



TITLE:

超特異な場合における重さの高い  
保型形式の $p$ 進 $L$ 関数について  
(Algebraic Number Theory and  
Related Topics 2016)

AUTHOR(S):

大槻, 玲

---

CITATION:

大槻, 玲. 超特異な場合における重さの高い保型形式の $p$ 進 $L$ 関数について (Algebraic Number Theory and Related Topics 2016). 数理解析研究所講究録別冊 2020, B77: 239-250

ISSUE DATE:

2020-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/260622>

RIGHT:

© 2020 by the Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University. All rights reserved.

超特異な場合における重さの高い保型形式の  $p$  進  $L$  関数について  
(The  $p$ -adic  $L$ -functions for higher weight modular forms in the supersingular case)  
(announcement)

By

大槻 玲 (Rei OTSUKI)\*

Abstract

This is a survey of a part of an article of the author and Florian Sprung. Sprung constructed  $\sharp/b$   $p$ -adic  $L$ -functions  $L_p^\sharp$  and  $L_p^\flat$  for elliptic curves defined over  $\mathbb{Q}$  in [10] and for modular forms of weight 2 in [11] in non ordinary case. In the article, we generalize  $p$ -adic  $L$ -functions  $L_p^\sharp$  and  $L_p^\flat$  for higher weight modular forms by an analogous method to that of Sprung. We assume that  $p \geq k - 1$ .

本稿は、論文 [8] の結果の一部となる予定の、通常還元でない場合における保型形式の  $\sharp/b$   $p$  進  $L$  関数の、Sprung 流の方法による構成について解説である。Sprung が [10] において有理数体上の楕円曲線に対して定義し、また [11] において、重さが 2 の保型形式に対して定義した  $\sharp/b$   $p$  進  $L$  関数の構成法を、重さ  $k$  が 3 以上の保型形式の場合にも一般化する方法を述べる。ただし、研究集会において述べた  $p \geq k - 1$  の場合での構成法に限って紹介する。

§ 1. 保型形式の  $p$  進  $L$  関数

$p$  進  $L$  関数は  $p$  進数を係数とする冪級数であって  $L$  関数の特殊値を補間するものであり、岩澤理論において重要な対象である。ここでは、保型形式の  $p$  進  $L$  関数を紹介する。

---

Received March 25, 2017. Revised May 21, 2019.

2010 Mathematics Subject Classification(s): 11F67, 11R23

Key Words:  $p$ -adic  $L$ -functions, modular forms, Iwasawa theory.

This research was supported in part by JSPS Core-to-Core program “Foundation of a Global Research Cooperative Center in Mathematics focused on Number Theory and Geometry”

\*Department of Mathematics, Keio University, 3-14-1 Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama 223-8522, Japan.

e-mail: ray\_otsuki@math.keio.ac.jp

© 2020 Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University. All rights reserved.

重さ  $k \geq 2$ , レベル  $N$ , 指標  $\varepsilon$  の尖点形式  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$  を考える. 以下,  $f(z)$  は新形式 (new form) であり, 全ての Hecke 作用素に関して固有形式 (eigen form) であるとする.

$p$  を  $N$  を割らない素数とし,  $\overline{\mathbb{Q}}$  から  $\mathbb{C}_p := \widehat{\overline{\mathbb{Q}}}$  への埋め込みを一つ固定し,  $v$  を  $p$  進付値で  $v(p) = 1$  となるものとする. また,  $|x|_p = p^{-v(x)}$  を  $p$  進絶対値とする. 二次方程式  $X^2 - a_p X + \varepsilon(p)p^{k-1} = 0$  の根  $\alpha$  は  $v(\alpha) < k - 1$  を満たすとき allowable root であると呼ばれる.

$M$  を  $p$  と素な整数とし,  $G := \varprojlim_n (\mathbb{Z}/qp^n M\mathbb{Z})^\times$  を考える. ここで  $q$  は,  $p = 2$  の時,  $q = 4$  とし,  $p > 2$  の時,  $q = p$  と定義する.  $\Gamma_n$  を自然な射影  $G_n \rightarrow G_0$  の kernel とすると,  $\Gamma_n \cong \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$  であり  $G_n \cong G_0 \times \Gamma_n$  と分解する. また,  $\Gamma := \varprojlim_n \Gamma_n$  とすると,  $\Gamma \cong \mathbb{Z}_p$  であり  $G \cong G_0 \times \Gamma$  と分解する.  $\Gamma$  の生成元  $\gamma$  を一つ固定する.

以下,  $K = K(f) := \mathbb{Q}_p(\{a_n\}, \text{Image } \varepsilon, \alpha)$  とし,  $\mathcal{O}$  をその整数環とする. また,  $K_\psi, \mathcal{O}_\psi$  で, それぞれ,  $K, \mathcal{O}$  に  $\psi$  の像を添加したものと定義する.

$\psi$  を  $G_0$  の指標で, 導手が  $qM$  か  $M$  であるものとする. 1970 年代頃, Visik [12] と Amice-Vélu [1] により,  $f(z)$  とその allowable root  $\alpha$  に対して,  $p$  進  $L$  関数  $L_{p,\alpha}(f, \psi; T) \in K_\psi(\alpha)[[T]]$  が定義された. 構成は  $f(z)$  の積分値によって定義されるモジュラー記号 (modular symbol) と呼ばれるものによって定義される. 構成方法は Mazur-Tate-Teitelbaum [7] を参照されたい.

$p$  進  $L$  関数は次のような性質を持つ.

**定理 1.1.**

1. 任意の  $0 \leq j \leq k - 2$  と  $\Gamma$  の位数有限の指標  $\chi$  に対して,

$$L_{p,\alpha}(f, \psi, \gamma^{-j} \chi(\gamma) - 1) = (\text{explicit factor}) \times \frac{L(f, \psi \chi, j + 1)}{\Omega_f^\pm}$$

が成り立つ. ここで,  $\Omega_f^\pm \in \mathbb{C}^\times$  は  $f(z)$  の周期と呼ばれる量であり, 符号  $\pm$  は  $\psi(-1) = \pm 1$  となるものを取る.

2. 実数  $h \geq 0$  と収束半径が 1 以上の冪級数  $F(T), G(T) \in K[[T]]$  に対し,  $F(T) = O(G(T)^h)$  であるとは,  $\sup_{|x|_p < r} \{|F(x)|\} = O(\sup_{|x|_p < r} \{|G(x)|^h\})$  ( $r \rightarrow 1 - 0$ ) となることとして定義する. すると,

$$L_{p,\alpha}(f, \psi; T) = O(\log(1 + T)^{v(\alpha)})$$

が成り立つ.

また,  $L_{p,\alpha}(f, \psi; T)$  は上の二条件により特徴付けられる.

以下において,  $v(a_p) = 0$  の時,  $f(z)$  は  $p$  で通常 (ordinary) と呼ぶ事にし,  $v(a_p) > 0$  の時,  $f(z)$  は  $p$  で超特異 (supersingular) と呼ぶ事にする.

$f(z)$  が  $p$  で通常である時には,  $X^2 - a_p X + \varepsilon(p)p^{k-1} = 0$  はただ一つの allowable root  $\alpha$  を持ち,  $\alpha$  は  $p$  進単数となる. この時,  $p$  進  $L$  関数は  $L_{p,\alpha}(f, \psi; T) \in \mathcal{O}^\psi[[T]] \otimes_{\mathcal{O}} K$  となる. しかし,  $f(z)$  が  $p$  で超特異の時には  $X^2 - a_p X + \varepsilon(p)p^{k-1} = 0$  は二つの allowable root  $\alpha, \beta$  を持つが, それらに対応する  $p$  進  $L$  関数は一般には係数が非有界となる.

岩澤理論においては, 環  $\Lambda := \mathcal{O}[[T]]$  の元となる冪級数や  $\Lambda$ -加群が重要な研究対象として登場することが多い. しかし, 分母が非有界な冪級数は  $\Lambda$  の元ではないので, 超特異な場合では  $p$  進  $L$  関数をこのような枠組みで取り扱う事が出来ない. しかし,  $p$  進  $L$  関数を, 有界な冪級数と非有界な冪級数に適切に分解する事に成功した例がいくつか知られている.

まず, Pollack[9] は,  $a_p = 0$  の場合において

$$L_{p,\alpha}(f, \psi; T) = L_p^+(f, \psi; T) \log_{k,p}^+(T) + \alpha L_p^-(f, \psi; T) \log_{k,p}^-(T)$$

を満たすような  $p$  進  $L$  関数  $L_p^\pm(f, \psi; T) \in \mathcal{O}^\psi[[T]] \otimes_{\mathcal{O}} K$  と half-log と呼ばれる  $\log_{k,p}^\pm(T) \in \mathbb{Q}_p[[T]]$  を構成した. それに応じて, 小林真一は [2] において,  $a_p = 0$  の場合において,  $\mathbb{Q}$  上定義された楕円曲線に対し, Pollack の  $\pm p$  進  $L$  関数と対応する  $\pm$ Selmer 群を定義し, 岩澤主予想を定式化した.  $\mathbb{Q}$  上定義された楕円曲線を考えることは, 保型形式で言えば,  $k = 2, \varepsilon = 1$  かつ  $f(z)$  が  $\mathbb{Q}$ -係数である場合を考える事に相当する.

Sprung は小林の結果を  $a_p \neq 0$  の場合にも一般化することを考え, [10] において,  $k = 2, p = 3, a_p = \pm 3$  の場合に  $\mathbb{Z}/b$   $p$  進  $L$  関数  $L_p^\sharp(f, \psi; T), L_p^b(f, \psi; T) \in \mathcal{O}[[T]]$  と half-log に相当する冪級数  $\log_{(\alpha/\beta)}^{(\sharp/b)}(T) \in K[[T]]$  を構成し,

$$\begin{cases} L_{p,\alpha}(f, \psi; T) = L_p^\sharp(f, \psi; T) \log_\alpha^\sharp(T) + L_p^b(f, \psi; T) \log_\alpha^b(T), \\ L_{p,\beta}(f, \psi; T) = L_p^\sharp(f, \psi; T) \log_\beta^\sharp(T) + L_p^b(f, \psi; T) \log_\beta^b(T) \end{cases}$$

が成り立つことを示した. また,  $\mathbb{Z}/b$  Selmer 群も構成し, それらを用いて岩澤主予想を定式化した.  $p$  進  $L$  関数の構成自体については, [11] においては仮定が弱められ,  $k = 2$  であり,  $f(z)$  は  $p$  で超特異であると言う仮定において  $\mathbb{Z}/b$   $p$  進  $L$  関数が構成されている.

また, Lei は [4] において, 小林の結果を  $a_p = 0$  で  $k \geq 2$  の場合に拡張している. さらに, Lei–Loeffler–Zerbes[5] においては  $a_p = 0$  の仮定が外され, Lei の結果と Sprung の結果の両方の一般化となるような  $p$  進  $L$  関数が定義されている. また, 対応する適切な Selmer 群も定義され, 岩澤主予想が定式化されている.

加藤和也は [2] でゼータ元 (zeta element) と呼ばれるオイラー系を構成し, それを用いた岩澤主予想の定式化と, 主予想の片方の包含の証明を行なっている. 以上の [10], [4], [5] の結果においては, Coleman 写像と呼ばれる写像を適切に定義する事が重要であった. 良い  $p$  進  $L$  関数はその Coleman 写像によるゼータ元の像として与えられ, また Coleman 写像の核を用いて良い Selmer 群が定義されている. さらに, それらの Selmer 群の Pontryagin 双対の特性イデアルがよい  $p$  進  $L$  関数により生成される, という形で岩澤主予想が定式化されている. そして, それらの岩澤主予想が, 加藤和也の岩澤主予想と同値である事が示されている.

Pollack の結果や Sprung の [11] の結果などでは, Coleman 写像やゼータ元は用いず, モジュラー記号の性質を使う事により, 係数が有界となる  $p$  進  $L$  関数を取り出す事に成功している. 本稿では, この構成法の一般化について述べる. これは, [8] の結果の一部となる予定である. Lei-Loeffler-Zerbes の  $p$  進  $L$  関数と今回定義される  $p$  進  $L$  関数は本質的に同じものであることが期待されるが, 残念ながら現時点では関係式は得られていない.

§2 ではこの論文の主結果である, 重さが  $k \geq 2$  の保型形式に対して  $\sharp/b$   $p$  進  $L$  関数を構成する方法について述べる. また, §3 では証明の概略を述べる.

## §2. 重さが 2 以上の保型形式に対する Sprung 流の $p$ 進 $L$ 関数の構成

Sprung[11] の方法を  $k \geq 2$  の場合へ一般化した形で紹介する. ただし, 議論や記号は [11] と多少変えてあるので注意されたい.

Sprung 流の構成の基本となるものは,  $p$  進  $L$  関数のモジュラー元 (modular element) による構成法である. Višik や Amice-Vélu の  $p$  進  $L$  関数の構成では,  $p$  進 distribution を用いて冪級数を得ている. つまり,

$$\text{モジュラー記号} \rightarrow p \text{ 進 distribution} \rightarrow p \text{ 進 } L \text{ 関数 (冪級数)}$$

という流れで冪級数が構成されている.

ところで, 古典的な岩澤理論においては, 久保田-Leopoldt の  $p$  進  $L$  関数は Stickelberger 元の射影極限としても構成することが出来る事が岩澤健吉により示されている. 岩澤の構成方法の類似は保型形式に対しても考えることが出来る. そこでは, Stickelberger 元の類似物であるモジュラー元と呼ばれるものが重要な役割を持つ. モジュラー元は, 有理数体上の楕円曲線の場合には, Mazur-Tate が [6] において定式化している. 有理数体上の楕円曲線のモジュラー元と楕円曲線の  $p$  進  $L$  関数の関係, および,  $a_p = 0$  の場合における Pollack の  $p$  進  $L$  関数の構成は, 栗原-Pollack[3] §1.3 などで見ること出来る. 本稿では, 重さが  $k \geq 2$  の保型形式に対するモジュラー元を, モジュラー記号を用いて新しく定義し, それを用いる. つまり, ここで述べる構成は

$$\text{モジュラー記号} \rightarrow \text{モジュラー元} \rightarrow p \text{ 進 } L \text{ 関数 (冪級数)}$$

という構成である.

Stickelberger 元は射影系をなすが, モジュラー元は Stickelberger 元とは異なり, それ自体は射影系をなすわけではない. しかし, モジュラー元の間には後述の命題 2.6 の三項間の関係式が成り立ち, その関係式を, 二次方程式  $X^2 - a_p X + \varepsilon(p)p^{k-1} = 0$  の根  $\alpha$  を用いて修正する事により射影系を得る事が出来る. その際に  $\alpha$  のべきが分母に現れる事により, 得られる冪級数の係数が非有界になり得る.

Pollack は  $a_p = 0$  の場合に  $\pm p$  進  $L$  関数を構成したが, その構成方法をモジュラー元を使って説明すれば以下ようになる. まず, 三項間の関係式は,  $a_p = 0$  の場合には偶数番目のみ, あるいは奇数番目のみの関係式となる事がわかる. その関係式からモジュラー

元が円分多項式の積で割り切れる事がわかり、さらにモジュラー元をその円分多項式の積で割った商を、偶数番目からなる系、奇数番目からなる系それぞれについて考えると、それらは収束し、係数が有界な二つの冪級数を与える事が示せる。それらが  $\pm p$  進  $L$  関数となる。また、円分多項式の偶数番目のみの積、あるいは奇数番目のみの積を  $p$  ベキで割ったものの極限を取ることにより、二つの冪級数が出来る。それらが half-log と呼ばれる物になる。そして、 $\pm p$  進  $L$  関数と half-log の積の和が Višik と Amice-Vélu の  $p$  進  $L$  関数となる事が示せる。

ところで、 $a_p \neq 0$  の場合は状況が異なり、関係式がより複雑になるため、モジュラー元を割る因子は容易には見つからない。そのため、同様の構成方法を与える事は難しくなっている。しかし、モジュラー元の二つ組を考える事により、 $a_p \neq 0$  の場合にも一般化が可能になるというアイデアが Sprung 流の構成方法では重要である。

さて、 $p$  進  $L$  関数の構成法から、冪級数の分母は  $\alpha$  のベキとモジュラー記号の分母から来ることがわかる。ここで、モジュラー記号の分母は有界となることが知られている。モジュラー記号は積分値を周期と呼ばれる複素数で割る事により得られるが、以下では議論を簡単にするため、この周期を適当に定数倍して、モジュラー記号の値は  $p$  進整数であるとする。すると、良い性質を持った  $p$  進  $L$  関数の存在は、ある元や作用素の整数性へと帰着する。

### § 2.1. 記号の準備

以下において、 $1 + q\mathbb{Z}_p$  の生成元  $\gamma$  を一つ固定する。

まず、円分多項式を定義する。

定義 2.1.  $\omega_n(T) = (1 + T)^{p^n} - 1$  と定義し、 $\Phi_n(T)$  を

$$\Phi_n(T) := \begin{cases} \omega_n(T)/\omega_{n-1}(T) & (n \geq 1), \\ \omega_0(T) & (n = 0) \end{cases}$$

と定義する。

$j \in \mathbb{Z}$  に対し、

$$\omega_n^{(j)}(T) := \omega(\gamma^{-j}(1 + T) - 1),$$

$$\Phi_n^{(j)}(T) := \Phi_n(\gamma^{-j}(1 + T) - 1)$$

と定義し、

$$\underline{\omega}_n(T) := \prod_{j=0}^{k-2} \omega_n^{(j)}(T),$$

$$\underline{\Psi}_n(T) := \prod_{j=0}^{k-2} \Phi_n^{(j)}(T),$$

と定義する。

以下においては、 $\omega_n$  や  $\Phi_n$  のように、多項式の変数を省略して書くこともある。

次に、環をいくつか用意する.

**定義 2.2.** 次のように定義する.

$$\begin{aligned}\Lambda_n &:= \mathcal{O}[G_n], \\ \Lambda_n^{(j)} &:= \mathcal{O}[G_0][T]/(\omega_n^{(j)}), \\ \underline{\Lambda}_n &:= \mathcal{O}[T]/(\underline{\omega}_n), \\ Q_n &:= K \otimes_{\mathcal{O}} \Lambda_n = K[G_n], \\ Q_n^{(j)} &:= K \otimes_{\mathcal{O}} \Lambda_n^{(j)} = K[G_0][T]/(\omega_n^{(j)}), \\ \underline{Q}_n &:= K \otimes_{\mathcal{O}} \underline{\Lambda}_n = K[G_0][T]/(\underline{\omega}_n) \cong \prod_{j=0}^{k-2} Q_n^{(j)}.\end{aligned}$$

冒頭に述べた通り,  $G_n \cong (\mathbb{Z}/qM\mathbb{Z})^\times \times \Gamma_n$  であり  $G \cong (\mathbb{Z}/qM\mathbb{Z})^\times \times \Gamma$  である事に注意する.  $\sigma_\gamma \in \Gamma$  を同型  $\Gamma \cong 1 + q\mathbb{Z}_p$  により  $\gamma$  と対応する元とすると, 同型写像  $Q_n \cong Q_n^{(j)}$ ,  $\sigma_\gamma \mapsto \gamma^{-j}(1+T)$  を考えることが出来る. これらの同型写像は,

$$\underline{Q}_n \cong \prod_{j=0}^{k-2} Q_n^{(j)} \cong Q_n^{\oplus(k-1)}$$

を誘導する. この同型写像を

$$\iota : \underline{Q}_n \xrightarrow{\sim} Q_n^{\oplus(k-1)}$$

と書く事にする. 今後の議論では  $\underline{Q}_n$  の元がこの同型  $\iota$  を通じて定義される事もある事に注意しておく.

ところで,  $\iota$  を制限して得られる写像  $\iota|_{\underline{\Lambda}_n} : \underline{\Lambda}_n \rightarrow \Lambda_n^{\oplus(k-1)}$  は  $k > 2$  の場合には単射ではあるが全射にはならない. ここで整数性の問題が起こり, これを解決する事がこの論文では重要になる.

次に,  $\underline{Q}_n$  の間の写像を紹介する. 自然数  $n \geq 1$  に対し  $N_n(T) \in K[T]$  を, 自然な射影  $K[T] \rightarrow \underline{Q}_n$  と同型写像  $\iota : \underline{Q}_n \rightarrow Q_n^{\oplus(k-1)}$  の合成による像が  $(p^{k-2}\Phi_n^{(j)}(T))_{j=0}^{k-2} \in Q_n^{\oplus(k-1)}$  となるものとする.  $N_n(T)$  は単に  $N_n$  と書くこともある. 記号の乱用であるが,  $N_n$  の自然な射影  $K[T] \rightarrow \underline{Q}_n$  による像も  $N_n$  と書く事にする. また,  $N_n$  倍写像が  $\underline{Q}_{n-1} \rightarrow \underline{Q}_n$  に well-defined に定義されるが, これも  $N_n$  と書く事にする.

自然な射影  $\underline{Q}_{n+1} \rightarrow \underline{Q}_n$  を  $\pi_n$  と書く.

最後に行列を幾つか定義する.

**定義 2.3.** 自然数  $n \geq 1$  に対し,

$$A_n := \begin{pmatrix} a_p & N_n \\ -\varepsilon(p) & 0 \end{pmatrix} \in M_2(K[T]),$$

$$W_n := A_1 A_2 \cdots A_n \in M_2(K[T])$$

と定義する.

また,

$$B := \begin{pmatrix} a_p & p^{k-1} \\ -\varepsilon(p) & 0 \end{pmatrix}, V := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\varepsilon(p)\alpha^{-1} & -\varepsilon(p)\beta^{-1} \end{pmatrix}, D := \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in M_2(K)$$

と定義する.

また, 二次正方行列に対して, 二次元行ベクトルへの右からの作用を考えることが出来るが, その作用から定義される写像も行列と同じ記号で書く事にする.

## § 2.2. モジュラー元

ここでは, [7] で紹介されているモジュラー記号を使ってモジュラー元を定義する.

定義 2.4 (モジュラー記号).  $r \in \mathbb{Q}, P(x) \in \mathbb{C}[x]$  に対し,

$$\phi_f(r, P) := 2\pi i \int_{\infty}^r f(z)P(z)dz$$

と定義する. これを用いて,  $c, n \in \mathbb{Q}$  で  $n \neq 0$  となるものに対し,

$$\begin{aligned} \eta_f(P; c, n) &:= \phi_f\left(\frac{c}{n}; P(nx - c)\right), \\ \eta_f^{\pm}(P; c, n) &:= \frac{\eta_f(P; c, n) \pm \eta_f(P, -c, n)}{2}, \\ \lambda_f^{\pm}(P; c, n) &:= \frac{\eta_f^{\pm}(P; c, n)}{\Omega_f^{\pm}}, \\ \lambda_f(P; c, n) &:= \lambda_f^+(P; c, n) + \lambda_f^-(P; c, n) \end{aligned}$$

と定義する.  $\lambda_f(P; c, n)$  を保型形式  $f(z)$  に付随するモジュラー記号と呼ぶ.

ここで,  $\Omega_f^{\pm} \in \mathbb{C}^{\times}$  は保型形式  $f(z)$  に付随する周期である. この時,  $c, n \in \mathbb{Z}$  で  $n > 0$  となるものと,  $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$  で  $\deg P(x) \leq k - 2$  となるものに対し,  $\lambda_f^{\pm}(P; c, n)$  は代数的数となる事知られている. 以下では議論を簡単にするために, 周期を適切に定数倍して,  $\lambda_f^{\pm}(P; c, n)$  が  $p$  進整数であるとして話を進める事にする.

定義から, 値  $\lambda_f^{\pm}(P; c, n)$  は  $c, n \in \mathbb{Z}$  に対して,  $c \bmod n$  のみによって定まることがわかる.

合成写像  $G_0 \cong (\mathbb{Z}/qM\mathbb{Z})^{\times} \rightarrow (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{\times} \subset \mathbb{Z}_p^{\times}$  を  $t$  で表す. ここで, 最後の包含は Teichmüller 写像によるものとする. 自然な射影  $G_n \rightarrow G_0$  と写像  $t$  の合成も  $t$  と書く事にする. また, 同型  $G_n \cong (\mathbb{Z}/qp^nM\mathbb{Z})^{\times}$  において  $c \in (\mathbb{Z}/qp^nM\mathbb{Z})^{\times}$  と対応する元を  $\sigma_c \in G_n$  と書く.



定義 2.5 (モジュラー元). 整数  $0 \leq j \leq k-2$  と  $n \geq 0$  に対し,

$$\theta_n^{(j)} := \sum_{\sigma_c \in G_n} t^{-j}(c) \lambda_f(x^j; c, qp^n M) \sigma_c \in \Lambda_n$$

と定義する. また,  $\widetilde{\theta}_n := (\theta_n^{(j)})_{0 \leq j \leq k-2} \in \Lambda_n^{\oplus(k-1)} \subset Q_n^{\oplus(k-1)}$  と定義し,  $\underline{\theta}_n := \iota^{-1}(\widetilde{\theta}_n) \in Q_n$  と定義する. この  $\underline{\theta}_n$  を保型形式  $f(z)$  に付随するモジュラー元と呼ぶ事にする.

モジュラー元には次のような関係式がある.

命題 2.6.  $n \geq 1$  に対し,

$$\pi_n(\underline{\theta}_{n+1}) = a_p \underline{\theta}_n - N_n \underline{\theta}_{n-1}$$

が成り立つ.

証明はモジュラー記号の性質から従う.

### § 2.3. $\sharp/b$ $p$ 進 $L$ 関数の構成

以上の準備の元で,  $\sharp/b$   $p$  進  $L$  関数の構成を述べる. 引き続き,  $\psi$  は  $G_0 \cong (\mathbb{Z}/qM\mathbb{Z})^\times$  の指標で Dirichlet 指標としての導手が  $qM$  か  $M$  となるものとする.  $\mathcal{O}_\psi$  で  $\mathcal{O}$  に  $\psi$  の像を添加した環を表す事になると,  $\psi$  は環準同型  $\mathcal{O}[G_0] \rightarrow \mathcal{O}_\psi$  を誘導する. また, この環準同型により  $\mathcal{O}_\psi$  を  $\mathcal{O}[G_0]$  代数とみて,  $\mathcal{O}[G_0]$  代数  $R$  に対し,  $R_\psi := \mathcal{O}_\psi \otimes_{\mathcal{O}[G_0]} R$  と書く事にする.  $\Lambda_\psi := \mathcal{O}_\psi[[T]]$  と定義する.

以下では,  $\sharp/b$   $p$  進  $L$  関数や half-log に相当する冪級数の構成について紹介する. 冪級数を与える原理は,  $\varprojlim_n Q_{n,\psi} \cong \varprojlim_n K_\psi[T]/(\omega_n)$  の射影系で分母の増大がある程度抑えられるものと,  $K_\psi[[T]]$  の冪級数で分母の増大がある程度抑えられるものとが対応するという事実である. これは,  $\varprojlim_n \mathcal{O}_\psi[T]/(\omega_n) \cong \mathcal{O}_\psi[[T]]$  の一般化であり証明はそこまで難しくはない. ただし,  $\varprojlim_n K_\psi[T]/(\omega_n) \not\cong K_\psi[[T]]$  であるので分母の増大の条件がなければ, 冪級数を与える事が出来ない.

$\sharp/b$   $p$  進  $L$  関数を構成する為に, 次の二つの主張を仮定する.

主張 2.7.  $\underline{\theta}_n \in \underline{\Lambda}_n$  が成り立つ.

主張 2.8.  $n \geq 0$  に対し,  $v_n := \frac{N_{n+1}}{\Psi_{n+1}}$  と置くと  $v_n \in \mathcal{O}[T]$  を満たし,  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 1$  が成り立つ.

注.  $k > 2$  の時には  $\underline{\Lambda}_n \not\cong \prod_{j=0}^{k-2} \Lambda_n^{(j)}$  となるので, これらの主張は自明ではない.

以上の準備の元で, 次が成り立つことが言える. ただし,  $\psi(\underline{\theta}_n) = \theta_n^\psi$  と書く事にする.

定理 2.9.

1.  $\left( (\theta_n^\psi, N_n(\theta_{n-1}^\psi)) V D^{-n} \right)_n$  は射影系をなす. それを  $\eta^\psi$  と書くことにする.

2.  $\eta^\psi$  に対応する  $K_\psi[[T]]^{\oplus 2}$  の元が存在し、それも同じ記号で書くとすると、

$$\eta^\psi = (L_{p,\alpha}(f, \psi; T), L_{p,\beta}(f, \psi; T))$$

が成り立つ。

3.  $(\theta_n^\psi, N_n(\theta_{n-1}^\psi)) \in \text{Im} W_n$  が成り立つ。よって、 $\exists! \xi_n^\psi \in \underline{\Lambda}_{n,\psi}^{\oplus 2} / \ker W_n$ 。

4. 自然な全射  $\underline{\Lambda}_{n+1,\psi}^{\oplus 2} / \ker W_{n+1} \rightarrow \underline{\Lambda}_{n,\psi}^{\oplus 2} / \ker W_n$  が存在し、その射に関して  $(\xi_n^\psi)_n$  は射影系をなす。また、 $\varprojlim_n \underline{\Lambda}_{n,\psi}^{\oplus 2} / \ker W_n \cong \Lambda_\psi^{\oplus 2}$  である。 $(\xi_n^\psi)_n$  の射影極限を  $\xi^\psi \in \Lambda_\psi^{\oplus 2}$  と書くことにする。

5.  $M_2(K[[T]])$  内の列  $(W_n B^{-n} V)_n$  は  $M_2(K[[T]])$  の行列に収束する。

証明は、1. については命題 2.6 から、2. については  $p$  進  $L$  関数の定義から示せる。

3. と 4. については命題 2.6 から帰納的に示せる。

5. については、これが  $\varprojlim_n M_2(Q_n)$  の行列となることがわかり、分母の増大度を見る事によって  $M_2(K[[T]])$  の行列を与えることが示せる。

さて、この定理を使うと、 $B^{-n} V = V D^{-n}$  である事により、次が言える。これが本稿の主結果である。

**定理 2.10.**  $M_2(K[[T]])$  の元の列  $(W_n B^{-n} V)_n$  は  $M_2(K[[T]])$  内で収束する。その極限を  $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n B^{-n} V =: L \in M_2(K[[T]])$  と置き、 $L$  の成分を

$$L = \begin{pmatrix} \log_\alpha^\sharp(T) & \log_\beta^\sharp(T) \\ \log_\alpha^b(T) & \log_\beta^b(T) \end{pmatrix}$$

と書く。また、 $\xi^\psi$  の成分を  $\xi^\psi = (L_p^\sharp(f, \psi; T), L_p^b(f, \psi; T)) \in \Lambda_\psi^{\oplus 2}$  と書く。この時、

$$\begin{cases} L_{p,\alpha}(f, \psi; T) = L_p^\sharp(f, \psi; T) \log_\alpha^\sharp(T) + L_p^b(f, \psi; T) \log_\alpha^b(T), \\ L_{p,\beta}(f, \psi; T) = L_p^\sharp(f, \psi; T) \log_\beta^\sharp(T) + L_p^b(f, \psi; T) \log_\beta^b(T) \end{cases}$$

が成り立つ。

以上の議論は、主張 2.7 と主張 2.8 が両方成り立つという仮定の下行われた。論文 [8] において重要なのは次の結果である。

**定理 2.11.**  $p \geq k - 1$  と仮定する。この時、主張 2.7 が成り立つ。また、主張 2.8 が成り立つような  $\{N_n\}$  が存在する。

よって、 $p \geq k - 1$  の場合には、重さが  $k \geq 2$  の保型形式に対して Sprung 流の  $\sharp/b$   $p$  進  $L$  関数が構成できる。

注. 論文 [8] においては、仮定  $p \geq k - 1$  の代わりに  $v(\alpha) = v(\beta)$  を仮定した場合における、別の手法の  $p$  進  $L$  関数の構成についても紹介される予定である。

## § 3. 証明の概略

ここでは定理 2.11 の証明の概略を述べる. 証明には  $q$ -analogue の二項係数の計算とモジュラー記号の性質が使われる.

以下,  $n \geq 1$  を固定する.  $g = \gamma^{p^n}$  と置くと次が成り立つことがわかる.

補題 3.1.  $i, j \in \mathbb{Z}$  に対し,

$$\omega_n^{(i)} \equiv g^{j-i} - 1 \pmod{\omega_n^{(j)}}.$$

ここで  $q$ -analogue の記号を少し用意する.

定義 3.2.  $j \geq 0$  に対し  $[j]_g = g^j - 1$  と定義する. また,  $q$ -階乗を

$$[j]_g! := [1]_g [2]_g \cdots [j]_g$$

と定義し,  $q$ -二項係数を

$$\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}_g := \frac{[i]_g!}{[j]_g [i-j]_g}$$

と定義する.

注. この定義は一般の  $q$ -analogue とは異なる. 一般的な  $q$ -analogue では  $[j]_g := \frac{g^j - 1}{g - 1}$  と定義される. しかし, 二項係数に関してはどちらの定義でも同じものとなる.

## § 3.1. 主張 2.7 の証明について

はじめに,  $\underline{\theta}_n = (\theta^{(j)})_{0 \leq j \leq k-2} \in \bigoplus_{j=0}^{k-2} \mathcal{O}[T]/(\omega_n^{(j)}) \subset K[T]/(\omega_n)$  が与えられているとする. ここで,  $\underline{\theta}^{(j)} \in \mathcal{O}[T]/(\omega_n)$  かどうかを考えたい. 持ち上げを考えて,  $\theta^{(0)} \in \mathcal{O}[T]$  であると仮定する. すると,

$$(\theta^{(j)})_{0 \leq j \leq k-2} \in \mathcal{O}[T]/(\omega_n) \Leftrightarrow (\theta^{(j)} - \theta^{(0)})_{0 \leq j \leq k-2} \in \mathcal{O}[T]/(\omega_n)$$

が成り立つ. ところで, この右辺の  $j = 0$  成分は 0 であるので,  $\omega_n^{(0)}$  倍写像  $K[T]/(\omega_n/\omega_n^{(0)}) \rightarrow K[T]/(\omega_n)$  の像に入っている.

よって,  $\theta^{(j)}(1) := \frac{1}{[j]_g} (\theta^{(j)} - \theta^{(0)})$  と置くと

$$(\theta^{(j)})_{0 \leq j \leq k-2} \in \mathcal{O}[T]/(\omega_n) \Leftrightarrow (\theta^{(j)}(1))_{1 \leq j \leq k-2} \in \mathcal{O}[T]/(\omega_n^{(1)})$$

が成り立つ. ここで,  $\omega_n^{(1)} := \omega_n/\omega_n^{(0)}$  と置いた. これを繰り返して, 以下, 帰納的に  $m \geq 1$  に対して

$$\theta^{(j)}(m+1) := \frac{\theta^{(j)}(m) - \theta^{(m)}(m)}{[j-m]_g}$$

と定義すると次が成り立つことがわかる.

命題 3.3. 次は同値:

1.  $\underline{\theta} \in \mathcal{O}[T]/(\underline{\omega}_n)$ ,
2.  $\theta^{(m)}(m) \in \mathcal{O}[T]/(\omega_n^{(m)})$  ( $m = 1, 2, \dots, k-2$ ).

モジュラー記号の性質と  $q$ -二項係数の性質により, 上の命題の条件 2. は

$$\frac{(g-1)^m}{[m]_g!} \in \mathbb{Z}_p$$

から従う事を示す事が出来る. これは  $p \geq k-1$  の場合に成り立つ.

### § 3.2. 主張 2.8 の証明について

初等的な議論により

$$v_n = p^{k-2} \sum_{i=0}^{k-2} \prod_{j \neq i} \frac{g^{-j}(1+T)^{p^n} - 1}{[i-j]_{g^p}}$$

として主張を確かめれば十分であることがわかる. この場合も  $q$ -二項係数の計算により確かめられる. ただし, 途中の議論において  $0 \leq d \leq k-2$  に対して

$$\frac{p^d(g-1)^d}{[d]_{g^p}!} \in \mathbb{Z}_p^\times$$

を示す必要があり, ここで仮定  $p \geq k-1$  が使われる.

### References

- [1] Amice, Y. and Vélou, J., Distributions  $p$ -adiques associées aux séries de Hecke, *Asterisque* **24-25** (1975), Soc. Math. France., 119–131.
- [2] Kato, K.,  $p$ -adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms, *Cohomologies  $p$ -adiques et applications arithmétiques. III*, *Astérisque* **295** (2004), 117–290.
- [3] Kurihara, M. and Pollack, R., Two  $p$ -adic  $L$ -functions and rational points on elliptic curves with supersingular reduction,  *$L$ -functions and Galois representations*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **320**, Cambridge Univ. Press., 300–332.
- [4] Lei, A., Iwasawa theory for modular forms at supersingular primes, *Compos. Math.*, **147** (2011), no.3, 803–838.
- [5] Lei, A., Loeffler, D., and Zerbes, S., Wach modules and Iwasawa theory for modular forms, *Asian J. Math.*, **14** (2010), no. 4, 475–528.
- [6] B. Mazur and J. Tate, Refined Conjectures of the "Birch and Swinnerton-Dyer type", *Duke. Math. J.* **54** (1987), 711–750.
- [7] Mazur, B., Tate, J. and Teitelbaum, J., On  $p$ -adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer, *Invent. Math.*, **84** (1986), no. 1, 1–48.

- [8] Otsuki, R. and Sprung, F., On the  $p$ -adic  $L$ -function of a modular form of higher weight, in preparation.
- [9] Pollack, R., On the  $p$ -adic  $L$ -function of a modular form at a supersingular prime, *Duke Math. J.*, **118** (2003), no. 3, 523–558.
- [10] Sprung, F., Iwasawa theory for elliptic curves at supersingular primes: A pair of main conjectures, *J.Number Theory*, **132** (2012), no. 7, 1483–1506.
- [11] Sprung, F., On pairs of  $p$ -adic  $L$ -functions for weight two modular forms, *Algebra and Number Theory*, **11** (2017), no. 4, 885–928.
- [12] Višik, M., Non-archimedean measures associated with Dirichlet series (in Russian), *Mat. Sb.(N. S. )* **99(141)** No. 2 (1976), 248–260, 296.