RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B77 (2020), 225–238

有限多重ポリログとその関数等式
(Finite multiple polylogarithms and their functional equations)

By

関 真一朗 (Shin-ichiro SEKI)*

Abstract

This article is a research announcement of the results in [16] and [18]. Rosen generalized Kaneko–Zagier's $\mathcal{A}$-finite multiple zeta values to $\widehat{\mathcal{A}}$-finite multiple zeta values ($\widehat{\mathcal{A}}$-FMZVs) $\boldsymbol{p}$-adically in [14]. We introduce $\widehat{\mathcal{A}}$-finite multiple polylogarithms ($\widehat{\mathcal{A}}$-FMPs) which are multiple and $\boldsymbol{p}$-adic generalizations of finite polylogarithms defined by Elbaz-Vincent–Gangl as elements of a certain $\boldsymbol{p}$-adic ring. Our $\widehat{\mathcal{A}}$-FMPs are also regarded as generalizations of $\widehat{\mathcal{A}}$-FMZVs in the sense that some of the special values of our $\widehat{\mathcal{A}}$-FMPs give Rosen's $\widehat{\mathcal{A}}$-FMZVs. Our main results are some fundamental functional relations for $\widehat{\mathcal{A}}$-FMPs including the multi-variable functional equation which is a generalization of Hoffman's duality.

§1. 序

本稿では有限多重ポリログに関して行った研究 [16](佐久川との共同研究), [18] について, 研究集会「代数的整数論とその周辺 2016」で講演した内容に基づいて報告する. Hoffman や Zhao の研究を基に, 金子–Zagier[7] によって $\mathcal{A}$-有限多重ゼータ値と呼ばれる多重ゼータ値の "有限類似物" が導入され, 近年興味を集めている. また, ポリログの有限類似物である $\mathcal{A}$-有限ポリログも Kontsevich–Elbaz-Vincent–Gangl 等によって研究されていた. そこで, 佐久川と著者は [16] において $\mathcal{A}$-有限多重ゼータ値や $\mathcal{A}$-有限ポリログを自然に拡張する形で多重ポリログの "有限類似物" である $\mathcal{A}$-有限多重ポリログを導入し, それらが $\mathcal{A}$-有限多重ゼータ値や $\mathcal{A}$-有限ポリログの満たす幾つかの関係式を自然に含むような関係式を満たすことを証明した. 一方, Rosen は [14] において $\mathcal{A}$-有限多重ゼータ値をある意味で拡張した概念である $\widehat{\mathcal{A}}$-有限多重ゼータ値を導入しており, それを受けて著者

Received March 25, 2017.
2010 Mathematics Subject Classification(s): 11M32.
Key Words: *Finite multiple zeta values, Finite multiple polylogarithms.*
Supported by the Grant-in-Aid for JSPS Fellows (JP16J01758).
*Department of Mathematics, Osaka University, Osaka 560-0043 Japan.
Present Address: Mathematical Institute, Tohoku University, 6-3, Aoba, Aramaki, Aoba-Ku, Sendai, 980-8578, Japan.
e-mail: `shinichiro.seki.b3@tohoku.ac.jp`

は [18] において $\widehat{\mathcal{A}}$-有限多重ポリログを導入し, [16] で得た幾つかの結果の拡張を行った. “$\mathcal{A}$ における関係式” を “$\widehat{\mathcal{A}}$ における関係式” に拡張することは一般には簡単ではないように思われるが, シャッフル関係式, Hoffman の双対関係式及びそれを変数付きにした関数等式については自然な形で $\widehat{\mathcal{A}}$ の関係式へ拡張されることが分かった. 本稿の構成は以下の通りである: 第 2 節で $\mathcal{A}$-有限多重ゼータ値及び $\widehat{\mathcal{A}}$-有限多重ゼータ値, 第 3 節で $\mathcal{A}$-有限多重ポリログ及び $\widehat{\mathcal{A}}$-有限多重ポリログについて解説し, 第 4 節で主結果を述べる.

記号. インデックスに関する記号: 正の整数の組をインデックスと呼ぶ. インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$ の重さ $\mathrm{wt}(\mathbf{k})$ を $k_1+\cdots+k_r$, 深さ $\mathrm{dep}(\mathbf{k})$ を r と定める. また, $\mathbf{k}$ の反転インデックスを $\overline{\mathbf{k}}=(k_r,\dots,k_1)$, Hoffman 双対を $\mathbf{k}^\vee$ で表す. $\{1\}^k$ は $\underbrace{1,\dots,1}_{k}$ の略. 2 つのインデックス $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ に対して, それらを並べてできるインデックス (結合インデックス) を $(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)$ と表す. 非負整数 $l_1,\dots,l_r$ に対して, $b(\mathbf{k};l_1,\dots,l_r)$ を

$$b(\mathbf{k};l_1,\dots,l_r):=\prod_{j=1}^{r}\binom{k_j+l_j-1}{l_j}$$

とする. Hoffman 代数に関する記号: $\mathfrak{H}:=\mathbb{Q}\langle x,y\rangle$ を有理数係数 2 変数非可換多項式環とし, その部分環 $\mathfrak{H}^1$ を $\mathfrak{H}^1:=\mathbb{Q}+\mathfrak{H}y$ とする. 正整数 k に対し $z_k:=x^{k-1}y$ とし, インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$ に対し $z_{\mathbf{k}}:=z_{k_1}\cdots z_{k_r}$ とする. $*$ を $\mathfrak{H}^1$ 上の調和積, ш を $\mathfrak{H}$ 上のシャッフル積とする. また, $\circledast$ を $\mathfrak{H}^1$ 上の宗田の調和積, $\widetilde{\text{ш}}$ を $\mathfrak{H}$ 上の宗田のシャッフル積とする ([9] で定義されている). $\mathfrak{H}$ 上の自己同型 σ,τ をそれぞれ $\sigma(x)=x,\sigma(y)=x+y,\tau(x)=y,\tau(y)=x$ で定義し, $\mathfrak{H}^1$ 上の $\mathbb{Q}$-線形写像 ν,S,T をそれぞれ次が成り立つように定義する (いずれも 1 の行き先は 1). $\nu(z_{\mathbf{k}})=(-1)^{\mathrm{wt}(\mathbf{k})}z_{\overline{\mathbf{k}}},\ S(wy)=\sigma(w)y,\ T(wy)=\tau(w)y.$ ここで, $\mathbf{k}$ はインデックスで w は $\mathfrak{H}$ の元である.

§ 2. 有限多重ゼータ値

金子–Zagier[7] によって定義された $\mathcal{A}$-有限多重ゼータ値について論じた後, Rosen[14] によって導入された $\widehat{\mathcal{A}}$-有限多重ゼータ値について解説する.

§ 2.1. $\mathcal{A}$-有限多重ゼータ値と関係式

$\mathcal{A}$-有限多重ゼータ値の住処である $\mathbb{Q}$-代数 $\mathcal{A}$ は

$$\mathcal{A}:=\prod_{p:\text{素数}}\mathbb{F}_p\Big/\bigoplus_{p:\text{素数}}\mathbb{F}_p$$

と定義される. このとき, インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$ に対して $\mathcal{A}$-有限多重ゼータ値 $\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ は

$$\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}):=\left(\sum_{p-1\ge n_1>n_2>\cdots>n_r\ge 1}\frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}\bmod p\right)_p$$

で定義される. 本稿では等号付き $\mathcal{A}$-有限多重ゼータ値

$$\zeta^{\star}_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) := \left(\sum_{p-1\geq n_1\geq n_2\geq\cdots\geq n_r\geq 1}\frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}} \bmod p\right)_p$$

も扱う. 通常の多重ゼータ値 (以下, 多重ゼータ値) の場合と同様, 研究興味の一つは $\mathcal{A}$-有限多重ゼータ値達が満たす ($\mathbb{Q}$-代数/線形) 関係式を把握することにある. 例えば多重ゼータ値は双対関係式と呼ばれる関係式を満たすが, $\mathcal{A}$-有限多重ゼータ値は次のような形の双対関係式を満たす.

定理 2.1 (Hoffman の双対関係式 [3, Theorem 4.6])**.** 任意のインデックス $\mathbf{k}$ に対して次の関係式が成立する:

$$\zeta^{\star}_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) = -\zeta^{\star}_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}^{\vee}).$$

多重ゼータ値の全ての関係式は一般複シャッフル関係式から導かれると予想されているが ([4, Conjecture 1]), その $\mathcal{A}$-有限多重ゼータ値類似は何であろうか. $Z_{\mathcal{A}}\colon \mathfrak{H}^1 \to \mathcal{A}$ を $Z_{\mathcal{A}}(1) = 1$, $Z_{\mathcal{A}}(z_{\mathbf{k}}) = \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ が成り立つような $\mathbb{Q}$-線形写像とするとき

$$Z_{\mathcal{A}}(w_1 * w_2) = Z_{\mathcal{A}}(w_1)Z_{\mathcal{A}}(w_2)$$

が任意の $w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^1$ に対して成り立つが, シャッフル積については $Z_{\mathcal{A}}$ は準同型とはならないようである. しかしながら, 金子は次のような関係式を発見・証明している.

定理 2.2 (シャッフル関係式 [6, (2.3)])**.** 任意の $w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^1$ に対して次の関係式が成立する:

$$Z_{\mathcal{A}}(w_1 ш w_2) = Z_{\mathcal{A}}(\nu(w_1)w_2).$$

先程の疑問に対して金子は次を予想している.

予想 2.3 (金子)**.** $\mathfrak{H}^1$ の部分集合 J を

$$J := \{w_1 ш w_2 - \nu(w_1)w_2 \mid w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^1\}$$

で定義する. 調和積によって $\mathfrak{H}^1$ に $\mathbb{Q}$-代数構造を入れるとき, イデアルの等号

$$\mathrm{Ker}(Z_{\mathcal{A}}) = J^*$$

が成り立つであろう. ここで, J^* は J が生成する $\mathfrak{H}^1$ のイデアルである.

$Z^{\star}_{\mathcal{A}} := Z_{\mathcal{A}} \circ S$ とする. インデックス $\mathbf{k}$ に対して $Z^{\star}_{\mathcal{A}}(z_{\mathbf{k}}) = \zeta^{\star}_{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$, $w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^1$ に対して $Z^{\star}_{\mathcal{A}}(w_1 \bar{*} w_2) = Z^{\star}_{\mathcal{A}}(w_1)Z^{\star}_{\mathcal{A}}(w_2)$ が成り立つ. 定理 2.2 を等号付き $\mathcal{A}$-有限多重ゼータ値の言葉に翻訳すると次のようになる.

定理 2.4. 任意の $w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^1$ に対して次の関係式が成立する:

$$Z^{\star}_{\mathcal{A}}(w_1 ш w_2) = Z^{\star}_{\mathcal{A}}(\nu(w_1)w_2 - \nu(w_1)y^{-1}xw_2).$$

これは S の定義から容易に確認できる次の補題と $\nu \circ S = S \circ \nu$ から従う.

補題 2.5. 任意の $w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^1$ に対して

$$S(w_1)S(w_2) = S(w_1w_2 - w_1y^{-1}xw_2)$$

が成り立つ.

多重ゼータ値の双対関係式を一般複シャッフル関係式から純代数的に導くことは未だに出来ていないが, $\mathcal{A}$-有限多重ゼータ値についても状況は同じである. すなわち, 任意の $w \in \mathfrak{H}^1$ に対して $S(w+T(w)) \in J^*$ が成り立つことはまだ示されていない. ここで, 定理 2.1 は $Z^{\star}_{\mathcal{A}}(w) = -Z^{\star}_{\mathcal{A}}(T(w))$ と書き直せることに注意. $\mathcal{A}$-有限多重ゼータ値に関する双対関係式はスター値で簡明に表示されることから, この未解決問題の証明を実行する際には定理 2.4 の形の方が扱いやすいかもしれない.

多重ゼータ値については多数の特徴的な関係式が証明されているが, $\mathcal{A}$-有限多重ゼータ値に関しても和公式 [15], 大野型関係式 [13], 導分関係式 [10] などが証明されている.

§ 2.2. $\widehat{\mathcal{A}}$-有限多重ゼータ値とその p 進関係式

Rosen は [14] において $\mathbb{Q}$-代数 $\widehat{\mathcal{A}}$ を導入し, 新しい研究対象である $\widehat{\mathcal{A}}$-有限多重ゼータ値を定義した. $\widehat{\mathcal{A}}$ は

$$\widehat{\mathcal{A}} := \varprojlim_{n} \left(\prod_{p:\text{素数}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \middle/ \bigoplus_{p:\text{素数}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \right)$$

と定義される. 自然な射影 $\pi\colon \widehat{\mathbb{Z}} \to \widehat{\mathcal{A}}$ がある. 無限大素数 $\boldsymbol{p}$ を $\pi((p)_p)$ によって定義すれば $\widehat{\mathcal{A}}$ には $\boldsymbol{p}$-進位相が入り, $\widehat{\mathcal{A}}$ はその位相に関して完備である. インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ に対して $\widehat{\mathcal{A}}$-有限多重ゼータ値 $\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\mathbf{k})$ 及び等号付き $\widehat{\mathcal{A}}$-有限多重ゼータ値 $\zeta^{\star}_{\widehat{\mathcal{A}}}(\mathbf{k})$ を

$$\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\mathbf{k}) := \pi\left(\left(\sum_{p-1 \geq n_1 > n_2 > \cdots > n_r \geq 1} \frac{1}{n_1^{k_1} \cdots n_r^{k_r}}\right)_p\right),$$
$$\zeta^{\star}_{\widehat{\mathcal{A}}}(\mathbf{k}) := \pi\left(\left(\sum_{p-1 \geq n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_r \geq 1} \frac{1}{n_1^{k_1} \cdots n_r^{k_r}}\right)_p\right)$$

で定義する. $\widehat{\mathcal{A}}$-有限多重ゼータ値を modulo $\boldsymbol{p}$ したものが $\mathcal{A}$-有限多重ゼータ値である.

$$\sum_{\mathbf{k}:\text{インデックス}} a_{\mathbf{k}} \zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\mathbf{k}) \boldsymbol{p}^{\mathrm{wt}(\mathbf{k})} = 0, \quad a_{\mathbf{k}} \in \mathbb{Q}$$

という形をした収束級数の関係式のことを $\widehat{\mathcal{A}}$-有限多重ゼータ値の $\boldsymbol{p}$ 進関係式とよぶことにする. $\widehat{\mathcal{A}}$-有限多重ゼータ値の主たる研究興味はその $\boldsymbol{p}$ 進関係式を把握することである. 著者は Hoffman の双対関係式 (定理 2.1) を次のような $\boldsymbol{p}$ 進関係式に拡張した.

定理 2.6 ($\boldsymbol{p}$ 進双対関係式 [18, Theorem 1.3])**.** $\mathbf{k}$ をインデックスとする. このとき, 次の $\boldsymbol{p}$ 進関係式が成立する:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \zeta^{\star}_{\widehat{\mathcal{A}}}(\{1\}^i, \mathbf{k})\boldsymbol{p}^i = -\sum_{i=0}^{\infty} \zeta^{\star}_{\widehat{\mathcal{A}}}(\{1\}^i, \mathbf{k}^{\vee})\boldsymbol{p}^i.$$

次節で紹介するようにこの定理を更に $\widehat{\mathcal{A}}$-有限多重ポリログの関数等式 (定理 4.3) に拡張するので, 証明の概略についてはそこで述べる.

$\widehat{\mathfrak{H}} = \mathbb{Q}\langle\langle x, y\rangle\rangle$ を $\mathfrak{H}$ の完備化とし, その部分環 $\widehat{\mathfrak{H}}^1$ を $\widehat{\mathfrak{H}}^1 := \mathbb{Q} + \widehat{\mathfrak{H}}y$ によって定義する. $\mathfrak{H}^1$ 上定義された各写像は $\widehat{\mathfrak{H}}^1$ 上の写像に連続に延長して考える. $Z_{\widehat{\mathcal{A}}}\colon \widehat{\mathfrak{H}}^1 \to \widehat{\mathcal{A}}$ を

$$Z_{\widehat{\mathcal{A}}}\left(\sum_{\mathbf{k}:\text{インデックス}} a_{\mathbf{k}} z_{\mathbf{k}}\right) := \sum_{\mathbf{k}:\text{インデックス}} a_{\mathbf{k}} \zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\mathbf{k})\boldsymbol{p}^{\mathrm{wt}(\mathbf{k})}$$

で定義する ($a_{\mathbf{k}}$ は有理数). このとき, 定義から明らかに $Z_{\widehat{\mathcal{A}}}(w_1 * w_2) = Z_{\widehat{\mathcal{A}}}(w_1)Z_{\widehat{\mathcal{A}}}(w_2)$ が任意の $w_1, w_2 \in \widehat{\mathfrak{H}}^1$ に対して成り立つ. $\mathcal{A}$-有限多重ゼータ値に対するシャッフル関係式 (定理 2.2) も次のように自然に $\boldsymbol{p}$ 進関係式に拡張される. 連続自己同型 $\Psi \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{cont}}(\widehat{\mathfrak{H}})$ を $\Psi(x) := (1-x)^{-1}x$, $\Psi(y) := (1-x)^{-1}y$ で定める.

定理 2.7 ($\boldsymbol{p}$ 進シャッフル関係式)**.** 任意の $w_1, w_2 \in \widehat{\mathfrak{H}}^1$ に対して次の $\boldsymbol{p}$ 進関係式が成立する:

$$Z_{\widehat{\mathcal{A}}}(w_1 ш w_2) = Z_{\widehat{\mathcal{A}}}(\Psi(\nu(w_1))w_2).$$

証明は多重ポリログ

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(z) = \sum_{n_1 > n_2 > \cdots > n_r \geq 1} \frac{z^{n_1}}{n_1^{k_1} \cdots n_r^{k_r}}$$

を用いた金子による定理 2.2 の証明において, modulo p していたところを

$$\frac{1}{(p-n)^j} = (-1)^j \sum_{l=0}^{\infty} \binom{j+l-1}{l} \frac{p^l}{n^{j+l}} \tag{2.1}$$

という p 進展開に単に置き換えるだけである (p は素数, $n < p$ 及び j は正の整数). 冪級数 $f(z)$ の z^i の係数を $C(f(z); z^i)$ と表し, 正の整数 n に対して有限調和和 $H_n(\mathbf{k})$ を

$$H_n(\mathbf{k}) := \sum_{n \geq n_1 > n_2 > \cdots > n_r \geq 1} \frac{1}{n_1^{k_1} \cdots n_r^{k_r}}$$

と定義すると

$$H_n(\mathbf{k}) = \sum_{i=1}^{n} C(\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(z); z^i) \tag{2.2}$$

が成り立つ.

定理 2.7 の証明. $Z_{\widehat{\mathcal{A}}}$ の線型性及び連続性より, $w_1 = z_{\mathbf{k}_1}, w_2 = z_{\mathbf{k}_2}$ のときに示せばよい. ここで, $\mathbf{k}_1 = (k_1, \ldots, k_r), \mathbf{k}_2 = (k'_1, \ldots, k'_s)$ は任意のインデックス. 各 p 成分で主張が成り立つことを示す (p は素数). 置き換え $n_i \mapsto p - n_i$ 及び p 進展開 (2.1) より

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{p-1} C(\mathrm{Li}_{\mathbf{k}_1}(z)\,\mathrm{Li}_{\mathbf{k}_2}(z); z^i) = \sum_{\substack{p-1 \geq n, m \geq 1 \\ p-1 \geq n+m}} C(\mathrm{Li}_{\mathbf{k}_1}(z); z^n) C(\mathrm{Li}_{\mathbf{k}_2}(z); z^m) \\
&\overset{\substack{n \mapsto n_1 \\ m \mapsto m_1}}{=} \sum_{\substack{p-1 \geq n_1, m_1 \geq 1 \\ p-1 \geq n_1+m_1}} \left(\sum_{n_1 > n_2 > \cdots > n_r \geq 1} \frac{1}{n_1^{k_1} n_2^{k_2} \cdots n_r^{k_r}} \right) \left(\sum_{m_1 > m_2 > \cdots > m_s \geq 1} \frac{1}{m_1^{k'_1} m_2^{k'_2} \cdots m_s^{k'_s}} \right) \\
&= \sum_{\substack{p-1 \geq p-n_1, m_1 \geq 1 \\ p-1 \geq (p-n_1)+m_1}} \left(\sum_{p-n_1 > p-n_2 > \cdots > p-n_r \geq 1} \frac{1}{(p-n_1)^{k_1} (p-n_2)^{k_2} \cdots (p-n_r)^{k_r}} \right) \\
&\quad \times \left(\sum_{m_1 > m_2 > \cdots > m_s \geq 1} \frac{1}{m_1^{k'_1} m_2^{k'_2} \cdots m_s^{k'_s}} \right) \\
&= (-1)^{\mathrm{wt}(\mathbf{k}_1)} \sum_{p-1 \geq n_r > \cdots > n_2 > n_1 > m_1 > m_2 > \cdots > m_s \geq 1} \\
&\quad \times \sum_{l_1, \ldots, l_r \geq 0} b(\mathbf{k}_1; l_1, \ldots, l_r) \frac{1}{n_r^{k_r+l_r} \cdots n_2^{k_2+l_2} n_1^{k_1+l_1} m_1^{k'_1} m_2^{k'_2} \cdots m_s^{k'_s}} p^{l_1+\cdots+l_r} \\
&= (-1)^{\mathrm{wt}(\mathbf{k}_1)} \sum_{l_1, \ldots, l_r \geq 0} b(\mathbf{k}_1; l_1, \ldots, l_r) H_{p-1}(k_r + l_r, \ldots, k_1 + l_1, \mathbf{k}_2) p^{l_1+\cdots+l_r}
\end{aligned}$$

と計算できる. よく知られているように多重ポリログはシャッフル積公式を満たすので, (2.2) 及び

$$\Psi(z_{\mathbf{k}_1}) = \sum_{l_1, \ldots, l_r \geq 0} b(\mathbf{k}_1; l_1, \ldots, l_r) z_{k_1+l_1, \ldots, k_r+l_r}$$

が成り立つことに注意すれば, $w_1 = z_{\mathbf{k}_1}, w_2 = z_{\mathbf{k}_2}$ の場合に所望の関係式の p 成分における等式が示された.

□

予想 2.3 の $\boldsymbol{p}$ 進版は何であろうか. 自然な拡張を考えるならば次のようになるが, 予想と呼ぶに足る根拠は今のところない.

Question 2.8. $\widehat{\mathfrak{H}}^1$ の部分集合 $\mathcal{J}$ を

$$\mathcal{J} := \{w_1 ш w_2 - \Psi(\nu(w_1))w_2 \mid w_1, w_2 \in \widehat{\mathfrak{H}}^1\}$$

で定義する. 調和積によって $\widehat{\mathfrak{H}}^1$ に $\mathbb{Q}$-代数構造を入れるとき, イデアルの等号

$$\mathrm{Ker}(Z_{\widehat{\mathcal{A}}}) = \mathcal{J}^*$$

が成り立つか? ここで, $\mathcal{J}^*$ は $\mathcal{J}$ が生成する $\widehat{\mathfrak{H}}^1$ のイデアルである.

$Z^{\star}_{\widehat{\mathcal{A}}} := Z_{\widehat{\mathcal{A}}} \circ S$ とすると $Z^{\star}_{\widehat{\mathcal{A}}}(w_1 \bar{*} w_2) = Z^{\star}_{\widehat{\mathcal{A}}}(w_1) Z^{\star}_{\widehat{\mathcal{A}}}(w_2)$ が任意の $w_1, w_2 \in \widehat{\mathfrak{H}}^1$ に対して成立する. 定理 2.4 も次のように $\boldsymbol{p}$ 進関係式に拡張される.

定理 2.9. 任意の $w_1, w_2 \in \widehat{\mathfrak{H}}^1$ に対して次の $\boldsymbol{p}$ 進関係式が成立する:

$$Z^{\star}_{\widehat{\mathcal{A}}}(w_1 \overline{ш} w_2) = Z^{\star}_{\widehat{\mathcal{A}}}(\Psi(\nu(w_1))w_2 - \Psi(\nu(w_1))y^{-1}xw_2).$$

証明. $\nu \circ S = S \circ \nu$ 及び $\Psi \circ S = S \circ \Psi$ が成り立つことを確認できるため, 定理 2.7 及び補題 2.5(自然に $\widehat{\mathfrak{H}}^1$ に延長される) より

$$\begin{aligned} Z^{\star}_{\widehat{\mathcal{A}}}(w_1 \overline{ш} w_2) &= Z_{\widehat{\mathcal{A}}}(S(w_1) ш S(w_2)) = Z_{\widehat{\mathcal{A}}}(\Psi(\nu(S(w_1)))S(w_2)) \\ &= Z_{\widehat{\mathcal{A}}}(S(\Psi(\nu(w_1)))S(w_2)) \\ &= Z_{\widehat{\mathcal{A}}}(S(\Psi(\nu(w_1))w_2 - \Psi(\nu(w_1))y^{-1}xw_2)) \\ &= Z^{\star}_{\widehat{\mathcal{A}}}(\Psi(\nu(w_1))w_2 - \Psi(\nu(w_1))y^{-1}xw_2) \end{aligned}$$

と計算される. □

Question 2.8 に関連して, $\boldsymbol{p}$ 進双対関係式 (定理 2.6) を純代数的に導くという問題が考えられる. すなわち, 定理 2.6 は $w \in \widehat{\mathfrak{H}}^1$ に対して

$$Z^{\star}_{\widehat{\mathcal{A}}}\left(\frac{1}{1-y}w\right) = -Z^{\star}_{\widehat{\mathcal{A}}}\left(\frac{1}{1-y}T(w)\right)$$

と書き換えられるが, $S((1-y)^{-1}(w+T(w))) \in \mathcal{J}^*$ を示せという問題である. これに関しても定理 2.9 の形の方が扱いやすいかもしれない.

上述のように Hoffman の双対関係式やシャッフル関係式については自然な形でそれらの $\boldsymbol{p}$ 進化が得られているが, 和公式, 大野型関係式, 導分関係式などの $\boldsymbol{p}$ 進化は知られていない. それらを導くことはこれからの課題である.

§ 3. 有限多重ポリログ

[16] では金子–Zaiger の $\mathcal{A}$-有限多重ゼータ値と Kontsevich–Elbaz-Vincent–Gangl の $\mathcal{A}$-有限ポリログをそれぞれ特殊な場合として含む $\mathcal{A}$-有限多重ポリログを導入し, その関

数関係式の探求を行った. また, 前節で述べた Rosen の $\widehat{\mathcal{A}}$-有限多重ゼータ値を受けて [16] の内容を $\boldsymbol{p}$ 進化したものが [18] の研究内容である. 最初の 2 小節で $\mathcal{A}$-有限 (多重) ポリログについての結果を簡単に紹介するが, 詳しい記号の定義はまとめて §3.3 で行う.

§ 3.1. $\mathcal{A}$-有限ポリログと関数等式

ポリログ関数の満たす関数等式については古くから研究がなされているが, Kontsevich は $\mathcal{A}$-有限対数関数 $\pounds_{\mathcal{A},1}$ が次のような関数等式を満たすことを観察した.

命題 3.1 (Kontsevich [8]). t, s を不定元とする. このとき,

$$\pounds_{\mathcal{A},1}(t) = \pounds_{\mathcal{A},1}(1-t), \tag{3.1}$$

$$\pounds_{\mathcal{A},1}(t) = -t^{\boldsymbol{p}}\pounds_{\mathcal{A},1}(t^{-1}), \tag{3.2}$$

$$\pounds_{\mathcal{A},1}(t) - \pounds_{\mathcal{A},1}(s) + t^{\boldsymbol{p}}\pounds_{\mathcal{A},1}\left(\frac{s}{t}\right) + (1-t)^{\boldsymbol{p}}\pounds_{\mathcal{A},1}\left(\frac{1-s}{1-t}\right) = 0 \tag{3.3}$$

が成り立つ. ここで $t^{\boldsymbol{p}} = \pi((t^p)_p)$ であり, 各等式は順に $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}[t]}, \mathcal{A}_{\mathbb{Z}[t,t^{-1}]}, \mathcal{A}_{\mathbb{Z}[t^{\pm 1},(1-t)^{-1},s]}$ で考える.

対数関数が 3 項間関係式, 二重対数関数が 5 項間関係式を満たすのに対して, (3.3) が 4 項間関係式である事から, Kontsevich は $\mathcal{A}$-有限対数関数のことを $1\frac{1}{2}$-対数関数と呼んでいる. 彼は $\mathcal{A}$-有限二重対数関数がどのような関数等式を満たすかを問として残したが, Elbaz-Vincent–Gangl[1] はより一般に $\mathcal{A}$-有限ポリログの満たす関数等式を組織的に研究した. 例えば, 次の関数等式は簡単に分かるものである ((3.2) の一般化).

命題 3.2 (Elbaz-Vincent–Gangl [1, Theorem 5.7 (1)]). 正の整数 k に対して

$$\pounds_{\mathcal{A},k}(t) = (-1)^k t^{\boldsymbol{p}}\pounds_{\mathcal{A},k}(t^{-1}) \tag{3.4}$$

が $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]}$ で成立する.

これを含む形で $\mathcal{A}$-有限ポリログの distribution property も示している ([1, Theorem 5.7 (2)]). Kontsevich の問への直接的な解答としては $\mathcal{A}$-有限二重対数関数が非自明な 22 項間関係式を満たすことを示している ([1, Theorem 5.12]).

§ 3.2. $\mathcal{A}$-有限多重ポリログと関数等式

[16] において $\mathcal{A}$-有限ポリログを深さについて多重化し, 不定元に 1 を代入すると $\mathcal{A}$-有限多重ゼータ値になるような $\mathcal{A}$-有限多重ポリログを定義した. なお, 小野–山本 [12] によって別流儀の定義がなされているが, それは我々の $\mathcal{A}$-有限多重ポリログを使って記述できる ([16, Proposition 3.26]).

$\mathcal{A}$-有限ポリログの関数等式や $\mathcal{A}$-有限多重ゼータ値の関係式の研究を特殊な場合として含む形で $\mathcal{A}$-有限多重ポリログの関数関係式を網羅的に把握することが一つの研究目標

であり, 今回の研究では非常に基本的な公式を証明した (定理 2.1, (3.1), (3.4) の一般化). 実際には [16] では多変数 (かつ modulo $\boldsymbol{p}^2$) の場合に結果を得ているが, §3.3 でまとめて一般化するため, ここでは一変数の場合に限って記述する.

定理 3.3 ([16, Theorem 1.3, Proposition 3.11]). 任意のインデックス $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_r)$ に対して

$$\pounds_{\mathcal{A},\mathbf{k}}(t)=(-1)^{\mathrm{wt}(\mathbf{k})}t^{\boldsymbol{p}}\widetilde{\pounds}_{\mathcal{A},\overline{\mathbf{k}}}(t^{-1}),\quad \pounds^{\star}_{\mathcal{A},\mathbf{k}}(t)=(-1)^{\mathrm{wt}(\mathbf{k})}t^{\boldsymbol{p}}\widetilde{\pounds}^{\star}_{\mathcal{A},\overline{\mathbf{k}}}(t^{-1}),\tag{3.5}$$

$$\widetilde{\pounds}^{\star}_{\mathcal{A},\mathbf{k}}(t)=\widetilde{\pounds}^{\star}_{\mathcal{A},\mathbf{k}^{\vee}}(1-t)-\zeta^{\star}_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}^{\vee}),\tag{3.6}$$

$$(-1)^{r-1}\pounds_{\mathcal{A},\mathbf{k}}(t)=\widetilde{\pounds}^{\star}_{\mathcal{A},\overline{\mathbf{k}}}(t)+\sum_{j=1}^{r-1}(-1)^{j}\pounds_{\mathcal{A},(k_1,\ldots,k_j)}(t)\zeta^{\star}_{\mathcal{A}}(k_r,\ldots,k_{j+1})\tag{3.7}$$

が (3.5) は $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}[t^{\pm1}]}$, (3.6), (3.7) は $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}[t]}$ で成り立つ.

(3.6) において $t=1$ を代入すると Hoffman の双対関係式 (定理 2.1) が得られる. また, (3.5) と (3.6) を組み合わせることにより次の関数等式を得る.

定理 3.4 ([17, Theorem A.2]). 任意のインデックス $\mathbf{k}$ に対して

$$\pounds^{\star}_{\mathcal{A},\mathbf{k}}(t)=(t^{\boldsymbol{p}}-1)\pounds^{\star}_{\mathcal{A},\mathbf{k}^{\vee}}\left(\frac{t}{t-1}\right)-t^{\boldsymbol{p}}\zeta^{\star}_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}^{\vee})\tag{3.8}$$

が $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}[t,(t-1)^{-1}]}$ で成立する.

この定理は多重ポリログの双対関数等式 ([20, Lemma 12], [5, Proof of Theorem 3.2]) の $\mathcal{A}$-有限類似である.

実のところ, §4.3 で紹介する有限多重ポリログの特殊値に関する結果や論文 [17] の結果を得るためにこれらの関係式を用いる必要があるということが元々の研究動機であり, その観点では十分な結果と言える. しかしながら, 有限多重ポリログの関数関係式を網羅的に把握するという立場に立てば, その研究は始まったばかりであり, 他にどのような関係式を満たすのかについては殆ど分かっていない. これらの結果を用いることによってインデックス $\{1\}^k$ に対する distribution property やインデックス $(1,1)$ に対する 22 項間関係式を満たすことは Elbaz-Vincent–Gangl の結果から即座に分かる. Kontsevich の 4 項間関係式や Elbaz-Vincent–Gangl の 22 項間関係式のようなエキゾチックな関数等式であって, 直前に述べたような既存の結果から即座に分かるものではない有限多重ポリログの満たす関数関係式はあるのだろうか. 我々の研究からは得られない有限多重ポリログの関数関係式が既に小野 [11] や Elbaz-Vincent–Gangl[2] によって得られているようである.

§ 3.3. $\widehat{\mathcal{A}}$-有限多重ポリログ

[18] では次のように一般的な状況で adelic な環を定義した.

定義 3.5 ([18, Definition 2.2]). R を任意の可換環とし, Σ を R のイデアルの無限族とする. このとき, 任意の正整数 n に対して環 $\mathcal{A}^{\Sigma}_{n,R}$ を

$$\mathcal{A}^{\Sigma}_{n,R} := \prod_{I\in\Sigma} R/I^n \Big/ \bigoplus_{I\in\Sigma} R/I^n \ .$$

と定義する. すると $\{\mathcal{A}^{\Sigma}_{n,R}\}$ は自然に射影系をなすので, $\widehat{\mathcal{A}}^{\Sigma}_{R}$ をその射影極限

$$\widehat{\mathcal{A}}^{\Sigma}_{R} := \varprojlim_{n} \mathcal{A}^{\Sigma}_{n,R}$$

として定義する. $\mathcal{A}^{\Sigma}_{n,R}$ には離散位相を入れ, $\widehat{\mathcal{A}}^{\Sigma}_{R}$ には射影極限位相を入れる.

今回は $\Sigma = \{pR \mid p$ は有理素数 $\}$ の場合しか考えないため記号から Σ を除く. また, $\mathcal{A}_{1,R}$ については 1 を省略して $\mathcal{A}_R$ と書く. $\widehat{\mathcal{A}}$-有限多重ポリログは $\widehat{\mathcal{A}}_{\mathbb{Z}[\boldsymbol{t}]}$ の元として定義される. $\widehat{\mathbb{Z}[\boldsymbol{t}]}_p$ を多変数多項式環 $\mathbb{Z}[\boldsymbol{t}] = \mathbb{Z}[t_1,\dots,t_r]$ の p 進完備化とするとき, 前節と同様に自然な射影 $\pi\colon \prod_p \widehat{\mathbb{Z}[\boldsymbol{t}]}_p \to \widehat{\mathcal{A}}_{\mathbb{Z}[\boldsymbol{t}]}$ が存在し, 無限大素数 $\boldsymbol{p}$ が定義され, $\boldsymbol{p}$ 進完備な位相になっている (cf. [18, Lemma 2.3, Lemma 2,5]).

定義 3.6. 正の整数 n 及びインデックス $\mathbf{k} = (k_1,\dots,k_r)$, 不定元の組 $\boldsymbol{t} = (t_1,\dots,t_r)$ に対して 4 種類の多変数多項式を

$$\begin{aligned}
\pounds^{*}_{n,\mathbf{k}}(\boldsymbol{t}) &:= \sum_{n\ge n_1>\cdots>n_r\ge 1} \frac{t_1^{n_1}\cdots t_r^{n_r}}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}},\\
\pounds^{*,\star}_{n,\mathbf{k}}(\boldsymbol{t}) &:= \sum_{n\ge n_1\ge\cdots\ge n_r\ge 1} \frac{t_1^{n_1}\cdots t_r^{n_r}}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}},\\
\pounds^{ш}_{n,\mathbf{k}}(\boldsymbol{t}) &:= \sum_{n\ge n_1>\cdots>n_r\ge 1} \frac{t_1^{n_1-n_2}\cdots t_{r-1}^{n_{r-1}-n_r}t_r^{n_r}}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}},\\
\pounds^{ш,\star}_{n,\mathbf{k}}(\boldsymbol{t}) &:= \sum_{n\ge n_1\ge\cdots\ge n_r\ge 1} \frac{t_1^{n_1-n_2}\cdots t_{r-1}^{n_{r-1}-n_r}t_r^{n_r}}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}
\end{aligned}$$

と定義する. ただし, 便宜的に $\mathbf{k} = \emptyset$ のときはこれらの多項式は定数 1 とする.

定義 3.7 ([18, Definition 2.7]). $\mathbf{k} = (k_1,\dots,k_r)$ をインデックス, $\boldsymbol{t} = (t_1,\dots,t_r)$ を不定元の組, $\bullet \in \{\emptyset,\star\}$ とする. このとき, 4 種類の $\widehat{\mathcal{A}}$-有限多重ポリログを

$$\pounds^{*,\bullet}_{\widehat{\mathcal{A}},\mathbf{k}}(\boldsymbol{t}) := \pi((\pounds^{*,\bullet}_{p-1,\mathbf{k}}(\boldsymbol{t}))_p), \quad \pounds^{ш,\bullet}_{\widehat{\mathcal{A}},\mathbf{k}}(\boldsymbol{t}) := \pi((\pounds^{ш,\bullet}_{p-1,\mathbf{k}}(\boldsymbol{t}))_p)$$

によって定義する. 変数 t に対する 1 変数 $\widehat{\mathcal{A}}$-有限多重ゼータ値は

$$\begin{aligned}
\pounds^{\bullet}_{\widehat{\mathcal{A}},\mathbf{k}}(t) &:= \pounds^{*,\bullet}_{\widehat{\mathcal{A}},\mathbf{k}}(t,\{1\}^{r-1}) = \pounds^{ш,\bullet}_{\widehat{\mathcal{A}},\mathbf{k}}(\{t\}^{r}) \in \widehat{\mathcal{A}}_{\mathbb{Z}[t]},\\
\widetilde{\pounds}^{\bullet}_{\widehat{\mathcal{A}},\mathbf{k}}(t) &:= \pounds^{*,\bullet}_{\widehat{\mathcal{A}},\mathbf{k}}(\{1\}^{r-1},t) = \pounds^{ш,\bullet}_{\widehat{\mathcal{A}},\mathbf{k}}(\{1\}^{r-1},t) \in \widehat{\mathcal{A}}_{\mathbb{Z}[t]}
\end{aligned}$$

と定義する.

$\mathcal{A}$-有限多重ポリログ (resp. 一般に $\mathcal{A}_n$-有限多重ポリログ) は $\widehat{\mathcal{A}}$-有限多重ポリログを modulo $\boldsymbol{p}$ (resp. modulo $\boldsymbol{p}^n$) したものと定義する. $\mathcal{A}_{n,\mathbb{Z}[\boldsymbol{t}]} \simeq \widehat{\mathcal{A}}_{\mathbb{Z}[\boldsymbol{t}]}/\boldsymbol{p}^n\widehat{\mathcal{A}}_{\mathbb{Z}[\boldsymbol{t}]}$ であることに注意. 記号は $\pounds_{\mathcal{A},\mathbf{k}}(t)$ や $\pounds_{\mathcal{A}_n,\mathbf{k}}(t)$ のように添字部分の $\widehat{\mathcal{A}}$ を $\mathcal{A}$ や $\mathcal{A}_n$ に置き換えたものを用いる.

§ 4. 主結果

§4.1 で主結果を述べ, §4.2 で証明の概略を解説する. §4.3 で主結果を応用して得られる特殊値に関する結果を紹介する.

§ 4.1. $\widehat{\mathcal{A}}$-有限多重ポリログの関数関係式 (関数等式)

$\widehat{\mathcal{A}}$-有限多重ポリログに関する以下の基本的な関数関係式が主結果である.

定理 4.1 ([18, Theorem 3.1]). $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_r)$ をインデックス, $\boldsymbol{t}=(t_1,\ldots,t_r)$ を不定元の組とし, $\bullet\in\{\emptyset,\star\}$ とする. このとき,

$$\pounds^{*,\bullet}_{\widehat{\mathcal{A}},\overline{\mathbf{k}}}(\boldsymbol{t}) = (-1)^{\mathrm{wt}(\mathbf{k})}(t_1\cdots t_r)^{\boldsymbol{p}}\sum_{l_1,\ldots,l_r\geq 0} b(\mathbf{k};\mathbf{l})\pounds^{*,\bullet}_{\widehat{\mathcal{A}},(k_1+l_1,\ldots,k_r+l_r)}(\boldsymbol{t}^{-1})\boldsymbol{p}^{\mathrm{wt}(\mathbf{l})}$$

が $\widehat{\mathcal{A}}_{\mathbb{Z}[\boldsymbol{t},\boldsymbol{t}^{-1}]}$ で成立する. ここで, $\mathbf{l}:=(l_1,\ldots,l_r), \mathrm{wt}(\mathbf{l}):=l_1+\cdots+l_r, \boldsymbol{t}^{-1}:=(t_1^{-1},\ldots,t_r^{-1})$.

定理 4.2 ([16, Theorem 3.15]). 正の整数 $k_1,\ldots,k_r$ に対して次の関係式が成立する:

$$\sum_{j=0}^{r}(-1)^j\pounds^{*}_{\widehat{\mathcal{A}},(k_1,\ldots,k_j)}(t_1,\ldots,t_j)\pounds^{*,\star}_{\widehat{\mathcal{A}},(k_r,\ldots,k_{j+1})}(t_r,\ldots,t_{j+1})=0.$$

関数等式 (3.6) を多変数化・$\boldsymbol{p}$ 進化するために, インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_r)$ に対して $\boldsymbol{p}$ 進級数 $\mathcal{L}^{\star}_{\widehat{\mathcal{A}},\mathbf{k}}(t_1,\ldots,t_r)$ を

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}^{\star}_{\widehat{\mathcal{A}},\mathbf{k}}(t_1,\ldots,t_r)\\ &:=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\pounds^{ш,\star}_{\widehat{\mathcal{A}},(\{1\}^i,\mathbf{k})}(\{1\}^i,t_1,\ldots,t_r)-\frac{1}{2}\pounds^{ш,\star}_{\widehat{\mathcal{A}},(\{1\}^i,\mathbf{k})}(\{1\}^i,t_1,\ldots,t_{r-1},1)\right)\boldsymbol{p}^i\end{aligned}$$

と定義する.

定理 4.3 ([18, Theorem 3.4]). $\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_r$ を r 個のインデックスとし, $i=1,\ldots,r$ に対して $l_i:=\mathrm{dep}(\mathbf{k}_i)$, $l'_i:=\mathrm{dep}(\mathbf{k}_i^{\vee})$ とする. このとき, 多変数関数等式

$$\mathcal{L}^{\star}_{\widehat{\mathcal{A}},(\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_r)}(\{1\}^{l_1-1},t_1,\ldots,\{1\}^{l_r-1},t_r)=\mathcal{L}^{\star}_{\widehat{\mathcal{A}},(\mathbf{k}_1^{\vee},\ldots,\mathbf{k}_r^{\vee})}(\{1\}^{l'_1-1},1-t_1,\ldots,\{1\}^{l'_r-1},1-t_r)$$

が成立する.

§ 4.2. 主結果の証明の概略

定理 4.1 は置き換え $n_i \mapsto p - n_i$ 及び p 進展開 (2.1) を用いて容易に示せる．定理 4.2, 4.3 の証明には Euler の恒等式

$$\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}\binom{N}{n}\frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$$

を拡張した 2 種類の恒等式を用いる．

定理 4.4 ([16, Theorem 2.5])**.** 正整数 N とインデックス $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ に対して, 次の恒等式が $\mathbb{Q}[t_1, \ldots, t_r]$ において成立する:

$$\begin{aligned}(4.1)\quad &\sum_{N \geq n_1 \geq \cdots \geq n_r \geq 1}(-1)^{n_1}\binom{N}{n_1}\frac{t_1^{n_1-n_2}\cdots t_{r-1}^{n_{r-1}-n_r}t_r^{n_r}}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}} = \\ &\sum_{N \geq n_1 \geq \cdots \geq n_k \geq 1}\frac{(1-t_1)^{n_{l_1}-n_{l_1+1}}\cdots(1-t_{r-1})^{n_{l_{r-1}}-n_{l_{r-1}+1}}\{(1-t_r)^{n_{l_r}}-1\}}{n_1\cdots n_k}.\end{aligned}$$

ここで, $l_1 = k_1, l_2 = k_1 + k_2, \ldots, l_r = k_1 + \cdots + k_r = k$ である．

等号なし多重和に関するもう 1 種類の恒等式 ([16, Theorem 2.10]) はやや複雑なため省略する．どちらの恒等式も "形式的切断積分作用素" と呼ばれる良い作用素を導入することによって, 数学的帰納法で証明できる．詳しくは [16] の §2 を参照のこと．2 種類の恒等式はともに二項係数を含んでいるが, それらを上手く組み合わせることによって二項係数を消すことができ, 定理 4.2 が導かれる．

定理 4.3 は恒等式 (4.1) から導かれる．$\mathcal{A}$-有限多重ポリログに関する関数等式は素数 p について二項係数の合同式

$$(-1)^{n_1}\binom{p-1}{n_1} \equiv 1 \pmod{p}$$

から即座に従うが, $\widehat{\mathcal{A}}$-有限多重ポリログに関する関数等式を導くには二項係数の部分の処理が $\mathcal{A}$ の場合に比べて困難である．二項係数の展開

$$(-1)^{n_1}\binom{p-1}{n_1} = \sum_{i=0}^{n_1}(-1)^i H_{n_1}(\{1\}^i)p^i \tag{4.2}$$

から始める著者による計算は複雑なものであったが, [18] の匿名の査読者によって二項係数に関する次の p 進展開を用いれば証明を簡略化できることが指摘された．

補題 4.5 ([18, Lemma 4.1])**.** p を素数とし, n を p より小さい正の整数とする．このとき, p 進展開

$$(-1)^n\binom{p-1}{n} = (-1)^{p-1}\left(1 - \frac{p}{n}\right)\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{p-1 \geq m_1 \geq \cdots \geq m_i \geq n}\frac{p^i}{m_1\cdots m_i}$$

が成立する．

恒等式 (4.1) に $N=p-1$ を代入して二項係数の部分を計算して得られる $\boldsymbol{p}$ 進関係式が定理 4.3 の関数等式そのものというわけではない．しかし，その $\boldsymbol{p}$ 進関係式を用いることによって，所望の関数等式を modulo $\boldsymbol{p}^n$ したものを n に関する帰納法で示すことができる．そうして，$n\to\infty$ とすることによって証明が完了する．詳しくは [18] を参照のこと．定理 4.3 において $r=1, t_1=1$ とすることにより $\boldsymbol{p}$ 進双対関係式 (定理 2.6) が従う．

§ 4.3. 特殊値の計算

主結果を modulo $\boldsymbol{p}$ または modulo $\boldsymbol{p}^2$ して得られる関係式を組み合わせることにより，有限交代的多重ゼータ値 (有限多重ポリログの変数に ±1 を代入して得られる値) に関する既存の公式を用いて有限多重ポリログの特殊値をいくつかの場合に具体的に計算することができる．n 番目の関–Bernoulli 数を B_n で表し，2 以上の整数 k に対して $B_{\boldsymbol{p}-k}\in\widehat{\mathcal{A}}$ を $\pi((B_{p-k})_p)$ で定義する．ただし，k より小さい素数 p に対しては (何であってもよいが) 便宜的に $B_{p-k}=0$ としておく．

定理 4.6 ([16, Theorem 4.5])**.** k を 2 以上の整数とする．このとき，

$$\pounds^{\star}_{\mathcal{A},\{1\}^k}(1/2)=\frac{2^{k-1}-1}{2^{k-1}}\frac{B_{\boldsymbol{p}-k}}{k}$$

が成り立つ．k が偶数であれば，更に

$$\pounds^{\star}_{\mathcal{A}_2,\{1\}^k}(1/2)=\frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}}\frac{B_{\boldsymbol{p}-k-1}}{k+1}\boldsymbol{p}$$

が成り立つ．

この定理の $k=2$ の場合が [19, Theorem 1.1] で示されている合同式に他ならない．特殊値を導出するために必要な公式を組み合わせる回数が特に多いものとして，次のようなものがある．

定理 4.7 ([16, Remark 4.7])**.** k_1,k_2,k_3 を正の整数とし，$k:=k_1+k_2, l=k_1+k_2+k_3$ とおく．このとき，k_1,k_3 が偶数で k_2 が 3 以上の奇数であれば

$$\pounds^{*}_{\mathcal{A},\{1\}^l}(\{1\}^{k_1-1},1/2,2,\{1\}^{k_2-2},1/2,2,\{1\}^{k_3-1})=\frac{1-2^{l-1}}{2^l}\left\{\binom{l}{k_1}-\binom{l}{k_3}\right\}\frac{B_{\boldsymbol{p}-l}}{l}$$

が成り立ち，k_1,k_2 が偶数であれば

$$\pounds^{*}_{\mathcal{A}_2,\{1\}^k}(\{1\}^{k_1-1},1/2,2,\{1\}^{k_2-1})=-\frac{1}{2}\left\{1+\frac{2^k-1}{2^k}\binom{k+1}{k_2}\right\}\frac{B_{\boldsymbol{p}-k-1}}{k+1}\boldsymbol{p}$$

が成り立つ．

謝辞

講演の機会を与えてくださった集会プログラム委員である大野泰生先生（東北大学），角皆宏先生（上智大学），平之内俊郎先生（広島大学），講演を勧めてくださった落合理先生 (大阪大学) に感謝申し上げます.

References

[1] Elbaz-Vincent, P. and Gangl, H., On poly(ana)logs I, *Compositio Math.*, **130** (2002), no. 2, 161–210.
[2] Elbaz-Vincent, P. and Gangl, H., Finite polylogarithms, their multiple analogues and the Shannon entropy, Geometric Science of Information 2015, Oct 2015, Palaiseau, France.
[3] Hoffman, M., Quasi-symmetric functions and mod p multiple harmonic sums, *Kyushu J. Math.,* **69** (2015), no. 2, 345–366.
[4] Ihara, K., Kaneko, M. and Zagier, D., Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values, *Compositio Math.*, **142** (2006), no. 2, 307–338.
[5] Imatomi, K., Multi-poly-Bernoulli-star numbers and finite multiple zeta-star values, *Integers*, **14** (2014), Paper No. A51, 10 pp.
[6] Kaneko, M., 有限多重ゼータ値 (Finite multiple zeta values, in Japanese), *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, **B68** (2017), 175–190.
[7] Kaneko, M. and Zagier, D., Finite multiple zeta values, in preparation.
[8] Kontsevich, M., The $1\frac{1}{2}$-logarithm, Appendix to "On poly(ana)logs I" by Elbaz-Vincent, P. and Gangl, H., *Compositio Math.*, **130** (2002), no. 2, 211–214.
[9] S. Muneta, *Algebraic setup of non-strict multiple zeta values*, *Acta Arith.*, *136*, (2009), no. 1, 7–18.
[10] Murahara, H., Derivation relations for finite multiple zeta values, *Int. J. Number Theory*, *13*, (2017), 419–427.
[11] Ono, M., New functional equations of finite multiple polylogarithms, *Tohoku Math. J.*, Vol. **72** (2020), No. 1, 149–157.
[12] Ono, M. and Yamamoto, S., Shuffle product of finite multiple polylogarithms, *Manuscripta Math.*, (2016), 1–14.
[13] Oyama, K., Ohno's relation for finite multiple zeta values, *Kyushu J. Math.*, **72** (2018), no. 2, 277–285.
[14] Rosen, J., Asymptotic relations for truncated multiple zeta values, *J. Lond. Math. Soc.* (2), **91**, (2015), no. 2, 554–572.
[15] Saito, S. and Wakabayashi, N., Sum formula for finite multiple zeta values, *J. Math. Soc. Japan*, **67** (2015), no. 3, 1069–1076.
[16] Sakugawa, K. and Seki, S., On functional equations of finite multiple polylogarithms, *J. Algebra*, **469** (2017), 323–357.
[17] Sakugawa, K. and Seki, S., Finite and étale polylogarithms, *J. Number Theory*, **176**, (2017), 279–301.
[18] Seki, S., The $\boldsymbol{p}$-adic duality for the finite star-multiple polylogarithms, *Tohoku Mathematical Journal*, Vol. **71** (2019), No. 1, 111–122.
[19] Sun, Z. W. and Zhao, L. L., Arithmetic theory of harmonic numbers (II), *Colloq. Math.*, **130** (2013), no. 1, 67–78.
[20] Zlobin, S. A., Expansions of multiple integrals in linear forms, (Russian) *Dokl. Akad. Nauk*, **398** (2004), no. 5, 595–598.