik による保型形式の非通常素点の p -進 L -関数の構成に起源を有し, 局所ガロワコホモロジーにおける Perrin-Riou の指数関数の理論において用いられたものである. ([1], [29], [26].) Perrin-Riou の理論においては, $\mathcal{H}_\infty$ という対数のベキ乗の大きさをもつベキ級数環を使って twist 理論が構成されているが, [17], [18] ではこれを Euler 系の構成のため, 分母を精密にコントロールした整係数 (torsion も扱える) でかつ大域コホモロジーにも適用できるように一般化した. 実際 Soulé twist と同様, 任意のガロワコホモロジーと任意の $\mathbb{Z}_p$ -拡大に対して適用可能である. (我々の応用では大域体 H_c と反円分拡大に適用する.)

まずは Soulé twist を簡単に思い出す. F を代数体, $e = \varprojlim_n e_n$ を $\mathbb{Z}_p(1) = \varprojlim_n \mu_{p^n}$ の基底とする. 有限生成 $\mathbb{Z}_p$ -加群 T を $\text{Gal}(\bar{F}/F)$ の p -進表現とする. このとき e を固定することにより

$$\begin{aligned} \varprojlim_n H^1(F(\zeta_{p^n}), T) &= \varprojlim_n H^1(F(\zeta_{p^n}), T/p^n) \cong \varprojlim_n H^1(F(\zeta_{p^n}), T/p^n) \otimes \mathbb{Z}_p e_n \\ &= \varprojlim_n H^1(F(\zeta_{p^n}), T/p^n \otimes \mathbb{Z}_p e_n) = \varprojlim_n H^1(F(\zeta_{p^n}), T(1)). \end{aligned}$$

なる同型が得られる. (上で同型 $\cong$ は e_n をテンソルすることで得られるものである.) 重要な点は $F(\zeta_{p^n})$ まで拡大すると, e_n へのガロワ作用が自明になることである. これより norm compatible system $(c_n)_n \in \varprojlim_n H^1(F(\zeta_{p^n}), T)$ と任意の整数 $k \in \mathbb{Z}$ に対し, Soulé twist $(c_n^{(k)})_n \in \varprojlim_n H^1(F(\zeta_{p^n}), T(k))$ を構成できる.

一般に $\mathbb{Z}_p$ -拡大 F_∞/F とある $\alpha \in \mathbb{C}_p^\times$ に対し, corestriction に関して $\text{Cor}_{n+1/n} c_{n+1} = \alpha c_n$ をみたす元 $(c_n)_n \in \prod_n H^1(F_n, T)$ を α -norm compatible system と呼ぶことにする. (G_F の表現 T の係数環は α を含むものとする.) このときもし $|p/\alpha|_p < 1$ ならば, α -norm compatible に対しても, $(\alpha^{-n} c_n)_n$ を考えることで, 上の Soulé twist の議論は本質的に機能する. (ただし分母のコントロールが必要で, まったく自明というわけではない. 下の Theorem 6 の $h = 1$ の場合に相当.) 保型形式に応用するときは, α として p -Euler 因子 $x^2 - a_p(f)x + p^{k-1}$ の根を取り, c_n としては一般 Heegner サイクルの Abel-Jacobi 像を α -norm compatible system になるように stabilize したものを取る. (もちろん円分ではなく反円分方向で考える.) $k > 2$ のときは $|p/\alpha|_p < 1$ となる根が存在しないことがあるのが問題で, そのときがこれから述べる integral Perrin-Riou twist の出番となる.

F_∞/F をガロワ群 Γ のガロワ拡大で, 単射準同型 $\kappa : \Gamma \hookrightarrow \mathbb{Z}_p^\times$ があり, 像はねじれ元をもたない開部分群とする. $\mathbb{Z}_p(\kappa)$ を基底 e の階数 1 の $\mathbb{Z}_p$ -加群で, $g \in \Gamma$ は e に $ge = \kappa(g)e$ で作用するものとする. $G_F := \text{Gal}(\bar{F}/F)$ の p -進表現 T と整数 i に対し $T(i)_\kappa := T(\kappa^i)$ とおく. 典型例は円分 $\mathbb{Z}_p$ -拡大で κ が円分指標 κ_{cyc} , $T(i)_\kappa$ が Tate ひねり $T(i)$ のときである.

Theorem 6 ([17]). 自然数 h に対し $\alpha \in \mathbb{C}_p^\times$ は $|p^h/\alpha|_p < 1$ を満たすとする. T を有限生成 $\mathbb{Z}_p[\alpha]$ -加群で, 連続な G_F -作用をもつものとする. また $H^0(F_\infty, T) = 0$ かつ

$H^1(F_\infty, T)_{\text{tor}}$ は有限で位数が p^C と仮定する. ここで次の (1), (2) を満たすシステム

$$(c_n^{(i)})_n \in \prod_{n \in \mathbb{N}} H^1(F_n, T(i)_\kappa) \quad (0 \leq i \leq h-1)$$

が与えられたとする:

- (1) $(c_n^{(i)})_n$ は α -norm compatible. つまり任意の i, n に対し, $\text{Cor}_{n+1/n} c_{n+1}^{(i)} = \alpha c_n^{(i)}$.
- (2) h_0 を整数とし, $d_n^{(i)}$ を次の写像による $c_n^{(i)}$ の像とする.

$$H^1(F_n, T(i)_\kappa) \rightarrow H^1(F_\infty, T(i)_\kappa) \cong H^1(F_\infty, T(h_0)_\kappa).$$

ここで最後の写像は $e^{\otimes h_0-i}$ をテンソルすることで得られるものである. $d_n^{(j)}$ は合同式

$$\sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{i}{j} d_n^{(j)} \equiv 0 \pmod{p^{in}}$$

を満たす.

このとき任意の整数 i に対して, 次の (a), (b), (c) を満たすシステム

$$(c_n^{(i)})_n \in \prod_{n \in \mathbb{N}} H^1(F_n, T(i)_\kappa)$$

が存在する.

- (a) $0 \leq i \leq h-1$ のときは与えられたシステム.
- (b) $(p^C c_n^{(i)})_n$ は α -norm compatible.
- (c) $d_n^{(i)}$ を上の (2) と同様に定義するとき, 任意の i, k に対し

$$(8.1) \quad p^C \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{i}{j} d_n^{(j+k)} \equiv 0 \pmod{p^{in}}.$$

また上の条件 (a), (b), (c) により $(p^C c_n^{(i)})_n$ は与えられたシステムから一意的に定まる.

[18] では Soulé twist のそれと同様, この定理を初等的に証明した. Perrin-Riou ([27]) が円分拡大の局所岩澤コホモロジーに関してほぼ同じ結果を証明しているが, 局所岩澤コホモロジーを Λ の直積と同一視して, Amice-Vélu の結果に帰着するというやり方で, コホモロジーの構造を使うのと巨大な分母をもつ $\mathcal{H}_\infty$ という環の中で定式化している点が異なる. 我々の方法は局所体岩澤コホモロジーのみならず, より一般のコホモロジー群に適用可能で分母の評価も明示的にできる. また上では $H^1(F_\infty, T)_{\text{tor}}$ の有限性を仮定しているが, 定理の内容を適切に修正すると, この仮定なしでも証明することができる. ただ

しこの修正を正確に述べるのは技術的になるのでここではしない. (cf. [17].) この仮定は応用上多くの場合に満たされるが, Euler 系の議論をするときは, 適当な素点で局所化すると満たされないことがある. その意味でも $\mathcal{H}_\infty$ 上ではなく, torsion を扱える形で twist 理論を作ることが重要である.

ここでは円分 $\mathbb{Z}_p$ -拡大で $h = h_0 = 2$, $H^1(F_\infty, T)_{\text{tor}} = \{0\}$ のときを例として, 雰囲気を感じていただく. 定理の設定で

$$d_n^{(i)} := (\text{Res}_{F_n}^{F_\infty} c_n^{(i)})(2-i) \in H^1(F_\infty, T(2)) \quad (i = 0, 1)$$

は, (2) の条件として

$$(8.2) \quad d_n^{(0)} - d_n^{(1)} \equiv 0 \pmod{p^n}$$

を満たすものとする. このとき

$$\tilde{d}_n^{(2)} := 2d_n^{(1)} - d_n^{(0)} \in H^1(F_\infty, T(2))$$

とおく. $\gamma_n \in \Gamma_n := \text{Gal}(F_\infty/F_n)$ に対し, $\kappa_n := \kappa_{\text{cyc}}(\gamma_n) \in 1 + p^n\mathbb{Z}_p$ とおく. このとき γ_n の $d_n^{(i)}$ への作用は, $(2-i)$ 回だけ円分指標でひねられて,

$$\gamma_n d_n^{(0)} = \kappa_n^2 d_n^{(0)}, \quad \gamma_n d_n^{(1)} = \kappa_n d_n^{(1)}.$$

これより

$$(\gamma_n - 1)\tilde{d}_n^{(2)} = 2(\kappa_n - 1)(d_n^{(1)} - d_n^{(0)}) - (\kappa_n - 1)^2 d_n^{(0)}$$

となるが, これは (8.2) より p^{2n} で割り切れる. したがって $\tilde{d}_n^{(2)} \in H^1(F_\infty, T(2)/p^{2n})^{\Gamma_n}$ である. また $\text{Cor}_{n+1/n}(\tilde{d}_{n+1}^{(2)}) \equiv \alpha \tilde{d}_n^{(2)} \pmod{p^{2n}}$ も同様にわかる. このとき $|p^2/\alpha|_p < 1$ より次が収束する.

$$\begin{aligned} c_n^{(2)} &:= \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha^{-m} \text{Cor}_{m+n/n}(\tilde{d}_{n+m}^{(2)}) \\ &= \tilde{d}_n^{(2)} + \sum_{m=0}^{\infty} \text{Cor}_{m+n/n} \alpha^{-m-1} \left(\text{Cor}_{m+n+1/m+n}(\tilde{d}_{n+m+1}^{(2)}) - \alpha \tilde{d}_{n+m}^{(2)} \right) \\ &\in H^1(F_\infty, T(2))^{\Gamma_n} = H^1(F_n, T(2)). \end{aligned}$$

これが欲しかった twist ($i = 2$ の場合) である.

一般 Heegner サイクルを Perrin-Riou twist するためには, 反円分方向で考えて, 定理の条件を確認しなければならない. 初等的変形で α -norm compatible にすることはできるので, (2) の合同条件が問題となる.

$T_p A$ の $\mathcal{O}_K \otimes \mathbb{Z}_p$ -加群としての基底 v を取る. このとき $T_p A$ と $T_{p^*} A$ の基底 e_p, e_{p^*} として $e_p - e_{p^*} \in \mathbb{Z}_p v$ となるものを取る. κ を反円分指標とし, $\mathbb{Z}_p(\kappa)$ とその基底として, $T_p A \otimes T_{p^*} A^{\otimes -1}$ と $e := e_p \otimes e_{p^*}^{\otimes -1}$ を取る. このとき同種 $\iota_{cp^n} : A \rightarrow A_{cp^n}$ は Tate 加群に

$$T_p A = (\mathcal{O}_K \otimes \mathbb{Z}_p)v \longrightarrow T_p A_{cp^n} = (\mathbb{Z} + cp^n \mathcal{O}_K) \otimes \mathbb{Z}_p v, \quad x \longmapsto cp^n x$$

を誘導する. このとき $e_p - e_{p^*} \in \mathbb{Z}_p v$ より, $T_p A_{cp^n}$ の中で $cp^n \mid \iota_{cp^n}(e_p - e_{p^*})$ となる. よって $\text{Sym}^{k-2} T_p A_{cp^n}$ の中で

$$\begin{aligned} p^{ni} \mid \iota_{cp^n}((e_p - e_{p^*})^{\otimes i} \otimes e_p^{k-2-i}) &= \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{i}{j} \iota_{cp^n}(e_p)^{\otimes k-2-j} \iota_{cp^n}(e_{p^*})^{\otimes j} \\ &= \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{i}{j} \iota_{cp^n}(e_p)^{\otimes k-2} \iota_{cp^n}(e)^{\otimes -j} \end{aligned}$$

が得られる. 詳細は省略するが, 一般 Heegner サイクルの Abel-Jacobi 像のガロワ表現の拡大としての解釈 (cf. §7) を使うと, この加除式が生み出す V_P 内の合同関係式が欲しかった一般 Heegner サイクルの Abel-Jacobi 像の合同関係式を生む.

§ 9. Serre-Tate 局所 moduli と反円分拡大

Serre-Tate 局所 moduli は, 素数 p がベキ零であるような環上のアーベル多様体の無限小変形を扱う理論であった. とくに k を標数 p の体とし, $\bar{A}$ を k 上の通常アーベル多様体とすると, $\bar{A}$ の変形関手は形式群によって pro-representable になる. k が代数閉体のときは Katz [14] による詳しい解説があり, この形式群は形式乗法群 $\hat{\mathbb{G}}_m$ の g^2 個の直積と同型になる. (ただし $g = \dim \bar{A}$.)

ここでは k が有限体で楕円曲線 ($g = 1$) の場合を考える. この場合は descent 理論によって代数閉包 $\bar{k}$ の場合 (Katz [14]) に帰着できるので本質的に新しいことはないが, 直接扱うことで反円分拡大との関係が見えてくる. この節では次の設定を考える.

- $k = \mathbb{F}_q$, $W = W(k)$, $W^{ur} = W(\bar{k})$, σ をその Frobenius 写像, $L = W[1/p]$. (ただし完全体 F に対し $W(F)$ を F の Witt 環とする.)
- $\bar{A}_c$ を k 上の通常楕円曲線で, $\text{End } \bar{A} = \mathcal{O}_c$ かつ $(c, p) = 1$.
- $\mathcal{M}_{\bar{A}_c}$ を $\bar{A}_c/k$ の変形関手で, $\text{Spf } \mathfrak{R}_{\bar{A}_c}$ によって pro-representable とする. $\mathbb{A}_c/\text{Spf } \mathfrak{R}_{\bar{A}_c}$ をこの関手の普遍楕円曲線とする. 誤解のおそれがないときは, 単に $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{\bar{A}_c}$ と書く.

応用では, 楕円曲線 $\mathbb{C}/\mathcal{O}_c$ の環類体 H_c 上のモデル A_c に対し, k を H_c の p 上の素点での剰余体, $\bar{A}_c$ を A_c を k 上に還元したものとして適用する. p は K で分裂すると仮定しているので, 還元してできる楕円曲線は通常であることに注意する. (保型形式 f は通常でなくてもよい. modular 曲線の通常領域上 (Heegner 点の近傍) で f を調べる.)

$\mathfrak{R}$ は non-canonical に 1 変数ベキ級数環 $W[[t]]$ と同型である. ここで通常楕円曲線を考えているので, $\bar{A}_c$ の deformation をその order p の canonical 部分群で割るという操作により, フロベニウス写像 $\varphi : \text{Spf } \mathfrak{R} \rightarrow \text{Spf } \mathfrak{R}^\sigma$ が定義される. よって Lubin-Tate 理論により, φ を群準同型にするように, $\mathfrak{R} \cong W[[t]]$ に形式群の構造を一意的に入れることができる. これにより $\text{Spf } \mathfrak{R}$ は高さ 1 の相対 Lubin-Tate 形式群となる. (相対 Lubin-Tate

形式群に関しては [9] を参照. W 上の連結な階数 1 の Dieudonné-加群 (と canonical な filtration) に対応する W 上の形式群である.) この W 上の形式群を $\hat{\mathcal{M}}_{\bar{A}_c}$ と書く. もちろん W^{ur} まで base change すれば $\hat{\mathcal{M}}_{\bar{A}_c} \cong \hat{\mathbb{G}}_m$ であるが, W 上では $\hat{\mathcal{M}}_{\bar{A}_c}$ は形式乗法群と同型ではない.

p -進単数 u_q を $k = \mathbb{F}_q$ 上の楕円曲線 $\bar{A}_c$ の p -進 Tate 加群 $T_p \bar{A}_c$ への q 乗フロベニウス作用の固有値とし, $\mathcal{F}$ を (相対) Lubin-Tate パラメーター qu_q^{-1} をもつ相対 Lubin-Tate 形式群とする. Serre-Tate 理論により, ガロワ表現として $T_p \bar{A}_c \times T_p \mathcal{F}$ を p -進 Tate 加群とする W 上の楕円曲線 A_c が canonical に存在する. A_c の形式群 $\hat{A}_c$ は定義から $\mathcal{F}$ になる. この A_c を $\bar{A}_c$ の canonical lift という. (我々の応用では最初に固定した CM 楕円曲線 A_c が $\bar{A}_c$ の canonical lift になるので記号は一貫している.)

Theorem 7. i) *Kodaira-Spencer* 写像は, ガロワ表現の同型

$$\iota : T_p \hat{\mathcal{M}}_{\bar{A}_c} \cong T_p \hat{A}_c^{\otimes 2}(-1) = T_p \hat{A}_c \otimes T_p \bar{A}_c^{\otimes -1} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T_p \bar{A}_c^{\otimes 2}, \mathbb{Z}_p(1))$$

を誘導する. とくに $\hat{\mathcal{M}}_{\bar{A}_c}$ の (相対) Lubin-Tate パラメーターは qu_q^{-2} で与えられる.

ii) L に $\hat{\mathcal{M}}_{\bar{A}_c}$ の p -ベキねじれ点を添加してできる体は, (局所) 反円分拡大である.

i) のガロワ表現の同型は, 対応する filtered φ -加群の間に Kodaira-Spencer 写像が自然に誘導するものである. Katz [14] では Serre-Tate パラメーターからこの同型を構成しているが, Serre-Tate パラメーターは $\bar{k}$ 上でないと定義できない. Katz の Gauss-Manin 接続の Serre-Tate パラメーターを用いた明示表示を使うと, i) の同型は $\bar{k}$ 上では Katz の定義と一致することがわかる. $\hat{\mathcal{M}}_{\bar{A}_c}$ の Lubin-Tate パラメーターは, この同型を使って filtered φ -加群におけるフロベニウスの固有値をみればわかる.

ii) の証明方法は, Lubin-Tate パラメーターが反円分拡大の universal norm と一致することをみてもよいし, $\hat{\mathcal{M}}_{\bar{A}_c}$ の等分点に対応する $\bar{A}$ の deformation (quasi-canonical lift) の具体的記述からも, 環類体方向であることがわかる. (p^n -等分点は quasi-canonical lift に対応し, 自己準同型環は $\mathcal{O}_{cp^n}$ である.)

この定理により局所反円分拡大は, 局所 moduli 理論を使って幾何学的に研究できる. 実際これまでも反円分拡大方向の研究においては局所 moduli 理論が活躍していたが, 剰余体が代数閉体であることを仮定していた. $W(\bar{k})$ 上では高さ 1 の形式群はすべて形式乗法群に同型であるため, 円分拡大と反円分拡大の違いはなく, 反円分拡大と局所 moduli の関係がしっかり認識されていなかったように思われる. [18] の場合, explicit reciprocity law において $\mathbb{Q}_p$ への trace を取る必要性から, $W(k)$ 上で理論展開したいという動機がある.

§ 10. Perrin-Riou の指数写像と一般 Heegner サイクルの Coleman ベキ級数

Perrin-Riou の指数写像は, 与えられた p -進表現 V に対し, 分母がコントロールされた V の局所有理点 (H_f^1 の元) の族を円分拡大方向に組織的に作り出す理論である. 現在では円分拡大方向だけでなく, Lubin-Tate 拡大方向に対しても一般化する研究が進め

られている。ただし高さ 1 の相対 Lubin-Tate 拡大方向に関しては, explicit reciprocity law を含めて, Perrin-Riou 理論を一般化するのは難しいことではない。今回は反円分拡大方向の Perrin-Riou 理論をガロワ表現 $V_f(\chi^{-1})$ に対して用いる。以下では断らない限り, Perrin-Riou 理論といったら, 円分拡大方向ではなく, 相対 Lubin-Tate 群 $\hat{\mathcal{M}}_A$ に付随する拡大方向のものを指すことにする。

Perrin-Riou 理論の解説は長くなるのでここでは行わないが, 素朴な形で雰囲気を感じてもらおうと思う。普遍変形環 $\mathfrak{R}$ には σ -半線形なフロベニウス φ が作用していた。 φ に付随する σ^{-1} -半線形な trace 作用素を ψ と書く。 $(\psi \circ \varphi = \text{id.})$ また $\hat{\mathcal{M}}_{A_e}$ の φ -ベキ分点のシステム $(\varpi_n)_n$ を固定する。 $(\varpi_n \in \hat{\mathcal{M}}_{A_e}^{\sigma^{-n}}[p^n])$ で $\varphi(\varpi_{n+1}) = \varpi_n, \varpi_1 \neq 0.$ V を体 L 上のクリスタル表現, $D_p(V)$ を V に付随する filtered φ -加群とする。 V のガロワ安定な格子 T を取り, $D_p(V)$ の適当な格子 $D_p(T)$ を固定する。

Perrin-Riou 理論は, $D_p(T)$ -係数の “ベキ級数” $g \in \mathfrak{R}^{\psi=0} \otimes D_p(T)$ に対し, 局所有理点のシステム

$$c_n(g) \in H_f^1(L(\varpi_n), T) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

を組織的に与える理論といえる。重要な点はこのシステムは分母がコントロールされ, T -係数になっているところである。⁸ 構成法は $(1 - \varphi \otimes \varphi)G = g$ となる $G \in \mathcal{H}_\infty(\mathfrak{R}) \otimes D_p(V)$ を取る。 $(\mathcal{H}_\infty(\mathfrak{R}))$ は, 対数のベキの大きさをもったベキ級数を許すことで, $\mathfrak{R}$ を膨らませたものである。また我々の設定においてはこのような G が存在する。) そしてまず $c_n(g)$ の Bloch-Kato 対数像 $\log_V c_n(g)$ になるべき量を, $G^{\sigma^{-n}}(\varpi_n)$ に適当な因子を掛けたものとして定義する。そして Bloch-Kato の指数像 $\exp_V(\log_V c_n(g))$ が T -係数になることを証明する。指数写像には巨大な分母が必要になるので, T -係数になるのは奇跡的なことである。雰囲気を伝えるため, (円分拡大方向の) Perrin-Riou 理論の簡単な例をだすと, $V = \mathbb{Q}_p(1)$, g として $t \otimes e \in \mathbb{Z}_p[[t]] \otimes D_p(\mathbb{Q}_p(1))$, フロベニウスを $\varphi(t) = t^p$ と取る。このとき G は Artin-Hasse 対数関数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{p^n}}{p^n} \otimes e$ となる。よく知られているように, この関数は $\exp(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{p^n}}{p^n})$ が p -進整数係数になるという著しい性質がある。よってこの場合の Perrin-Riou の指数写像は, 本質的に Artin-Hasse 指数関数 $\exp(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{p^n}}{p^n}) \in \mathbb{Z}_p[[t]]$ で表され, $c_n(g)$ は Artin-Hasse 指数関数に $\hat{\mathbb{G}}_m$ の等分点 $\zeta_{p^n} - 1$ を代入してできる $\mathbb{Z}_p[\zeta_{p^n}]^\times$ の元という感じである。

Perrin-Riou 指数写像から得られる $(c_n(g))_n$ は, $D_p(V)$ のフロベニウス固有多項式と関係するノルム関係式をもつ。⁹ ガロワ表現 V が $V_f \otimes \text{Sym}^{k-2} V_p(A)(1)$ のときは, この関係式はちょうど一般 Heegner サイクルの Abel-Jacobi 像がもつそれと一致する。そこで $(c_n(g))_n$ が一般 Heegner サイクルの p -進 Abel-Jacobi 像のシステムと一致するような g が存在するのではないかという疑問が生じる。それに肯定的に答えるのが次の定理で, この g が一般 Heegner サイクルを補間する “(対数的) Coleman ベキ級数” と呼ぶべきものである。

⁸厳密にいうところでは格子 $D_p(T)$ の取り方の曖昧さを許しているため, 有界な分母は無視している。

⁹分母を許して norm compatible にした局所有理点のシステムを, Perrin-Riou 指数写像の像と呼ぶ事の方が多い。

Theorem 8. $f^\flat$ を q -展開が $f = \sum_{p \nmid n} a_n(f)q^n$ となる p -進保型形式とする. モジュラー形式 $f^\flat$ の Coleman 原始関数を $F_{f^\flat}$ とおく. g を $F_{f^\flat}$ の Heegner 点における Serre-Tate 展開 $F_{f^\flat}^{\text{ST}}$ とすると, この g からできる局所有理点 $c_n(g)$ は導手 cp^n の一般 Heegner サイクルの p -進 Abel-Jacobi 像と一致する.

$F_{f^\flat}$ は q -展開が $\sum_{p \nmid n} a_n(f)n^{-1}q^n$ となる p -進保型形式になる. また p -進保型形式を Katz の意味で関手とみなし, $\mathfrak{A}$ 上の普遍楕円曲線で値を取ったものが Serre-Tate 展開である. 正確には g として取った定理の $F_{f^\flat}^{\text{ST}}$ は $D_p(T)$ -係数のベキ級数でなければならないが, 係数をどう決めるかについては省略する. このとき $(1 - \varphi \otimes \varphi)G = F_{f^\flat}^{\text{ST}}$ の解 G が, f の Coleman 原始関数 F_f の Serre-Tate 展開として取れる. F_f は f に伴う正則微分形式 ω_f の (Coleman) 積分なので, 古典的 Abel-Jacobi 写像の p -進類似として, このような関数が現れるのは自然なことである. この定理の証明は, Perrin-Riou 理論と Coleman 積分論を線形代数的に結びつけ, Bertolini-Darmon-Prasanna による一般 Heegner サイクルの p -進 Abel-Jacobi 像の Coleman 積分を用いた表示を使う.

最後にこの一般 Heegner サイクルを補間する Coleman ベキ級数と, Bertolini-Darmon-Prasanna-Brakočević (BDP-B) の p -進 L -関数の関係を述べる. c を p と素な自然数とし, A_c を $\mathbb{C}/\mathcal{O}_c$ の $\mathcal{O}_{H_c}$ 上のよいモデルとする. このとき

$$\tilde{\mathfrak{A}} := \prod_{\sigma \in \text{Gal}(H_c/K)} \mathfrak{A}_{A_c^\sigma}$$

とおく. 類体論, 虚数乗法論, 局所 moduli 理論により, $\tilde{\mathfrak{A}}$ にはガロワ群 $\text{Gal}(H_{cp^\infty}/K)$ が自然に作用する. ($\text{Gal}(H_{cp^\infty}/H_c)$ は局所反円分 $\mathbb{Z}_p$ -拡大のガロワ群と本質的に違いはなく, $\hat{\mathcal{M}}_{A_c^\sigma}$ の相対 Lubin-Tate 指標を経由して, 各成分 $\mathfrak{A}_{A_c^\sigma}$ ごとに作用する.) このとき $\Lambda = W[[\text{Gal}(H_{cp^\infty}/K)]]$ とおくと, $\tilde{\mathfrak{A}}^{\psi=0}$ は階数 1 の自由 Λ -加群となる. ここで $\tilde{\mathfrak{A}}^{\psi=0}$ を最大不分岐拡大 W^{ur} まで係数拡大してできる $\tilde{\mathfrak{A}}_{W^{ur}}^{\psi=0}$ に対しては, Serre-Tate パラメーターを一つ選ぶと, $\Lambda^{ur} := \Lambda \otimes_W W^{ur}$ -加群としての自然な基底を取ることができる. これより $\tilde{\mathfrak{A}}_{W^{ur}}^{\psi=0}$ と Λ^{ur} を同一視できる. 上で述べた一般 Heegner cycle を補間する Coleman ベキ級数 $F_{f^\flat}^{\text{ST}}$ を $\text{Gal}(H_c/K)$ の元でひねったものを並べて,

$$\mathcal{L}_p \in \tilde{\mathfrak{A}}_{W^{ur}}^{\psi=0} \otimes_W D_p(V_f(r)) = \Lambda^{ur} \otimes_W D_p(V_f(r))$$

を構成できる. χ を $\text{Gal}(H_{cp^\infty}/K)$ を経由する K の p -進 Hecke 指標とし, 値 $\chi(\mathcal{L}_p)$ を考える. このとき χ の infinity type が (i, j) で $\chi \in \Sigma_{cc}^+$ かつ $i \leq 0$ ならば, この値は本質的に代数的数 $L(f, \chi^{-1}, 0)/\Omega^{2(i-j)}$ であることが示せる. ここで Ω は CM 楕円曲線 A の周期である. この補間式の証明には Bertolini-Darmon-Prasanna, Brakočević, Castella-Hsieh らによる明示的 Waldspurger 公式と Katz [13] に遡る Shimura-Maass 作用素とその p -進類似である Serre 作用素のコホモロジー的解釈を使う. これから次が得られる.

Theorem 9. $\mathcal{L}_p$ は $(\omega_f$ とのペアリングを取ると) Bertolini-Darmon-Prasanna-Brakočević の p -進 L -関数 $\mathcal{L}_p^{\text{BDP-B}}$ と一致する.

p -進 L -関数を, Bertolini-Darmon-Prasanna は単なる p -進解析関数として, Brakočević, Castella-Hsieh らは Λ^{un} の元として構成しているが, [18] では $\mathcal{L}_p$ として, より自然な $D_p(V_f(r))$ -係数の p -進 L -関数として定義した. この方が Perrin-Riou 理論や explicit reciprocity law と自然につながる.

[17] では f は p で通常とは仮定していない点新しいが, BDP-B の p -進 L -関数は非通常素点でも分母が出ないことは注目に値する. これは円分拡大方向の保型形式の非通常 p -進 L -関数との大きな違いである. 分母が出ないことに関する哲学的理由は, 我々の設定においては, この p -進 L -関数 (の 2 乗) に対応するガロワ表現は, f が p で通常かどうかにかかわらず Panchishkin 条件を満たすからである.

Perrin-Riou 理論を合わせると, Theorem 8 と Theorem 9 は BDP-B の p -進 L -関数のいわゆる Coleman 構成を与えていることに注意しておく. つまり Perrin-Riou 理論の explicit reciprocity law を使うと, 一般 Heegner サイクルを Perrin-Riou twist してできるシステムの Coleman 写像 (双対指数写像の族) による像として, BDP-B の p -進 L -関数が得られる. 別の言い方をすれば, $\tilde{\mathfrak{X}}^{\psi=0} \otimes_W D_p(V_f(r))$ から得られる局所有理点の族と一般 Heegner サイクルの族の差 (商) として, BDP-B の p -進 L -関数が得られるともいえる. これは古典的円分体の岩澤理論において, 局所単数のシステムと円単数のシステムの差 (商) が Kubota-Leopoldt の p -進 L -関数になるという結果の類似である. Coleman 構成は Coates-Wiles 型の定理や岩澤主予想の半分の不等式の証明に必要な要素であり, Theorem 5 の証明に使われている. また最近, 太田和惟氏との共同研究 [18] で岩澤主予想の半分の不等式の証明にも成功したが, その中でも使われている.

謝辞: 本稿および集会における講演の機会を与えてくださいましたオーガナイザーの大野泰生氏, 角皆宏氏, 平之内俊郎氏に感謝いたします. また完成度の低い初稿に丁寧なコメントをくださいましたレフェリーの方に, この場を借りて深くお礼申し上げます.

References

- [1] Y. Amice, J. Vêlu, Distributions p -adiques associées aux séries de Hecke. Journées Arithmétiques de Bordeaux (Conf., Univ. Bordeaux, Bordeaux, 1974), pp. 119–131. Astérisque, Nos. 24-25, Soc. Math. France, Paris, 1975.
- [2] M. Brakočević, Anticyclotomic p -adic L -function of central critical Rankin-Selberg L -value. Int. Math. Res. Not. IMRN 2011, no. 21, 4967–5018.
- [3] M. Bertolini, H. Darmon, K. Prasanna, Generalized Heegner cycles and p -adic Rankin L -series. With an appendix by Brian Conrad. Duke Math. J. 162 (2013), no. 6, 1033–1148.
- [4] F. Castella, Heegner cycles and higher weight specializations of big Heegner points. Math. Ann. 356 (2013), no. 4, 1247–1282.
- [5] F. Castella, p -adic heights of Heegner points and Beilinson-Flach classes. J. Lond. Math. Soc. (2) 96 (2017), no. 1, 156–180.

- [6] F. Castella, M-L. Hsieh, Heegner cycles and p -adic L -functions. *Math. Ann.* 370 (2018), no. 1-2, 567–628.
- [7] F. Castella, X. Wan, Perrin-Riou’s main conjecture for elliptic curves at supersingular primes, preprint.
- [8] D. Darmon, V. Rotger, Diagonal cycles and Euler systems II: The Birch and Swinnerton-Dyer conjecture for Hasse-Weil-Artin L -functions. *J. Amer. Math. Soc.* 30 (2017), no. 3, 601–672.
- [9] E. de Shalit, *Iwasawa theory of elliptic curves with complex multiplication*, Academic Press (1987).
- [10] B. Howard, The Heegner point Kolyvagin system. *Compos. Math.* 140 (2004), no. 6, 1439–1472.
- [11] B. Howard, The Iwasawa theoretic Gross-Zagier theorem. *Compos. Math.* 141 (2005), no. 4, 811–846.
- [12] M-L. Hsieh, Special values of anticyclotomic Rankin-Selberg L -functions. *Doc. Math.* 19 (2014), 709–767.
- [13] N. Katz, p -adic interpolation of real analytic Eisenstein series. *Ann. of Math.* (2) 104 (1976), no. 3, 459–571.
- [14] N. Katz, Serre-Tate local moduli. *Algebraic surfaces (Orsay, 1976-78)*, pp. 138–202, *Lecture Notes in Math.*, 868, Springer, Berlin-New York, 1981.
- [15] S. Kobayashi, Iwasawa theory for elliptic curves at supersingular primes. *Invent. Math.* 152 (2003), no. 1, 1–36.
- [16] S. Kobayashi, The p -adic Gross-Zagier formula for elliptic curves at supersingular primes, *Invent. Math.* 191 (2013), no. 3, 527–629.
- [17] S. Kobayashi, A p -adic interpolation of generalized Heegner cycles and integral Perrin-Riou twist, preprint.
- [18] S. Kobayashi, K. Ota: Anticyclotomic main conjecture for modular forms and integral Perrin-Riou twists, submitted to the *Proceeding of Iwasawa 2017*.
- [19] M. Longo, S. Vigni, Kolyvagin systems and Iwasawa theory of generalized Heegner cycles, preprint.
- [20] M. Longo, S. Vigni, Plus/Minus Heegner points and Iwasawa theory of elliptic curves at supersingular primes, preprint.
- [21] B. Mazur, Modular curves and arithmetic. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vol. 1, 2 (Warsaw, 1983), 185–211.
- [22] B. Mazur, K. Rubin, Elliptic curves and class field theory. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vol. II (Beijing, 2002), 185–195.
- [23] J. Nekovář, On the parity of ranks of Selmer groups. II. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 332 (2001), no. 2, 99–104.
- [24] B. Perrin-Riou, Points de Heegner et dérivées de fonctions L p -adiques. *Invent. Math.* 89 (1987), no. 3, 455–510.
- [25] B. Perrin-Riou, Fonctions L p -adiques, théorie d’Iwasawa et points de Heegner. *Bull. Soc. Math. France* 115 (1987), no. 4, 399–456.
- [26] B. Perrin-Riou, Théorie d’Iwasawa des représentations p -adiques sur un corps local, *Invent. Math.* 115 (1994), 81–149.
- [27] B. Perrin-Riou, Théorie d’Iwasawa et loi explicite de réciprocité, *Doc. Math.* 4 (1999), 219–273.
- [28] K. Rubin, *Euler systems*, *Annals of Mathematics Studies* 147, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2000.

- [29] M. Višik, Nonarchimedean measures associated with Dirichlet series. Mat. Sb. (N.S.) 99(141) (1976), no. 2, 248–260, 296.
- [30] X. Wan, Heegner Point Kolyvagin System and Iwasawa Main Conjecture, preprint.