RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B78 (2020), 155–178

超楕円 σ 関数による戸田格子の周期解と擬周期解について
Periodic and quasi-periodic solutions of Toda lattice via hyperelliptic σ functions

By

松谷茂樹 *
Shigeki Matsutani

Abstract

In this report, I summarize results in the paper (Kodama, Matsutani, Previato, Ann. Inst. Fourier 63 (2013) 655-688) to pose a problem to give an explicit relation between periodic and quasi-periodic solutions of Toda lattice. For a hyperelliptic curve X_g of genus g, we have a quasi-periodic solution of Toda lattice in terms of the hyperelliptic σ function and its addition theorem. Using the division polynomial of X_g, we find $2N$-division points in its Jacobi variety and then have N-periodic solution of Toda-lattice. It is well-known that the N-periodic solution is associated with a hyperellptic curve $\hat{X}_{g,N-1}$ of genus $N-1$ rather than g. However it is not clear how X_g and $\hat{X}_{g,N-1}$ are connected geometrically, though the problem is very simple and natural. In this report, after I give a review of the recent development of σ function theory of higher genus and show the summary of our previous work, I give some comments on the problem.

§1. 導入

種数 1 の戸田格子の解は Weierstrass の楕円 σ 関数による加法定理から直接得られる事が知られている．$\wp(u) = -d^2 \log \sigma(u)/du^2$ に気を付け，加法定理である式 $\wp(u) - \wp(v) = \sigma(u+v)\sigma(u-v)/\sigma(u)^2\sigma(v)^2$ を log を取って二回微分をすれば得られる．つまり，$u = na+t$, $v = a$ とし，$q_n(t) := -\log(\wp(na+t) - \wp(a))$ と考え $-\ddot{q}_n(t) = \mathrm{e}^{-q_{n+1}(t)} - 2\mathrm{e}^{-q_n(t)} + \mathrm{e}^{-q_{n-1}(t)}$ である．

この Weierstrass の楕円 σ 関数は Weierstrass 自身や Klein により種数 g の超楕円曲線 X_g に一般化されており，近年，その加法定理なども研究されている．特に，大西に

Received January 19, 2019. Revised June 3, 2019.
2010 Mathematics Subject Classification(s): 14H55, 14H50, 14K25, 14H40
Key Words: *division point, toda equation, hyperelliptic curve, Abel functions.*
This work was supported by KAKENHI (16K05187).
*金沢大学　電子情報通信学系. 2019.4.1 佐世保工業高等専門学校より異動
e-mail:s-matsutani@se.kanazawa-u.ac.jp

© 2020 Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University. All rights reserved.

よって得られた超楕円 σ 関数の Frobenius-Stickelberger 関係式 (Y. Ônishi, Proc. Edin. Math. Soc. 48 (2005) 705-742)[Ô] とそれに基づく加法定理の一般化 (Eilbeck, Enol'skii, M, Ônishi, Previato, Crelle's J. 619 (2008) 37-48)[EEMOP] を利用する事により，上記の種数 1 の戸田格子の擬周期解の導出は種数 g の超楕円関数に直接的な一般化ができる．

また，その一般化 Frobenius-Stickelberger 関係式から得られる $2N$ 等分点を利用するとこの枠組みで擬周期解に制限を加えることで戸田格子の N 周期解が得られる ($N > g$).

他方，戸田格子の N 周期解に対しては Kac-van Moerbeke により種数 $(N-1)$ の超楕円曲線 $\hat{X}_{g,N-1}$ を得られることが判っている．このように種数 g と種数 $(N-1)$ の 2 つの曲線 X_g と $\hat{X}_{g,N-1}$ が得られる．$2N$ 等分点が満たす方程式と $\hat{X}_{g,N-1}$ の定義方程式を直接的に関係づけられるように思われるが，そのような対応は現在まだ得られていない．そもそも，戸田方程式の $g=1$ の時に相当する Poncelet 問題の場合でさえ，十分な研究がなされているとは言えない．したがって，X_g と $\hat{X}_{g,N-1}$ の関係はとても興味深いものと考えている．

これらの事は，Kodama，Matsutani，Previato, Ann. Inst. Fourier 63 (2013) 655-688 [KMP] で報告した．本報告では [KMP] の内容を概観し今後の研究の方向性を提示した．

謝辞： 審査員より誤植も含め適切な指摘を多数頂いた．ここに感謝の意を表したい．

§ 2. 楕円関数の加法定理と戸田格子

§ 2.1. 楕円関数の復習：記法と基本的な設定

まず，Weierstrass 楕円関数論 [WW] に従って，楕円曲線として

$$X_1 := \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{array}{l} y^2 = x^3 + \lambda_2 x^2 + \lambda_1 x + \lambda_0 \\ \quad\;\; = (x-e_1)(x-e_2)(x-e_3) \end{array} \right\} \cup \{\infty\}.$$

と，これに対応する Affine 環 $R_1 := \mathbb{C}[x,y]/(y^2 - x^3 - \lambda_2 x^2 - \lambda_1 x - \lambda_0)$ を取り扱う．ここで $\overline{y} := 2y$, $\overline{x} := x - \dfrac{\lambda_2}{3}$ とすれば，より厳密な Weierstrass 標準形に一致させることができる．この変換は自明なために，本研究では，上記の標準形を考察し，これを Weierstrass の標準形と呼ぶ．

楕円曲線 X_1 の第一種微分 (正則 1 形式) と第二種微分を次のように記す：

$$du := \nu^{\mathrm{I}} := \frac{dx}{2y}, \quad \nu^{\mathrm{II}} := \frac{xdx}{2y}.$$

これらの経路積分を実行するためには，X_1 の経路空間 $\{\gamma : [0,1] \to X_1 : \text{連続}\}$ の homotopy 商空間の Abel 化したものである X_1 の Abel 被覆空間 $\widetilde{X}_1$ を用意する必要がある．これらには自然な射影 $\kappa' : \widetilde{X}_1 \to X_1$ と基本領域を一つ固定することで，連続的な埋

め込み $\iota : X_1 \to \widetilde{X}_1$ が定まる．これらにより $\gamma \in \widetilde{X}_1$ ($\gamma(0) = \infty$, $\gamma(1) = (x, y) \in X_1$) に対して，積分

$$\widetilde{w} : \widetilde{X}_1 \to \mathbb{C}, \quad u = \widetilde{w}(x, y) = \int_{\infty}^{(x,y)} \nu^{\mathrm{I}} = \int_{\gamma} \nu^{\mathrm{I}}$$

が定義される．第一種 (不完全) 楕円積分と呼ばれているものである．この積分に対応して無限遠点から分岐点への積分を

$$\omega_i := \int_{\infty}^{(e_i,0)} \nu^{\mathrm{I}}, \quad (i = 1, 2, 3)$$

と定義する．この ω_i は Homology $H_1(X_1, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\beta$ の基底 α, β に対する周期積分

$$\omega' := \frac{1}{2}\int_{\alpha} \nu^{\mathrm{I}} = \omega_1, \quad \omega'' := \frac{1}{2}\int_{\beta} \nu^{\mathrm{I}} = \omega_3$$

と見ることができる．この周期積分により格子 (非規格化格子と規格化格子)

$$\Gamma = 2\mathbb{Z}\omega' + 2\mathbb{Z}\omega'' \subset \mathbb{C}. \quad \Gamma^o = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau, \quad (\tau := \omega_3/\omega_1)$$

が得られ，(非規格化及び規格化)Jacobi 多様体が

$$\kappa : \mathbb{C} \to \mathcal{J}_1 = \mathbb{C}/\Gamma, \quad \kappa^{\circ} : \mathbb{C} \to \mathcal{J}_1^{\circ} = \mathbb{C}/\Gamma^{\circ},$$

と定義され，双有理な Abel-Jacobi 写像

$$w : X_1 \to \mathcal{J}_1 \quad (w(P) := \kappa\widetilde{w}(\iota(P))), \quad w^{\circ} : X_1 \to \mathcal{J}_1^{\circ} \quad (w^{\circ}(P) := \kappa^{\circ}\widetilde{w}^{\circ}(\iota(P)))$$

が得られる．但し，$\widetilde{w}^{\circ} := \dfrac{1}{2\omega'}\widetilde{w}$ である．周期積分に対応して，第二種完全楕円積分を

$$\eta' := \eta_1,\ \eta'' := \eta_3,\ \eta_i := \int_{\infty}^{(e_i,0)} \nu^{\mathrm{II}}$$

とすると，Legendre 関係式が

$$\omega''\eta' - \omega'\eta'' = \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$$

として得られる．これが Jacobi 多様体の Symplectic 構造を決定する．

代数的空間と解析的空間の対応関係は次の図により定まる．但し，$LX_1(\infty)$ は ∞ を固定点とした loop 空間である[1]．

自然な全射と $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ の作用	自然な全射と $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ の作用
X_1 の Abel 被覆 $\tilde{X}_1$	$\mathcal{J}_1$ の Abel 被覆 $\mathbb{C}^g$
$\kappa' : \widetilde{X}_1 \to X_1$	$\kappa : \mathbb{C} \to \mathcal{J}_1 = \mathbb{C}/\Gamma$
$\widetilde{X}_1 \supset LX_1(\infty) \cong (\mathbb{Z}\alpha \oplus \mathbb{Z}\beta)$	$\Gamma = \mathbb{Z}(2\omega') + \mathbb{Z}(2\omega'')$
$\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \curvearrowright$ この表現	$\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \curvearrowright \Gamma$, $\mathcal{J}_1$

[1] $\gamma(0) = \infty$ とする S^1 の X_1 への連続なはめ込み $\gamma : S^1 \looparrowright X^1$ の集合を homotopy 同値で割ったの商空間を $LX_1(\infty)$ としている．

格子の基本 vector や Homology の基底には SL(2,$\mathbb{Z}$) が作用するが，X_1 及び $\mathcal{J}_1$ はその作用に依存しない．そのために，X_1 及び $\mathcal{J}_1$ の有理関数を得るためには，$\mathbb{C}$ 上の整関数も SL(2,$\mathbb{Z}$) に不変であることが重要となる．σ 関数 [WW]

$$\sigma(u) = 2\omega_1 \exp\left(\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}\right) \frac{\theta_1\left(\frac{u}{2\omega_1}\right)}{\theta_1'^0}, \quad \theta_1(z,\tau) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\sqrt{-1}\pi\tau\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+\sqrt{-1}\pi(2n+1)\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$

は正にそのような関数として定まる．σ 関数は自然な Jacobi 多様体の直線束の基底であることが判る．

σ 関数は次の性質を持つ:

1. 並進移動公式: $\Omega_{m,n} := 2m\omega_1 + 2n\omega_3$:
$$\sigma(u+\Omega_{m,n}) = (-1)^{m+n+mn} \exp\left((m\eta_1 + n\eta_3)(2u+\Omega_{m,n})\right)\sigma(u).$$
2. σ 関数の零点: $\{\text{zeros of } \sigma\} \equiv 0 \bmod \Gamma$,
3. σ の原点での展開の第一項は u となる．つまり，$\sigma = u+$ (u について高次項),
4. SL$(2,\mathbb{Z})$ の作用に不変.

σ 関数が得られれば，それにより Weierstrass の楕円 $\wp$ 関数が定義できる：

$$\wp(u) = -\frac{d^2}{du^2}\log\sigma(u).$$

これにより，Jacobi 逆公式として，$u = w(x,y)$ に対して

$$(x,y) = (\wp(u), \wp_u(u)) \tag{2.1}$$

を得る．但し，$\wp_u(u) := \dfrac{d}{du}\wp(u)$.

§2.2. 楕円関数の加法定理と戸田格子

楕円関数の加法定理は

$$x(u) - x(v) = \wp(u) - \wp(v) = -\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma(u)^2\sigma(v)^2} \tag{2.2}$$

と知られている．これに作用素として $\dfrac{d^2}{du^2}\log$ を両辺に作用させると

$$-\frac{d^2}{du^2}\log(\wp(u)-\wp(v)) = \wp(u+v) - 2\wp(u) + \wp(u-v)$$

を得る．右辺は $= (\wp(u+v)-\wp(v)) - 2(\wp(u)-\wp(v)) + (\wp(u-v)-\wp(v))$ ともなる．そこで $u = na+t$ で $v = a$ とし，$q_n(t) := q(n,t) := \log(\wp(na+t)-\wp(a))$,

$$-\frac{d^2}{du^2}q_n(t) = \mathrm{e}^{q_{n+1}(t)} - 2\mathrm{e}^{q_n(t)} + \mathrm{e}^{q_{n-1}(t)} \tag{2.3}$$

として戸田格子が得られる．但し，すべての量は一般的には複素値である事に気を付けるべきである．つまり，この議論では戸田の原論文 [To] で行っている実値性を考慮していない．しかし，戸田格子のある種の本質的な部分を抽出している [Mat2].

加法定理 (2.2) をより一般化したものが次の Hermite-Frobenius-Stickelberger 公式と呼ばれるものである [WW, p.458]：$u^{(i)} := w(x_i, y_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ に対して

$$\begin{aligned} &\frac{\sigma(u^{(0)} + u^{(1)} + \cdots + u^{(n)}) \prod_{i<j} \sigma(u^{(i)} - u^{(j)})}{\sigma^{n+1}(u^{(0)})\sigma^{n+1}(u^{(1)}) \cdots \sigma^{n+1}(u^{(n)})} \\ &= c_n \begin{vmatrix} 1 & \phi_1(x_0, y_0) & \cdots & \phi_n(x_0, y_0) \\ 1 & \phi_1(x_1, y_1) & \cdots & \phi_n(x_1, y_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \phi_1(x_n, y_n) & \cdots & \phi_n(x_n, y_n) \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

を得る．但し $\phi_j(x, y) = d^{j-1}x/du^{j-1}$ する：$\phi_1(x, y) = x$, $\phi_2(x, y) = y$, $\phi_3(x, y) = 3x^2 + 2x$, $\phi_4(x, y) = 6xy + 2y$, $\cdots$．この公式から補題として得られるものが ψ 関数 $\psi_n(u) = \dfrac{\sigma(nu)}{\sigma(u)^{n^2}}$ に対する Kiepert の式 [WW, p.460]：

$$\psi_n(u) = c_n \begin{vmatrix} \phi_2(x, y) & \phi_3(x, y) & \cdots & \phi_n(x, y) \\ \phi_3(x, y) & \phi_4(x, y) & \cdots & \phi_{n+1}(x, y) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_n(x, y) & \phi_{n+1}(x, y) & \cdots & \phi_{2n-2}(x, y) \end{vmatrix}$$

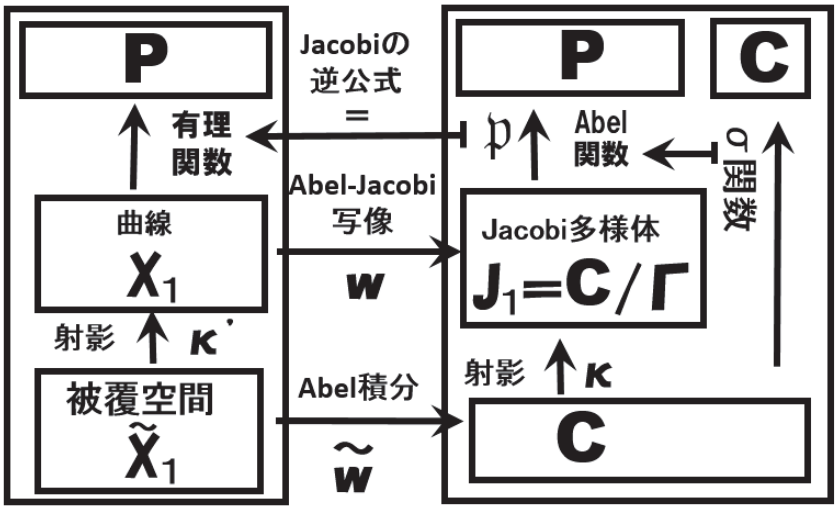
である．この時，$\psi_n(u_0) = 0$ となる $u_0 (\neq 0 \bmod \Gamma) \in \mathbb{C}$ を考える．σ 関数の零点に気を付けると u_0 は n 倍したら格子点となる点 $nu_0 = 0 \bmod \Gamma$ となる．この u_0 に対して，$\wp(t)$ は $\wp(t + nu_0) = \wp(t)$ となり，戸田格子の楕円 n 周期解を得る．つまり，$q_\ell(t) := \log(\wp(\ell u_0 + t) - \wp(u_0))$ は $q_\ell(t) = q_{\ell+n}(t)$ を満たす．

実はこの戸田格子の周期解は，二つの楕円に内接及び外接する多角形の Poncelet の問題と深い関係があることが知られている [KMP]．Griffiths-Harris は，閉じる条件が $\psi_n = 0$ である事を導いている [GH]． Poncelet の問題は内接点を楕円のどの点から出発しても定理が成り立つ．つまり，1 パラメータ分の自由度があり，それが戸田方程式の時間に相当し，多角形の各頂点の位置が戸田方程式の格子点に相当する．

Fagnano, Euler から始まる楕円関数の代数的研究は Abel，Jacobi に引き継がれ，楕円積分の超越的性質と代数的性質の解明がその研究の主たる目標となった．Weierstrass は Abel に導かれ，師 Gudermann の「(超越的な) 関数とは級数として定義されるべき」という思想を解析学を精密かつ厳密化することで具現化し，Abel，Jacobi が目標とした楕円関数論を σ 関数論として構成・完成させたのである．それは (曲線を 1 つ固定すると) 次の図に集約される．図に示すように，Weierstrass の楕円関数論では，曲線側に相当する代数方程式により定まる代数的な空間と積分によって定まる超越的な Jacobi 多様体の

空間の両方が統一的に記述され，それらに関わる元が代数的な性質と超越的な性質を持つ事が，示される．それも (数値的にも) 具体性をもって定まる．

両方の世界を結び付けるのが，楕円 (Abel) 積分や Abel-Jacobi 写像と Jacobi の逆公式である．片方の空間で一見複雑に見える関係が，他方の空間では単純に記述できる現象が多々観測できる．戸田格子を含め，幾つかの可積分系の本質はここにあるわけであるが，代数曲線に関わる可積分系でも解明されていない本質的な問題が幾つか残っていると考えている．



§3. 超楕円曲線とその基本量

ここでは [B1, B2, BEL, Ô2] に従って超楕円曲線の基本量について述べる．Weierstrass の楕円関数論に倣って，超楕円曲線においても Weierstrass の標準形で定まる曲線，

$$X_g := \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{array}{l} y^2 = x^{2g+1} + \lambda_{2g}x^{2g} + \lambda_{2g-1}x^{2g-1} + \cdots + \lambda_1 x + \lambda_0 \\ \quad\;\; = \prod_{i=1}^{2g+1}(x - e_i) \end{array} \right\} \cup \{\infty\}$$

とその Affine 環

$$R_g := \mathbb{C}[x,y]/(y^2 - (x^{2g+1} + \lambda_{2g}x^{2g} + \lambda_{2g-1}x^{2g-1} + \cdots + \lambda_1 x + \lambda_0))$$

を考える．無限遠点での局所パラメータ t_∞ に対して，

$$x = \frac{1}{t_\infty^2}, \quad y = \frac{1}{t_\infty^{2g+1}}(1 + d_{>0}(t_\infty))$$

となるので，$\mathrm{wt}(x) = 2$, $\mathrm{wt}(y) = 2g+1$ とする重みが x と y に定義される．また，超楕円対合射を i_H で表す：($\iota_H : X_g \to X_g$ として，$i_H(x,y) = (x,-y)$).

無限遠点は Weierstrass 点となり，非 gap 列は次の表のようになる．これらを ϕ_i とする．但し，$\mathrm{wt}(\phi_i) < \mathrm{wt}(\phi_j)$ $(i < j)$ で $\mathbb{C}$ 線型空間として $R_g = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathbb{C}\phi_i$ となるように選ぶ．

表 1 ：超楕円曲線の非 gap 列　ϕ_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$

g	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	-	x	y	x^2	xy	x^3	x^2y	x^4	x^3y	x^5	x^4y	x^6	x^5y	x^7	x^6y
2	1	-	x	-	x^2	y	x^3	xy	x^4	x^2y	x^5	x^3y	x^6	x^4y	x^7	x^5y
3	1	-	x	-	x^2	-	x^3	y	x^4	xy	x^5	x^2y	x^6	x^3y	x^7	x^4y

この X_g には g 次元 $\mathbb{C}$ 線型空間値の正則な微分 1-形式 ν^{I} (第一種微分) が存在し，その成分は

$$du_i := {\nu^{\mathrm{I}}}_i := \frac{x^{i-1}dx}{2y}, \quad (i = 1, 2, \ldots, g)$$

となる．同様に第二種微分を $\nu^{\mathrm{II}} := {}^t({\nu^{\mathrm{II}}}_1, {\nu^{\mathrm{II}}}_2, \cdots, {\nu^{\mathrm{II}}}_g)$ とする．各 ${\nu^{\mathrm{II}}}_i$ は $\tilde{\nu}_i^{\mathrm{II}} := \dfrac{x^{g+i-1}dx}{2y}$ $(i = 1, \ldots, g)$ を導入すると，

$$\nu^{\mathrm{II}} := \Lambda \begin{pmatrix} \nu^{\mathrm{I}} \\ \tilde{\nu}^{\mathrm{II}} \end{pmatrix}$$

と書くことができる．但し，$2g \times g$ 行列である Λ は

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_3 & 2\lambda_4 & 3\lambda_5 & \cdots & (g-1)\lambda_{g+1} & g\lambda_{g+2} & (g+1)\lambda_{g+3} & \cdots & (2g-3)\lambda_{2g-1} & (2g-2)\lambda_{2g} & (2g-1)\lambda_{2g+1} \\ & 0 & \lambda_5 & 2\lambda_6 & \cdots & (g-2)\lambda_{g+2} & (g-1)\lambda_{g+3} & g\lambda_{g+4} & \cdots & (2g-4)\lambda_{2g} & (2g-3)\lambda_{2g+1} & 0 \\ & & 0 & \lambda_7 & \cdots & (g-3)\lambda_{g+3} & (g-2)\lambda_{g+4} & (g-1)\lambda_{g+5} & \cdots & (2g-5)\lambda_{2g+1} & 0 & \\ & & & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 & & \\ & 0 & & & & \lambda_{2g-1} & 2\lambda_{2g} & 3\lambda_{2g+1} & & & & \\ & & & & & 0 & \lambda_{2g+1} & 0 & & & 0 & \end{pmatrix}$$

としている．

ここで X_g での Abel 積分を考える．そのために楕円の場合と同様に X_g の Abel 被覆空間 $\widetilde{X}_g$ を用意する ($\kappa : \widetilde{X}_g \to X_g$, $\iota : X_g \to \widetilde{X}_g$)．不完全超楕円積分として Abel 積分

$$\widetilde{w} : \mathcal{S}^k \widetilde{X}_g \to \mathbb{C}^g, \quad \widetilde{w}(\gamma_{\infty,P_1}, \gamma_{\infty,P_2}, \ldots, \gamma_{\infty,P_k}) = \sum_{i=1}^{k} \widetilde{w}(\gamma_{\infty,P_i}), \quad \widetilde{w}(P) := \int_{\gamma_{\infty,P}} \nu^{\mathrm{I}}$$

を考える．$\mathcal{S}^k \widetilde{X}_g$ は k 次の対称積 (直積 $\widetilde{X}_g^k$ を対称群の作用で割ったもの) を意味している．$k = g$ のとき，$\widetilde{w}$ は双有理写像となる．

Homology $H_1(X_g, \mathbb{Z})$ の標準基底を $\{\alpha_i, \beta_i\}_{i=1,\ldots,g}$ ($\langle \alpha_i, \beta_j \rangle = \delta_{ij}$, $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \langle \beta_i, \beta_j \rangle = 0$) とし，

$$H_1(X_g, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{i=1}^{g} \mathbb{Z}\alpha_i \oplus \mathbb{Z}\beta_i$$

とする．(具体的には，例えば Mumford の p.3.76 [Mu] を取る．) これらの半周期積分を次で定義する：

$$\omega'_{ij} := \frac{1}{2} \int_{\alpha_i} \nu^{\mathrm{I}}{}_j, , \quad \omega''_{ij} := \frac{1}{2} \int_{\beta_i} \nu^{\mathrm{I}}{}_j.$$

このとき，Riemann の基本定理により $\tau = \omega'^{-1}\omega''$ が対称でかつ $\mathrm{Im}\tau$ が正定値となることが判り，また，楕円の時と同様に ω'_{ij} や ω''_{ij} も ∞ 点から分岐点までの積分で書くことができる．

これらにより，非規格化格子と規格化格子，

$$\Gamma := \{\omega' n + \omega'' m \mid n, m \in \mathbb{Z}^g\}, \quad \Gamma^\circ := \{n + \tau m \mid n, m \in \mathbb{Z}^g\}$$

とそれに伴う超楕円の Jacobi 多様体 (非規格化及び規格化 Jacobi 多様体) が

$$\kappa : \mathbb{C}^g \to \mathcal{J}_g := \mathbb{C}^g/\Gamma, \quad \kappa^\circ : \mathbb{C}^g \to \mathcal{J}_g^\circ := \mathbb{C}^g/\Gamma^\circ$$

として X_g に対して定まる．

第一種積分に対応して，第二種積分も導入する：

$$\eta'_{ij} := \frac{1}{2} \int_{\alpha_i} \nu^{\mathrm{II}}{}_j, \quad \eta''_{ij} := \frac{1}{2} \int_{\beta_i} \nu^{\mathrm{II}}{}_j,$$

このとき Legendre 関係式

$$\omega'^t \eta'' - \omega''^t \eta' = \frac{\pi\sqrt{-1}}{2} I_g$$

を満たし，これが Jacobi 多様体の symplectic 構造を定める．これで最低限の準備が整ったので，超楕円 σ 関数と超楕円 $\wp$ 関数を導入する．

§4. 超楕円 σ 関数と超楕円 $\wp$ 関数

§4.1. $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$ の作用と σ 関数

ここで $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$

$$\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathrm{GL}(g,\mathbb{Z}), ad-bc = I_g \right\}$$

の作用を考える．

楕円のときの $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ の作用と同じく $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$ の元は，α, β の取り方と，格子の基本 vector の取り方に作用する．この $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$ の作用を考えると代数的空間と解析的空間の対応関係は次の図により定まる．

自然な全射と $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$ の作用	自然な全射と $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$ の作用
X_g の Abel 被覆 $\tilde{X}_g$	$\mathcal{J}_g$ の Abel 被覆 $\mathbb{C}^g$
$\kappa' : \widetilde{X}_g \to X_g$	$\kappa : \mathbb{C}^g \to \mathcal{J}_g = \mathbb{C}^g/\Gamma$
$\widetilde{X}_g \supset LX_g(\infty) \cong \bigoplus_{i=1}^{g} (\mathbb{Z}\alpha_i \oplus \mathbb{Z}\beta_i)$	$\Gamma = \sum_{i=1}^{g} \mathbb{Z}(2\omega_i') + \mathbb{Z}(2\omega_i'')$
$\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z}) \curvearrowright$ この表現	$\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z}) \curvearrowright \Gamma$, $\mathcal{J}_g$

σ 関数の導入の動機は $\mathcal{J}_g$ に関わる $\mathbb{C}^g$ 上の整関数を導入することで $\mathcal{J}_g$ や $\mathcal{S}^g X_g$ での有理関数をその整関数の比で表現することにある．その際，上の図より，$\mathcal{J}_g$ や $\mathcal{S}^g X_g$ での有理関数は $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$ の作用に不変であることが自明に判る．そのため，整関数が $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$ に不変であるという性質は，本来持つべき性質である．σ 関数はそのような関数である．(一般に θ 関数はそのような性質を持たない．)

ここで $u = {}^t(u_1, u_2, \ldots, u_g) \in \mathbb{C}^g$ とする．このとき，超楕円 σ 関数は次のように $\mathbb{C}^g$ 上の整関数として定まる [B1, B2, BEL, Kl, Ô2]：

(4.1)

$$\begin{aligned}\sigma(u) &= a_0 \exp(-\tfrac{1}{2}\ {}^t u \eta' \omega'^{-1} u)\theta[\delta]\,(\frac{1}{2}\omega'^{-1}u;\ \omega'^{-1}\omega'') \\ &= a_0 \exp(-\tfrac{1}{2}\ {}^t u \eta' \omega'^{-1}\ u) \\ &\qquad \times \sum_{n\in\mathbb{Z}^g} \exp\left[\pi\sqrt{-1}\left\{\ {}^t(n+\delta'')\omega'^{-1}\omega''(n+\delta'') +\ {}^t(n+\delta'')(\omega'^{-1}u+\delta')\right\}\right],\end{aligned}$$

但し a_0 は非零のある定数で，$\theta[\delta](z,\tau)$ は Riemann の θ 関数である．また，δ は θ 特性値と呼び，今の場合，半格子に相当する点を示す．

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta'' \\ \delta' \end{bmatrix}, \quad \delta' :=\ {}^t\left[\frac{g}{2}\ \frac{g-1}{2} \cdots \frac{1}{2}\right], \quad \delta'' :=\ {}^t\left[\frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2}\right].$$

ここで，記法として $u \in \mathbb{C}^g$ に対して，$\mathbb{R}^g$ の元 u'，u'' を

$$u = 2\omega' u' + 2\omega'' u''$$

とする式で定める．このとき，平行移動公式のために $\mathbb{C}^g$ の点 u, v, と格子 Γ の点 ℓ $(= 2\omega'\ell' + 2\omega''\ell'')$ に対して，

$$\begin{aligned} L(u,v) &:= 2\ {}^t u(\eta' v' + \eta'' v''), \\ \chi(\ell) &:= \exp[\pi\sqrt{-1}\big(2({}^t\ell'\delta'' - {}^t\ell''\delta') + {}^t\ell'\ell''\big)]\ (\in \{1, -1\}). \end{aligned}$$

を定義しておく．

σ は以下の性質を満たす：

1. σ は次の並行移動公式を満たす：格子 Γ の点 ℓ に対して

$$\sigma(u+\ell) = \sigma(u)\exp(L(u+\frac{1}{2}\ell,\ell))\chi(\ell). \tag{4.2}$$

これは楕円のときと同様に擬周期性とも呼ばれるものである．

2. σ の零点集合は，$\Theta_{g-1} = (\mathcal{W}_{g-1} \cup [-1]\mathcal{W}_{g-1}) = \mathcal{W}_{g-1}$ となる．但し

$$\mathcal{W}_k := \kappa \circ \widetilde{w} \circ \iota(\mathcal{S}^k X_g).$$

3. σ の原点での展開の主要項は

$$u_i = \frac{1}{2g-2i+1}(t_1^{2g-2i+1} + t_2^{2g-2i+1} + \cdots + t_g^{2g-2i+1})$$

の対応で，Young 図形 $(g, g-1, g-2, \cdots, 3, 2, 1)$ に対する $t_1, t_2, \ldots, t_g$ の Schur 多項式によって与えられる．正確にはそうなるように σ 関数の定数因子 a_0 を定めている [N].

4. $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ の作用に対して σ 関数は不変である．

§ 4.2. 超楕円 $\wp$ 関数と Jacobi の逆公式 I

σ 関数の定義ができたので超楕円曲線の $\wp$ 関数を導入する．種数 2 以上では σ は多変数の関数であり，その微分も多変数の微分となる．$u = {}^t(u_1, u_2, \cdots, u_g) \in \mathbb{C}^g$ に対し，

$$\wp_{ij}(u) := -\frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j}\log\sigma(u). \tag{4.3}$$

超楕円関数ではないが超楕円 ζ 関数も同様に定義される：

$$\zeta_i(u) = \frac{\partial}{\partial u_i}\log\sigma(u).$$

微分を $f_{ij\cdots k} := \dfrac{\partial}{\partial u_i}\dfrac{\partial}{\partial u_j}\cdots\dfrac{\partial}{\partial u_k}f$ のように書くこととすると

$$\wp_{ij}(u) = \frac{\sigma_{ij}(u)\sigma(u) - \sigma_i(u)\sigma_j(u)}{\sigma(u)^2}$$

となる．右辺の分母と分子とも σ 関数について 2 次となっていること，指数因子の微分による余分な項が分子でキャンセルすることで $\wp_{ij}(u)$ が格子内の $\mathcal{J}_g := \mathbb{C}^g/\Gamma$ で周期関数となる．この状況は楕円曲線の場合と全く同じである．つまり，格子 Γ の点 ℓ に対して

$$\wp_{ij}(u+\ell) = \wp_{ij}(u).$$

これより，$\wp_{ij}(u)$ の定義域を $\mathcal{J}_g$ とも $\mathbb{C}^g$ とも見ることができるため，以下，Abel-Jacobi 写像 w と Abel 積分 $\widetilde{w}$ を同一視する場合がある．例えば，自然な埋め込み ι を固定して $\widetilde{w}\circ\iota : \mathcal{S}^k X_g \to \mathbb{C}^g$ をあらためて $\widetilde{w}$ と書くことにする．

σ 関数の零点の性質により，$\wp_{ij}(u)$ は Θ_{g-1} で 2 位の特異点を持つことも判る．そこで $\wp$ の定義域である $\mathcal{J}_g$ の部分代数多様体に関わる

$$w : \mathcal{S}^k X_g \to \mathcal{J}_g \quad \left(w(P_1, P_2, \ldots, P_k) = \sum_{i=1}^{k} w(P_i) \right), \quad w = \kappa \circ \widetilde{w} \circ \iota$$

も用意しておく．上述の $\mathcal{W}_k = w(\mathcal{S}^k X_g)$ である．これらは後で述べる一般化した Jacobi の逆問題に関連する．

$\mathcal{J}_g$ 上の有理関数を $\mathcal{S}^g X_g$ 上の有理関数と関連付けることが，Jacobi の逆問題であるが，その一般化も含め，考察するために，正整数 $n \geq 1$ とそれによる点 $P_1 = (x_1, y_1), \ldots, P_n = (x_n, y_n) \in X_g$ に対して次の Frobenius-Stickelberger 行列 $\Psi_n((x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n))$ を定義する [MP2]：

$$\begin{aligned}
&\Psi_n(P_1, \ldots, P_n) = \Psi_n((x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)) \\
&:= \begin{vmatrix}
1 & \phi_1(x_1, y_1) & \cdots & \phi_{n-2}(x_1, y_1) & \phi_{n-1}(x_1, y_1) \\
1 & \phi_1(x_2, y_2) & \cdots & \phi_{n-2}(x_2, y_2) & \phi_{n-1}(x_2, y_2) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
1 & \phi_1(x_{n-1}, y_{n-1}) & \cdots & \phi_{n-2}(x_{n-1}, y_{n-1}) & \phi_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1}) \\
1 & \phi_1(x_n, y_n) & \cdots & \phi_{n-2}(x_n, y_n) & \phi_{n-1}(x_n, y_n)
\end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

但し $\phi(P) = \phi_i(x, y)$ は表 1 で示す Weierstrass の非 gap 列に現れる単項式である．例えば，$\phi_0 = 1$, $\phi_1 = x$, $\cdots$.

曲線上の点 $P_1, \ldots, P_n \in X_g$ に対して，$P \in X_g$ の有理関数として

$$\mu_n(P) := \mu_n(P; P_1, \ldots, P_n) := \lim_{Q_i \to P_i} \frac{\Psi_{n+1}(P, Q_1, \ldots, Q_n)}{\Psi_n(Q_1, \ldots, Q_n)} \tag{4.4}$$

を考える．各点 P_i は多重に同一な点を取り得るので，一般に分子や分母は零になり得るが，適当に互いに異なる点 Q_i 達によって一旦定義しておいて，その極限として左辺の μ_n を定義することにする．

この $\mu_n(P) = \mu_n(P; P_1, \ldots, P_n)$ は P の関数として n 個の点 $P_1, \ldots, P_n$ を自由に取った際にそれらを零点とすることのできる Affine 環 R_g の最低次数のモニックな元として特徴づけられる：$\mu_n(P_i; P_1, \ldots, P_n) = 0$．Weierstrass の n 番目の非 gap の次数 $N(n)$ とすると $\mu_n(P)$ の次数は $N(n)$ となる．

超楕円曲線の場合は $n \leq g$ に対して，$\mu_n(P)$ が基本対称多項式の母関数

$$F_n(x) := (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

に一致することが容易に判る：

$$\mu_n((x, y)) = F_n(x), \quad (n \leq g).$$

Jacobi の逆問題として次のことが判っている [B1, B2, B3, BEL, MP2, Ô2]：

Lemma 4.1. g 個の曲線の点 $P_i = (x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, g)$ と $u = w(P_1, P_2, \ldots, P_g)$ に対して

$$F_g(x) = x^g - \sum_{i=1}^{g} (-1)^{g-i} \wp_{g,i}(u) x^{i-1}$$

となる．より具体的には

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_g &= \wp_{g,g}(u) \\ x_1x_2 + x_2x_3 \cdots + x_{g-1}x_g &= \wp_{g,g-1}(u) \\ &\vdots \\ x_1x_2 \cdots x_g &= \wp_{g,1}(u). \end{aligned}$$

つまり，$\wp_{g,i}$ は超楕円曲線の場合，基本対称多項式に一致する．

また，

$$\wp_{ijk\cdots\ell} = -\frac{\partial}{\partial u_i} \frac{\partial}{\partial u_j} \frac{\partial}{\partial u_k} \cdots \frac{\partial}{\partial u_\ell} \log \sigma$$

とすると，種数 $g=3$ のとき，次の恒等式群を満たすことも知られている [B3, Mat1].

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{IV}-1) && \wp_{3333}-6\wp_{33}^2=2\lambda_5\lambda_7+4\lambda_6\wp_{33}+4\lambda_7\wp_{32},\\
&(\mathrm{IV}-2) && \wp_{3332}-6\wp_{33}\wp_{32}=4\lambda_6\wp_{32}+2\lambda_7(3\wp_{31}-\wp_{22}),\\
&(\mathrm{IV}-3) && \wp_{3331}-6\wp_{31}\wp_{33}=4\lambda_6\wp_{31}-2\lambda_7\wp_{21},\\
&(\mathrm{IV}-4) && \wp_{3322}-4\wp_{32}^2-2\wp_{33}\wp_{22}=2\lambda_5\wp_{32}+4\lambda_6\wp_{31}-2\lambda_7\wp_{21},\\
&(\mathrm{IV}-5) && \wp_{3321}-2\wp_{33}\wp_{21}-4\wp_{32}\wp_{31}=2\lambda_5\wp_{31},\\
&(\mathrm{IV}-6) && \wp_{3311}-4\wp_{31}^2-2\wp_{33}\wp_{11}=2\Delta,\\
&(\mathrm{IV}-7) && \wp_{3222}-6\wp_{32}\wp_{22}=-4\lambda_2\lambda_7-2\lambda_3\wp_{33}+4\lambda_4\wp_{32}+4\lambda_5\wp_{31}-6\lambda_7\wp_{11},\\
&(\mathrm{IV}-8) && \wp_{3221}-4\wp_{32}\wp_{21}-2\wp_{31}\wp_{22}=-2\lambda_1\lambda_7+4\lambda_4\wp_{31}-2\Delta,\\
&(\mathrm{IV}-9) && \wp_{3211}-4\wp_{31}\wp_{21}-2\wp_{32}\wp_{11}=-4\lambda_0\lambda_7+2\lambda_3\wp_{31},\\
&(\mathrm{IV}-10) && \wp_{3111}-6\wp_{31}\wp_{11}=4\lambda_0\wp_{33}-2\lambda_1\wp_{32}+4\lambda_2\wp_{31},\\
&(\mathrm{IV}-11) && \wp_{2222}-6\wp_{22}^2=-8\lambda_2\lambda_6+2\lambda_3\lambda_5\\
&&& \quad -6\lambda_1\lambda_7-12\lambda_2\wp_{33}+4\lambda_3\wp_{32}+4\lambda_4\wp_{22}+4\lambda_5\wp_{21}-12\lambda_6\wp_{11}+12\Delta,\\
&(\mathrm{IV}-12) && \wp_{2221}-6\wp_{22}\wp_{21}=-4\lambda_1\lambda_6-8\lambda_0\lambda_7-6\lambda_1\wp_{33}+4\lambda_3\wp_{31}+4\lambda_4\wp_{21}-2\lambda_5\wp_{11},\\
&(\mathrm{IV}-13) && \wp_{2211}-4\wp_{21}^2-2\wp_{22}\wp_{11}=-8\lambda_0\lambda_6-8\lambda_0\wp_{33}-2\lambda_1\wp_{32}+4\lambda_2\wp_{31}+2\lambda_3\wp_{21},\\
&(\mathrm{IV}-14) && \wp_{2111}-6\wp_{21}\wp_{11}=-2\lambda_0\lambda_5-8\lambda_0\wp_{32}+2\lambda_1(3\wp_{31}-\wp_{22})+4\lambda_2\wp_{21},\\
&(\mathrm{IV}-15) && \wp_{1111}-6\wp_{11}^2=-4\lambda_0\lambda_4+2\lambda_1\lambda_3+4\lambda_0(4\wp_{31}-3\wp_{22})+4\lambda_1\wp_{21}+4\lambda_2\wp_{11},
\end{aligned}
$$

ここで

$$\Delta=\wp_{32}\wp_{21}-\wp_{31}\wp_{22}+\wp_{31}^2-\wp_{33}\wp_{11}.$$

これらは非線形偏微分方程式である Kortweg-de Vries 方程式階層に一致する事が判る [Mat1]．Baker は 1903 年の論文 [B3] において，双一次形式や Pfaffian などを使って一般の種数の上記の非線形微分方程式の基本関係式を提示した．これは一般種数の Kortweg-de Vries 方程式階層に相当する．上記非線形微分方程式を提示した後に，Baker は「この方程式列を満たす $\wp_{ij}(u)$ と (4.3) により σ を特徴付けられるか？」という問題を提出し，Baker-Akhiezer 理論の基本となる研究に踏み出した[2].

§ 4.3. Jacobi の逆公式 II

多変数関数の Jacobi の逆公式を $\mathcal{J}_g$ に対するものから $(g-1)$ 次元の部分代数多様体やより次元の小さい k 次元の部分代数多様体に対するものに一般化することは自然な考え

[2]Baker の 1903 年の論文 [B3] に象徴されるように，代数曲線を与えて，与えられた代数曲線から微分方程式を得ることは，(超楕円曲線にのみに得られたことであるが)19 世紀のアプローチである．しかし，代数曲線から微分方程式を得ることよりも，微分方程式から代数曲線への道の方が遥かに困難であり，そのため半世紀以上の時間を要する数学の発展が必要であったことは強調してもし足りることはない．それらの両方の道を扱える状況になった現在，それらを自在に取り扱うことで新たな数学を構築すべきであると筆者は考えている．

方である．Abel 積分の定義域を $\mathcal{S}^g\widetilde{X}_g$ から $k=1,2,\ldots,g-1$ として $\mathcal{S}^k\widetilde{X}_g$ へと制限することに相当する．上記で述べたように例えば定義域を $\mathcal{S}^{g-1}\widetilde{X}_g$ に制限した像 $\widetilde{w}(\mathcal{S}^{g-1}\iota X_g)$ では σ 関数は零になってしまう．

別の言い方をすると，σ 関数は $\Theta_{g-1}=\mathcal{W}^{g-1}$ で零になってしまうという性質を持つ．この性質の利点もあれば，都合の悪い状況もある．零になる領域が Jacobi 多様体の主たる部分を占めているので，零になる領域の情報を取り出すことが難しいという見方もできる．そこで σ を微分することで零成分を削る事により部分代数多様体 $\mathcal{W}_k=w(\mathcal{S}^kX_g)$ の情報を取り出すことを考える．

[Ô1, MP2, Ô2] に従って，多重の数列の添え字 $\natural^n$ を以下のように導入する．まず $1\le n<g$ と仮定する．$\natural^n$ は正の整数 i が集まった有限の数列である，

$$\natural^n := \begin{cases} n+1, n+3, \ldots, g-1 & \text{for } g-n\equiv 0 \bmod 2 \\ n+1, n+3, \ldots, g & \text{for } g-n\equiv 1 \bmod 2 \end{cases}$$

$\natural^n$ に対して σ の微分を

$$\sigma_{\natural^n} := \left(\prod_{i\in\natural^n}\frac{\partial}{\partial u_i}\right)\sigma(u).$$

と定義する．また，$n\ge g$ の領域では, $\natural^n$ は空集合とし， そのような状況では微分 $\sigma_{\natural^n}$ は微分を行わず σ 自身を意味するとする．

g や n が小さいところを表に示しておく．また，$\sharp$ を $\natural^1$ とし $\flat$ は $\natural^2$ を指すとする．

表 2

genus	$\sigma_\sharp\equiv\sigma_{\natural^1}$	$\sigma_\flat\equiv\sigma_{\natural^2}$	$\sigma_{\natural^3}$	$\sigma_{\natural^4}$	$\sigma_{\natural^5}$	$\sigma_{\natural^6}$	$\sigma_{\natural^7}$	$\sigma_{\natural^8}$	$\cdots$
1	σ	σ	σ	σ	σ	σ	σ	σ	$\cdots$
2	σ_2	σ	σ	σ	σ	σ	σ	σ	$\cdots$
3	σ_2	σ_3	σ	σ	σ	σ	σ	σ	$\cdots$
4	σ_{24}	σ_3	σ_4	σ	σ	σ	σ	σ	$\cdots$
5	σ_{24}	σ_{35}	σ_4	σ_5	σ	σ	σ	σ	$\cdots$
6	σ_{246}	σ_{35}	σ_{46}	σ_5	σ_6	σ	σ	σ	$\cdots$
7	σ_{246}	σ_{357}	σ_{46}	σ_{57}	σ_6	σ_7	σ	σ	$\cdots$
8	σ_{2468}	σ_{357}	σ_{468}	σ_{57}	σ_{68}	σ_7	σ_8	σ	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

表より判るが，一般に $\natural_k$ は $k+1$ を含んでいる [MP2]．そこで $k+1$ を削って代わりに i に置き換えた数列を $\natural_{k,i}$ と記す．

このとき，部分多様体 $\mathcal{W}_k$ $(k<g)$ に対する Jacobi の逆公式が次のようになる [MP2].

Lemma 4.2. $k<g$ とし，k 個の曲線の点 $P_i=(x_i,y_i)$ $(i=1,2,\ldots,k)$ と $u=\widetilde{w}(\iota(P_1,P_2,\ldots,P_k))$ に対して

$$F_k(x)=x^k-\sum_{i=1}^{k}(-1)^{g-i}\frac{\sigma_{\natural_{k,i}}(u)}{\sigma_{\natural_k}(u)}x^{i-1}$$

となる．特に $k=1$ の場合は

$$x=\frac{\sigma_{\natural_2}}{\sigma_{\natural_1}}$$

となり，この場合，これを $\dfrac{\partial}{\partial u_1}$ で微分すると

$$(x,y)=\left(\frac{\sigma_{\natural_2}}{\sigma_{\natural_1}},\frac{\partial}{\partial u_1}\frac{\sigma_{\natural_2}}{\sigma_{\natural_1}}\right)$$

を得る．(これが楕円曲線の (2.1) の超楕円曲線版である．)

§5. 超楕円曲線での加法定理

これで準備ができたので，超楕円曲線での加法定理について以下の流れに従って述べる．

1. 有理関数 μ_n を用いた Picard 群での線形同値による加法性について
2. 上記の加法性に相当した σ 関数での解析的な加法性について
3. これらによる $\wp$ 関数における加法性について

§5.1. Picard 群での線形同値による加法性

Picard 群では X_g 上の総次数零の因子 (零因子) を，有理関数の因子である主因子で割った商群を考える．それが線型同値を与えるため，(4.4) で提示した有理関数 μ_n により零点達が線形同値として自然に定まる．($\mu_n(P;P_1,\ldots,P_n)$ は P_i で一位の零となる．)

$N(n):=\mathrm{wt}(\phi_n)$ のため，$\mu_n(P;P_1,\ldots,P_n)$ の因子は与えられた n 個の点 $P_1,P_2,\ldots,P_n$ に対して，更に余分な零点が $N(n)-n$ 個分，曲線のどこかに存在することを意味する．$\ell:=N(n)-n$ とし，それを $Q_1,\ldots,Q_\ell$ とする．(この Q_i は μ_n の定義の際に現れた Q_i とは異なるものである.)　Riemann-Roch の定理より超楕円曲線の場合

1. $n<g$ のとき，$\ell=n$,
2. $n\geq g$ のとき，$\ell=g$.

有理関数 μ_n の因子により

$$P_1+P_2+\cdots+P_n+Q_1+Q_2+\cdots+Q_\ell-(n+\ell)\infty\sim 0$$

を得る，つまり

$$P_1+P_2+\cdots+P_n-n\infty\sim-(Q_1+Q_2+\cdots+Q_\ell-\ell\infty)$$

となり，加法が定義できる．特に超楕円曲線の場合 $\mu_1(P;P_i)=x-x_i$ から Jacobi 多様体での (-1) 倍は超楕円対合射 i_H と関係がつき，各 $Q_i=(\tilde{x}_i,\tilde{y}_i)$ に対して $-Q_i=(\tilde{x}_i,-\tilde{y}_i)=i_HQ_i$ を得る．この事実を組み合わせることで

$$P_1+P_2+\cdots+P_n-n\infty\sim(i_HQ_1)+(i_HQ_2)+\cdots+(i_HQ_\ell)-\ell\infty.$$

特に $(P_1+\cdots+P_n)-n\infty$ と $(P_{n+1}+\cdots+P_{n+m})-m\infty$ に対して

$$\begin{aligned}&(P_1+\cdots+P_n)+(P_{n+1}+\cdots+P_{n+m})-(n+m)\infty\\&\sim(i_HQ_1)+(i_HQ_2)+\cdots+(i_HQ_{N(n+m)-(n+m)})-(N(n+m)-(n+m))\infty.\end{aligned}\tag{5.1}$$

となり，$n=m=g$ の時

$$(P_1+\cdots+P_g)+(P_{g+1}+\cdots+P_{2g})-2g\infty\sim(i_HQ_1)+(i_HQ_2)+\cdots+(i_HQ_g)-g\infty.$$

となる．これが楕円曲線の加法の一般化になっていることに注意する．

§ 5.2. 解析的加法定理

上記の (5.1) に対応して σ 関数による加法定理について述べる [EEMOP].

Lemma 5.1. (m,n) を正整数の組とする．X_g の点をそれぞれ (x_i,y_i) $(i=1,\dots,m)$, (x'_j,y'_j) $(j=1,\dots,n)$ とする．また，それぞれに対して Abel-Jacobi 写像を考える，$u=\widetilde{w}((\iota(x_1,y_1),\dots,(x_m,y_m)))$ $v=\widetilde{w}(\iota((x'_1,y'_1),\dots,(x'_n,y'_n)))$. このとき次が成立する．

$$\begin{aligned}&\frac{\sigma_{\natural^{m+n}}(u+v)\sigma_{\natural^{m+n}}(u-v)}{\sigma_{\natural^m}(u)^2\sigma_{\natural^n}(v)^2}\\&=\delta(g,m,n)\frac{\prod_{i=0}^1\Psi_{m+n}((x_1,y_1),\dots,(x_m,y_m),(x'_1,(-1)^iy'_1),\dots,(x'_n,(-1)^iy'_n))}{(\Psi_m((x_1,y_1),\dots,(x_m,y_m))\Psi_n((x'_1,y'_1),\dots,(x'_n,y'_n)))^2}\\&\times\prod_{i=1}^m\prod_{j=1}^n\frac{1}{\Psi_2((x_i,y_i),(x'_j,y'_j))}\end{aligned}\tag{5.2}$$

但し $\delta(g,m,n)=(-1)^{gn+\frac{1}{2}n(n-1)+mn}$.

これがいわゆる加法定理である．特に $m=g$ で $n=2$ の場合は以下のようになる．

Lemma 5.2. [KMP] Lemma 5.1 の記法の下で $m=g$，$n=2$ の際

$$\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma(u)^2\sigma_\flat(v)^2}=-\Xi(u,v),\tag{5.3}$$

ここで $\Xi(u,v)$ は

$$F_g(x'_1)F_g(x'_2)\left(\sum_{i=1}^g\frac{y_i}{(x_i-x'_1)(x_i-x'_2)F'_g(x_i)}\right)^2-F_g(x'_1)F_g(x'_2)\left(\sum_{i=1}^2\frac{(-1)^iy'_i}{(x'_1-x'_2)F_g(x'_i)}\right)^2,$$

但し，$F'_g(x):=\partial F_g(x)/\partial x$.

§ 5.3. $\wp$ での表示

これらの事実を利用してまた，Jacobi の逆公式を利用すると種数 $g = 2$ の場合は $(m = n = 2)$

$$\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma(u)^2\sigma(v)^2} = \wp_{11}(u) - \wp_{11}(v) + \wp_{12}(u)\wp_{22}(v) - \wp_{12}(v)\wp_{22}(u)$$

となる．$\wp$ に関する加法公式は，これらを対数を取って u や v で 2 回微分すれば得られることとなる．また，次の記法も Lemma 5.1 から直接得られる．

$$\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma(u)^2\sigma(v)^2} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & y_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & y_2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & y_3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & y_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & y_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & y_2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & -y_3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & -y_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix}^2 \begin{vmatrix} 1 & x_3 \\ 1 & x_4 \end{vmatrix}^2 \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_4 \end{vmatrix}}.$$

§ 5.4. Hermite-Frobenius-Stickelberger 公式

楕円の Hermite-Frobenius-Stickelberger 公式は大西によりその超楕円関数版が示されている [Ô1, Ô2].

Lemma 5.3. X_g の点 (x_i, y_i) $(i = 1, \ldots, n)$ に対して，Abel 積分を施したものを $u^{(i)} = \widetilde{w}(\iota(x_i, y_i))$. と記す．このとき次を得る．

$$\frac{\sigma_{\natural^n}(\sum_{i=1}^n u^{(i)}) \prod_{i<j} \sigma_\flat(u^{(i)} - u^{(j)})}{\prod_{i=1}^n \sigma_\sharp(u^{(i)})^n} = \epsilon_n \Psi_n((x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)), \tag{5.4}$$

但し $n \leq g$ に対して $\epsilon_n = (-1)^{g+n(n+1)/2}$ とし，$n \geq g+1$ に対して $\epsilon_n = (-1)^{(2n-g)(g-1)/2}$ とする．

§ 5.5. n 等分点方程式

Lemma 5.3 から n 等分点として Kiepert の式が得られる：

Lemma 5.4. X_g の点 $P = (x, y)$ と $u \in \widetilde{w}(\iota P) \in \kappa^{-1}\mathcal{W}_1$ に対して

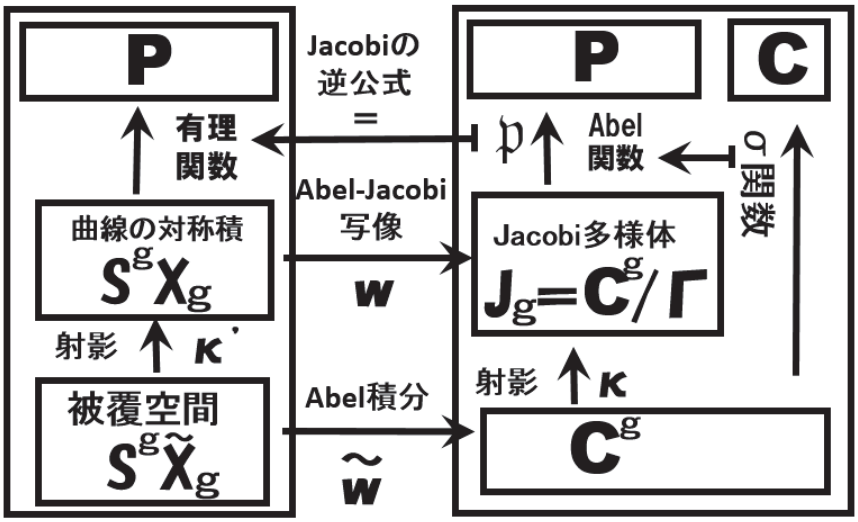
$$\psi_n(u) := \frac{\sigma_{\natural^n}(nu)}{\sigma_\sharp(u)^{n^2}}$$

と定義すると，ψ_n の零点 $u(\neq 0)$ は $nu \in \kappa^{-1}\mathcal{W}_{g-1}$ を満たし．

$$\psi_n(u) = \frac{\varepsilon_{n,g}}{1!2!\cdots(n-1)!} \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_{n-1}}{\partial u_1} \\ \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial u_1^2} & \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial u_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \phi_{n-1}}{\partial u_1^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^{n-1} \phi_1}{\partial u_1^{n-1}} & \frac{\partial^n \phi_2}{\partial u_1^{n-1}} & \cdots & \frac{\partial^{n-1} \phi_{n-1}}{\partial u_1^{n-1}} \end{vmatrix},$$

と書ける．

これまでのところをまとめると次の図のようになる．種数 1 の場合の単純な一般化となっている．曲線が代数方程式により定まる代数的な空間に対して，Jacobi 多様体は積分によって定まる超越的な空間が定まっている．Jacobi 多様体は $\mathbb{C}$ 線型空間を格子で割った複素 torus であり，加法性は自明に定まる．曲線側から Jacobi 多様体へは Abel-Jacobi 写像という有理写像が存在し，逆の方向の矢印としては Jacobi の逆公式が定まる．



これら左右の方向の矢印により，超楕円曲線の構造を Jacobi 多様体が定めたり，また逆に，Jacobi 多様体の構造を曲線の代数的構造が決めたりすることとなる[3]．

§6. 戸田格子の超楕円擬周期解

ここでは戸田方程式の超楕円曲線の擬周期解について述べる [KMP]．Lemma 5.2 の加法定理について述べたが，その特殊な場合として $v^{[1]} = v^{[2]}$ となる場合を考える．これが所謂，戸田方程式の解に関係する．それを述べる．

この特殊な場合，Lemma 5.2 は以下のようになる：

$$
\begin{aligned}
\frac{\sigma(u+2v^{[1]})\sigma(u-2v^{[1]})}{\sigma(u)^2\sigma_\flat(2v^{[1]})^2} &= f_{1,2}(x_1') - \sum_{i=1}^{g}\sum_{j=1}^{g} \wp_{ij}(u) {x_1'}^{i+j-2} \\
&= f_{1,2}(x_1') + \sum_{i=1}^{g}\sum_{j=1}^{g} {x_1'}^{i-1}\frac{\partial}{\partial u_i}{x_1'}^{j-1}\frac{\partial}{\partial u_j}\log\sigma(u),
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

[3]現在，Abel 関数論の再構築として，筆者が行っている研究はこの図式をより一般の代数曲線 (特異平面曲線を blow-up した空間曲線も含む) に一般化し，両者の関係を精緻に調査，観察しようとするものである．それは Abel の最後の 2 頁論文を具現化するものでもあり，代数曲線に関わる可積分系を深堀するものでもある．

但し，

$$f_{1,2}(x) := \frac{\partial_x^2 f(x)}{2f(x)} - f_{1,2}^I(x), \quad f_{1,2}^I(x) := \sum_{i=0}^{g}(i^2\lambda_{2i+1}x^{2i-1} + i(i-1)\lambda_{2i}x^{2i}).$$

$$f(x_1,x_2) = \sum_{i=0}^{g} x_1^i x_2^i(\lambda_{2i+1}(x_1+x_2) + 2\lambda_{2i}).$$

右辺では $\displaystyle\lim_{(x_2,y_2)\to(x_1,y_1)} \frac{G_1((x_1,y_1),(x_2,y_2))}{G_2((x_1,y_1),(x_2,y_2))} = \lim_{(x_2,y_2)\to(x_1,y_1)} \frac{\partial G_1((x_1,y_1),(x_2,y_2))/\partial x_1}{\partial G_2((x_1,y_1),(x_2,y_2))/\partial x_1}$ とする l'Hôpital の定理を利用した．

ここで，$(x_i,y_i) \in X_g$ $(i=1,\dots,g)$，$(x_1',y_1') \in X_g$ に対して，Abel 写像した $u = w((x_1,y_1),\dots,(x_g,y_g))$ と $v^{[1]} = w((x_1',y_1'))$ と Jacobi 多様体での点 $c := 2v^{[1]}$，また方向微分

$$D_j := \sum_{i=1}^{g} {x_j'}^{i-1}\frac{\partial}{\partial u_i}$$

を用意する．また，新たな量

$$\mathcal{V}(u) := \mathcal{V}(u,v^{[1]}) := \sum_{i=1}^{g}\sum_{j=1}^{g}\wp_{ij}(u){x_1'}^{i+j-2} = -D_1^2\log\sigma(u), \quad \mathcal{V}_c(c) := f_{1,2}(x_1'),$$

も定めておく．これにより，加法定理 (6.1) は

$$\mathcal{V}(u) + \mathcal{V}_c(c) = -D_1^2\log\sigma(u) + \mathcal{V}_c(c) = -\frac{\sigma(u+c)\sigma(u-c)}{\sigma(u)^2\sigma(c)^2}$$

となる．ここで，作用素として $-D_1^2\log$ を両辺に作用させると

$$\begin{aligned}-D_1^2\log(\mathcal{V}(u)-\mathcal{V}_c(c)) &= \mathcal{V}(u+c) - 2\mathcal{V}(u) + \mathcal{V}(u-c)\\ &= (\mathcal{V}(u+c)-\mathcal{V}_c(c)) - 2(\mathcal{V}(u)-\mathcal{V}_c(c)) + (\mathcal{V}(u-c)-\mathcal{V}_c(c))\end{aligned}$$

となる．これはほぼ戸田方程式である．

更に，$c \in \mathcal{J}_g$ を固定すると D_1 の方向は $\mathbb{C}^g$ 内でユニークに定まる．これより $\mathbb{C}D_1 \subset \mathbb{C}^g$ の元 t と $\langle dt^\perp, D_1\rangle = 0$ とする $t^\perp$ により，$u = t + nc + t^\perp$ とすると

$$\begin{aligned}&-\frac{d^2}{dt^2}\log\left(\mathcal{V}(t+nc+t^\perp) - \mathcal{V}_c(c)\right)\\ &\quad= \mathcal{V}(t+(n+1)c+t^\perp) - 2\mathcal{V}(t+nc+t^\perp) + \mathcal{V}(t+(n-1)c+t^\perp)\end{aligned} \tag{6.2}$$

が得られる．このとき $q_n(t;t^\perp,c) := \log\left(cV(t+nc+t^\perp) - \mathcal{V}_c(c)\right)$ は戸田方程式を満たす．

Proposition 6.1. 上記 $q_n(t;t^\perp)$ は次を満たす．

$$-\frac{d^2}{dt^2}q_n(t;t^\perp,c) = \mathrm{e}^{q_{n+1}(t;t^\perp,c)} - 2\mathrm{e}^{q_n(t;t^\perp,c)} + \mathrm{e}^{q_{n-1}(t;t^\perp,c)} \tag{6.3}$$

つまり，種数 1 の (2.3) の単純な一般化として種数 g の戸田格子の擬周期解が得られた．種数 $g=1$ のときは，上記の c に対して $c=w(Q)$ となる点 $Q\in X_1$ が存在するので，楕円関数解の自然な一般化となっている．実値性は可積分系では重要な役割を果たすが [Ko]，本研究ではここでも実値性を考慮していないことは注意すべきである．

§7. 戸田格子の周期解と n 等分点

ここでは Proposition 6.1 で得られた戸田格子解の周期解について述べる [KMP]. Lemma 5.4 により $n>g$ 等分点方程式の解の集合を考える．そのため

$$\Phi_n := \{P\in X_g \mid P \text{ is a zero of } \psi_n\},$$

を導入すると，次が知られている．

Lemma 7.1. [C, MP1] $n(>g)$ に対して，

$$\Xi_n := \Phi_{n-g+1}\cap\ldots\cap\Phi_{n-1}\cap\Phi_n\cap\Phi_{n+1}\cap\ldots\cap\Phi_{n+g-1}.$$

とすると $P\in\Xi_n\subset\mathcal{J}_g$ は $nP\in\Gamma$ となる．

$2N(>g)$ とし，$P\in\Xi_{2N}$, $c=2w(P)$ に対して

$$\mathcal{V}(u)=\mathcal{V}(u+Nc)$$

となる．これより次を得る．

Proposition 7.2. $P\in\Xi_{2N}$, $c=2w(P)$ に対し Proposition 6.1 の擬周期解 $q_n(t;t^\perp,c)$ は $q_{n+N}(t;t^\perp,c)=q_n(t;t^\perp,c)$ を満たし，周期解となる．

周期戸田方程式の解の慣習に従って，以下を定める [AvM, KvM]：

$$\begin{aligned}
&\sigma^{(n)}(t;t^\perp):=\sigma(t+nc+t^\perp),\quad \sigma^{(c)}:=\sigma_\flat(c),\\
&\zeta^{(n)}(t;t^\perp):=\sum_{i=1}^{g}{x_1'}^{i-1}\zeta_i(t+nc+t^\perp),\quad \zeta^{(c)}:=\frac{1}{2}D_{1'}\log\sigma_\flat(c),\\
&\wp^{(n)}(t;t^\perp):=\sum_{i,j=1}^{g}{x_1'}^{i+j-2}\wp_{ij}(t+nc+t^\perp),\quad \wp^{(c)}(t^\perp):=f_{1,2}(x_1').
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n&=\wp^{(n)}(t;t^\perp)-\wp^{(c)}(t^\perp)=\frac{\sigma^{(n+1)}(t;t^\perp)\sigma^{(n-1)}(t;t^\perp)}{\sigma^{(n)}(t;t^\perp)^2{\sigma^{(c)}}^2},\\
b_{n-1}&=\frac{d}{dt}\log\frac{\sigma^{(n)}(t;t^\perp)}{\sigma^{(n-1)}(t;t^\perp)}-\zeta_c=\zeta^{(n)}(t;t^\perp)-\zeta^{(n-1)}(t;t^\perp)-\zeta^{(c)}.
\end{aligned}$$

このとき，Kac-van Moerbeke [KvM]，Adler-van Moerbeke [AvM] に従って次を得る：

Lemma 7.3. 上記の a_n, b_n は

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}a_k = a_k(b_{k+1} - b_k), \\ \dfrac{d}{dt}b_k = a_k - a_{k-1}. \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \ldots, N).$$

を満たす．また，周期戸田格子解の Lax 行列 $\mathcal{L}$ は

$$\mathcal{L} := \begin{pmatrix} b_1 & 1 & 0 & \cdots & a_N\hat{w}^{-1} \\ a_1 & b_2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{N-2} & b_{N-1} & 1 \\ \hat{w} & \cdots & \cdots & a_{N-1} & b_N \end{pmatrix}$$

となる．$\mathcal{L}$ に対する特性方程式は種数 $N-1$ の超楕円曲線を定める，

$$\det(\mathcal{L} - z) = -\left(\hat{w} + \frac{\prod_{i=1}^{N} a_i}{\hat{w}} - \mathcal{P}(z)\right) = 0.$$

この超楕円曲線を $\hat{X}_{g,N-1}$ と記す．

$$\hat{X}_{g,N-1} := \{(z, \hat{w}) \mid \hat{w}^2 - \mathcal{P}(z)\hat{w} + \prod_{i=1}^{N} a_i = 0\} \bigcup \{\infty\}.$$

但し，多項式 $\mathcal{P}$ は

$$\mathcal{P}(z) := \tilde{\Delta}_{1,N}(z) - \tilde{\Delta}_{2,N-1}(z),$$

$$\tilde{\Delta}_{n,m} := \begin{vmatrix} b_m - z & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_m & b_{m+1} - z & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n-2} & b_{n-1} - z & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{n-1} & b_n - z \end{vmatrix},$$

$$\mathcal{P}(z) := (-1)^N z^N + \sum_{k=1}^{N} (-1)^{N+k} \mathcal{I}_k z^{N-k}$$

であり，$\mathcal{P}(z)$ の z による展開の係数は

$$\mathcal{I}_1 = \sum_{i=1}^{N} b_i, \quad \mathcal{I}_2 = \sum_{i>j} b_i b_j - \sum_{i=1}^{N} a_i, \quad \ldots\ldots,$$

$$\mathcal{I}_N = \tilde{\Delta}_{1,N}(0) - a_N \tilde{\Delta}_{2,N-1}(0), \quad \mathcal{I}_{N+1} = \prod_{i=1}^{N} a_i.$$

となる．

§8. 戸田格子の擬周期解と周期解

このような考察の自然な帰着として次の 2 つの問題

1. 種数 g の X_g と種数 $N-1$ の $\hat{X}_{g,N-1}$ の関係を明示的に示せ.
2. $\hat{X}_{g,N-1}$ の定義方程式を R_g と ψ_{2N} の零点により明示的に示せ.

に到達する．Poncelet 問題として [HS] では楕円曲線と種数 2 の超楕円曲線の関係を考察しているが，周期戸田格子の $g=1$, $N=2$ の場合と解釈できる．[KMP] においてこれらの問題を提示したが，その後，よい解決策の方向性も得ていない．しかし，次の 2 つの事が判かっている：

1. $\hat{X}_{g,N-1}$ の分岐点は ψ_{2N} の零点の有理関数となっている.
2. $u_0 \in \Xi_{2N}$, $c = 2u_0$ に対して戸田格子の各格子点の軌道 $M_n := \{tD_1 + 2nu_0 \in \mathcal{J}_g \mid t \in \mathbb{C}\}$ とすると
$$M := \bigcup_{n=0}^{N-1} M_n$$
には巡回群 $\mathfrak{C}_N$ が作用している．同様に射影 $\pi : M \to M_0$ が存在する．つまり，$X_{g,N-1}$ はなんらかの意味で X_g の被覆と関連していると思われる.

本研究会での議論を基に考察を続けたいと考えている.

上記で見たように戸田格子は，その実値性を除けば，Jacobi 多様体の加法公式を力学系と見なしたものであり，超楕円曲線一般で成立する．また，その Jacobi 多様体内の $2N$ 等分点の対称性を持つ軌道も一般的に存在する．つまり，上記の課題は「超楕円 Jacobi 多様体の $2N$ 点等分点の対称性から定まる新たな曲線を代数的に特徴づけよ」という超楕円曲線論の問題であることが判る．このような問題は従来，着目されて来なかったが，戸田方程式の解空間の対称性の観点から，上記のような Abel 関数 (超楕円関数) の考察を経れば，自然に定まる．この事はとても興味深いと考えている.

可積分系と代数曲線との関係については 20 世紀末に解決済みという見方があることは了解しているが，一般種数の代数曲線の Abel 関数論の完成度は楕円関数論のレベルには全く達していない．戸田は楕円関数を駆使し (それは楕円曲線の解析的，代数的性質を駆使したことになるが)，戸田方程式を発見したのであるが [To]，一般種数の超楕円曲線の Abel 関数論としてはようやくその幾分かをトレースできるレベルに達した状況と考えている．多くの先行研究の結果により，楕円関数のレベルとは言わないがそのような考察がある程度できるようになった．本研究は問題提起の段階ではあるが，可積分系からの問題意識によって代数曲線の Abel 関数論の豊かな解析的かつ代数的性質が明らかになる可能性を示した．これらの研究により，楕円関数が戸田方程式を生んだように，新たな可積分系の視座を与えるのではないかと期待している.

References

[AvM] M. Adler, and P. van Moerbeke, *The Toda Lattice, Dynkin diagrams, singularities and Abelian varieties*, Invent. Math., **103** (1991) 223-278.

[B1] H.F. Baker, Abelian Functions, Abel's theorem and the allied theory of theta functions, Cambridge University Press, Cambridge, 1897.

[B2] H. F. Baker, *On the hyperelliptic sigma functions*, Amer. J. Math, **20** (1898) 301-384.

[B3] H. F. Baker, *On a system of differential equations leading to periodic functions*, Acta Math., **27** (1903) 135-156.

[BEL] V. M. Buchstaber, V. Z. Enolskii, and D. V. Leykin, *Kleinian Functions, Hyperelliptic Jacobians and Applications*, Reviews in Mathematics and Mathematical Physics (London), eds. S.P. Novikov and I.M. Krichever, Gordon and Breach, India, 1997 1-125.

[C] D.G. Cantor, *On the analogue of the division polynomials for hyperelliptic curves*, J. reine angew. Math., **447** (1994) 91-145.

[EEMOP] J.C. Eilbeck, V.Z. Enol'skii, S. Matsutani, Y. Ônishi, and E. Previato, *Addition formulae over the Jacobian pre-image of hyperelliptic Wirtinger varieties*, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal), (2008) **2008** No. 619 37-48

[GH] P. Griffiths and J. Harris, *On Cayley's explicit solution to Poncelet's porism*, Enseign. Math., **24** (1978) 31-40.

[HS] K. Hashimoto and Y. Sakai, *General form of Humbert's modular equation for curves with real multiplication of* $\Delta = 5$, Proc. Japan Acad., **85** (2009) 171-176.

[KvM] M. Kac and P. van Moerbeke, On some periodic Toda lattices. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 72 (1975), no. 4, 1627–1629; A complete solution of the periodic Toda problem, *ibid.*, 72 (1975), no. 8, 2879–2880.

[Kl] F. Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungenvom fünften Grade, Teubner, Leipzig, (1884).

[Ko] Y. Kodama, *Topology of the real part of hyperelliptic Jacobian associated with the periodic Toda lattice*, Teoret. Mat. Fiz., **133** (2002) no. 3 439–462. Translation in Theoret. and Math. Phys., **133** (2002) no. 3 1692–1711.

[KMP] Y. Kodama, S. Matsutani, and E. Previato, *Quasi-periodic and periodic solutions of the Toda lattice via the hyperelliptic sigma function*, Annales de l'institut Fourier, **63** (2) (2013) 655-688.

[Mat1] S. Matsutani, *Hyperelliptic solution of KdV and KP equations: re-evaluation of Baker's study on hyperelliptic sigma functions*, J. Phys. A: Math. Gen., **34** (2001) 4721-4732.

[Mat2] S. Matsutani, *Toda Equation and σ-Function of Genera One and Two*, J. Nonlinear Math. Phys., **10** (2003) 555-561.

[MP1] S. Matsutani and E. Previato, *A generalized Kiepert Formula for C_{ab} curves*, Israel J. Math., **171** (2009) 305–323.

[MP2] S. Matsutani and E. Previato, *Jacobi inversion on strata of the Jacobian of the C_{rs} curve $y^r = f(x)$. II*, , **66** (2014) 647-691.

[Mu] D. Mumford, Tata Lectures on Theta, vol. II, Birkhäuser, Boston, 1984.

[N] A. Nakayashiki, *Sigma function as a tau function*, Int. Math. Res. Notices, **2010** (2009) 373-394.

[Ô1] Y. Ônishi, *Determinant expressions for hyperelliptic functions*, Proc. Edinburgh Math. Soc., **48** (2005) 705-742.

[Ô2] 大西良博, *Abel* 函数論, 中央大学数学教室講究録, No6, 2013.

[To] M. Toda, Vibration of a Chain with Nonlinear Interaction, *J. Phys. Soc. Japan* **22** (1967), 431–436; Wave propagation in anharmonic lattices, *ibid.* **23** (1967), 501-506.

[WW] E.T. Whittaker and G.N. Watson, A Course of Modern Analysis, *fourth edition*, Cambridge University Press, 1927.