RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B81 (2020), 71-103

数学における革命とはどういうものか？

――トーマス・Ｓ・クーンの科学哲学の光のもとでみた数学的真理

What Are Revolutions in Mathematics?:

Mathematical truth in the light of Thomas S. Kuhn's philosophy of science

佐々木力
Chikara Sasaki*

Abstract

In the early 1960s, Thomas S. Kuhn (1922~1996) proposed a novel view of science and developed his idea on the revolution in science. But, he deliberately avoided discussions about mathematics which was not his specialty. In 1975, Michael J. Crowe concluded that "Revolutions never occur in mathematics." The author was a graduate student of Prof. Kuhn at Princeton University during the late 1970s, and had a discussion with him on the revolution in mathematics. After the discussion with me, he began to express his opinion implying there must be revolutions in mathematics. In what follows, the author examines the origins of the fundamental theorem of the differential and integral calculus and pays attention to the fact that the algebraic mode played very crucial role in formulating the algorithmic form of the theorem. In his opinion, Leibniz's formulation was the most radical and most revolutionary, and Leibniz can be compared to Lavoisier in the Chemical Revolution. Mathematical truth is less constrained ontologically by the real natural world than the truth in natural sciences, and characterized to be conditional. Consequently, although mathematics has not so drastic transformations as natural sciences, there exist revolutionary changes in mathematics which has evolved historically, as well as in natural sciences. Changes in mathematics is either gradual or revolutionary, and both contentual and institutional. The author concludes that mathematical knowledge as an intellectual activity having a certain hermeneutic basis has experienced revolutions.

Received December 25, 2019, Revised January 26, 2020.
2010 Mathematics Subject Classifications(s): 00A30,01A45
*中部大学中部高等学術研究所　特任教授
e-mail: chikara.sasaki@kzc.biglobe.ne.jp

§1. 数学史の新しいヒストリオグラフィーをめざして
——クーンの歴史的科学哲学と数学史家のそれへの対応

20世紀後半、科学史・科学哲学にある種の革命が起こったと見なすことができる。その学問上の革命にとって一冊の本が重要な役割を演じたと考えられている。1962年刊のトーマス・S・クーンの『科学革命の構造』であった。今日、クーンの科学観は、「歴史的科学哲学」（historical philosophy of science）と呼ばれるようになっている。ルードルフ・カルナップの「論理的科学哲学」（logical philosophy of science）と対照させてである([1])。

以下の議論においては、「歴史的科学哲学」が数学的真理に適応可能かどうか考察する。クーンの1962年刊の前記著作が出版されてから、多くの数学史家・数学哲学者が、数学研究の結果の静的で形式的構造にというよりは、数学的知識がいかに得られるかの動的過程に焦点をあててきたように思われる。しかしながら、彼らの多くは、クーンの科学観が数学に適用できるかどうかの問題について懐疑的であった。マイケル・Ｊ・クロウは1975年に書いている。

> 数学のヒストリオグラフィーにおいては、比肩しうる著者のグループは出現しなかった。そのうえ、新しい科学のヒストリオグラフィーに親しんだ数学史家は、〔クーンの科学観で〕展開された洞見が数学史のヒストリオグラフィーになんらかの形で直接的に適用可能かどうかについて懐疑的であった。〔……〕 数学と科学の概念的枠組みのあいだの主要な相異点が、それらの歴史が同様の発展パターンをとるのかどうかについて疑問視させるのである([2])。

数学史における変化のパターンについての9つの「法則」を簡明に提示したあとで、クロウは第10番目の「法則」を付け加える。

> 数学において革命はけっして起こらない（Revolutions never occur in mathematics）([3])。

しかしながら、いくにんかの数学史家は、クロウの第10「法則」を反駁しようとした。通約可能量と通約不可能量の双方に適用可能なエウドクソスの幾何学的比例論と、ゲオルク・カントルの超限集合論から例をとって、ジョセフ・W・ドウベンは、新しい説を提示した。「数学の内部において、革命は明らかに起こる」([4])。

---

[1]Kuhn [2000], pp. 90 & 309, 拙訳 [2008], pp. 113 & 416. Gillies [1993], p. 68 を見よ.
[2]Crowe [1975], p. 162; Reprinted in Gillies (Ed.) [1992], p. 15.
[3]Ibid., p. 165; p. 19.
[4]Dauben [1984]を見よ．強調付きの引用文は Dauben [1992], p. 81. Crowe [1975]以降の

クロウは1975年の観点を変えた。1988年に彼は述べている。「数学とその発展に関して以前に取っていた10の主張は、深くまちがっており、また数学の歴史的研究にとって障碍となっていると私は信ずるにいたっている」(5)。クロウの「転向」にもかかわらず、彼の1975年の観点は考察に値する。というのも、それは現場の数学者にとっての強固な拠点となっているからである。

ここで自伝的注記がかかわる。プリンストン大学におけるクーン教授の大学院生だった時分に、私は教授の科学哲学についての1977年春学期の学部講義「科学哲学入門」（Introduction to Philosophy of Science）を聴講し、そして1977年5月に、私の数学史のヒストリオグラフィーに関する未熟な観点の概略を提示した。それ以前、クーン教授は、彼の科学論が数学に適応可能だとは考えていなかった。それから、その観点は、クロウの1975年の論考に影響したと言われていた。だが、彼の私のリポートへの１ページ半にわたる批判的注釈は、彼の数学についての態度を、若干であったにしても、変えたように私には思われた。このことについては、以下の第8節「結論的注記」を見られたい。

以下の議論においては、クーンの「歴史的科学哲学」のアプローチを擁護するドウベンの理解の仕方を支持しようとする。そうするためには、数学の「プラトン主義的」で形式主義的な理解を斥け、数学を、イムレ・ラカトシュの擁護を援用すれば、「準経験的」（quasi-empirical）な科学として提示することが求められる[Lakatos 1978b]。ほとんどの数学史家は、問題を近代ヨーロッパと古代ギリシャにおける数学の観点から論じてきた。けれども、この問題に挑むには、東アジア諸国における数学文化がいかにして近代西欧数学の文化へと変容したか検討することが枢要である。たしかに、数学の発展を一般的に理解するためには、地域的（parochial）ではなく、世界大（oecumenical）であらねばならないのだ。

§2.　クロウの1975年説の検討

クロウは1975年に提起した第10「法則」で、19世紀の数学者のヘルマン・ハンケルが「ほとんどの学問において、ある世代が建設したものをもうひとつの世代は取り壊してしまい、ある者が構築したものをほかのある者は滅ぼしてしまう。数学においてだけ、各世代は旧い構造に新しい階を打ち立てるのである」と述べたときのような漸次的進化を擁護する(6)。クロウは、このような引用文は「それ自体で、限定なしでは成り立たない」、と述べる。というのは、彼自身の「法則」は、「革命に必要な特徴である、少なくとも、以前に存在していたなんらかの存在（王であれ、憲法であれ、理論であれ）が転覆され、取り返しがつかない程度

数学における革命についての論争に関する諸論考は、以下の収録されている．Gillies (Ed.) [1992] ＆ E. Ausejo & M. Hormigón (Eds.) [1996].
[5]Crowe [1988], p. 260.　Crowe [1992]をも見よ.
[6]Moritz [1942], p. 14 からの引用.

に遺棄されてしまうというような最小限の条件に依存するからなのである[7] 。クロウによれば、しばしば「革命的」と呼ばれることが存在するけれども、科学の多くのもっとも重要な発展は、この基本的な特性を欠く。こうして彼は、「形成的」（formational）発見から、「転換的」（transformational）、すなわち革命的発見（たとえば、コペルニクス革命）を識別する。形成的発見においては、先立つ教義を打ち捨ててしまうことなく、新領域が「形成される」、すなわち創造される。この事例として、エネルギー保存とか、分光学によって例証する。さらに彼は述べる。

> 数学史で起こるのは、革命的というよりは、「形成的」過程であると私は思う。たとえば、ユークリッド〔エウクレイデース〕は、さまざまな非ユークリッド幾何学によって退けられる、というよりは、一緒に併存する。それから、第10法則の前置詞「中で」（in）の強調が枢要である。先立つ法則の多くが明白にしてくれているように、数学的術語や、記号や、メタ数学（たとえば、数学の形而上学）、方法論（たとえば、厳密性の基準）、ひょっとすると数学のヒトリオグラフィーにおいてさえ、革命は起こるかもしれない[8] 。

ここでクロウは、今日のほとんどの現場の数学者を支配しているように思われる固定的信念に捕らわれているように思われる。だが、われわれは、ヘルベルト・メーアテンスとともに、数学の「中で」とはなにを意味するのか問わなければならない[9]。われわれは数学の内容と実体とを、数学的術語とか、記号とか、メタ数学とか、方法論から剥ぐことはできるのであろうか？

クロウが援用した一事例である非ユークリッド幾何学を取り上げてみよう。クロウは述べている。「ユークリッド〔エウクレイデース〕は、さまざまな非ユークリッド幾何学によって斥けられる、というよりは、併存する」。これは、しかし、ホイッグ的判断である。スティーヴン・ケルナーは彼の所見を開陳している。

> 非ユークリッド幾何学の発見までは、数学的実在ないし間主観的直観の一意性とその知見、数学的諸問題のあらゆるクラスの可解性、それから数学的リアリティの概念的ないし言語的定式化におけるあいまいさのない網羅的な省察といった考えは、問題視されたり、もっと精確な分析が必要とされるといったふうには見なされなかった[10]。

非ユークリッド幾何学の発見は、カント的アプリオリズムから離脱することによって、認識論を変えてしまったのだ。つぎには逆に、認識論は、非ユークリ

---

[7]Crowe [1975], p. 165; p. 19.
[8]Ibid., pp. 165-166; p. 19.
[9]Mehrtens [1976], p. 301; Reprinted in Gillies (Ed.) [1992], p. 25.
[10]Körner [1967], pp. 120-121.

ッド幾何学の内容を再解釈することとなった。さらに、クロウは、エウクレイデース（ユークリッド）『原論』の第 1 巻ないしカント的意味でのユークリッド幾何学に言及しているように思われる。幾何学的大きさに適用可能な比例論を内実とする第5巻と、無理量についての複雑な理論からなる第10巻をも思い起こすとよい。

クロウは、彼のヒストリオグラフィーを考えるさいに、『原論』の一部分を選らび採ってしまっている。『原論』の第 5 巻や第 10 巻は打ち捨てられ、というよりも流行遅れになってしまい、リヒャルト・デーデキントの実数論によって全面的に乗り越えられてしまったからだ。第 5 巻や第 10 巻の諸命題は依然として真理だろうか？　エウクレイデースの幾何学的数学は、アリストテレスの自然学と全面的に異なるのだろうか？　そういった諸問題は、次節で取り上げることとする。

§3.　準経験的で時間依存的知識としての数学

数学的真理は、ことばの厳密な意味で、つねに真実で、時間依存的ではなく、永遠であると考えられるのはなぜであろうか？　その理由のひとつは、数学が、歴史以前、あるいは少なくとも古代ギリシャから強固なパラダイムとなったからである。しかし、ハンガリーのサボーが説得力をもって示したように、エウクレイデースの『原論』に見られる公理論数学ですら、歴史的に生成したものであった([11])。数学は演繹的推論を用いた最初の学問のひとつであり、そうして、それは、抽象の手順を介して、現実世界とは異なる理念的世界とつねにかかわるものとされるようになった。古代ギリシャのある時代から、数学は公理論的方法によって特徴づけられるようになり、その歴史的根元こそ、サボーが示そうとし、その企図を改訂することによって、私自身が思想史的かつ社会史的に補強した形態の数学なのであった。私は、思想史的要因として、広義の懐疑主義思潮を挙げ、社会史的基底として、アゴーン競争社会の出現を指摘した([12])。その遺産を継承した古典的イスラーム世界、ラテン中世、近代西欧の数学は、この仕方で展開された。

欧米の数学史家は、一般に、以上で特徴づけたような古代ギリシャで成立した形態の数学をあまりに当然の前提的事項にしてしまいがちなのであるが、数学のそういった形態は、アプリオリにそうだというわけではないことにここでは注意されるべきである。われわれは、ギリシャ数学のパラダイムは中国伝統数学ともっとも効果的に対照させることができる。ジョセフ・ニーダムは『中国の科

[11]この点に関しては、Szabó Árpád の貢献はきわめて重要である［Szabó 1969］．クーンは、数学と天文学を歴史以前からの堅固なパラダイムをもつ学問と見なしている．Kuhn [1962], p. 15.
[12]拙論「ユークリッド公理論的数学と懐疑主義――サボー説の改訂」、『思想』No. 1010（2008 年 6 月号），pp. 100-149．［Sasaki　2008］.

学と文明』の数学に献げられた歴史記述を締めくくるにあたって、「ユークリッドに見られるような、より抽象的で系統的な性質だけを考えるのであれば、ギリシャ数学がはるかに高い水準にあることは疑うべくもない」と東西数学の比較について一般的議論を展開する。「「より抽象的で体系的な性質について」――このことばは、まさに議論の仕掛けの要点となった。体系的ということ、そう、それはたしかにそうであったであろう。しかし、抽象的というのはどうであろうか――それはまったく優越したであろうか？　科学史家たちは、ギリシャの科学と数学が、具体的なもの、経験的なもの、応用的なものも、抽象的なもの、演繹的なもの、純粋的なもののほうを好んだことがまったくプラスになったかどうかということを問題にし始めている」([13])。

ニーダムは、「20 世紀にわたる中国の固有の数学から離れるにあたって、継続した時期とその性質について、一瞥を与えてみよう」として、こう述べている。

> 数学的業績に関しては二つの王朝が際立っており、それは漢および宋である。－1世紀〔紀元前1世紀〕、落下閎と劉歆の時代には、『九章筭術』は知識のみごとな具現であった。それは1千年以上も中国の計算事務官の実務を支配した。しかしながら、その社会的起源において、それは官僚的政府機構と密接に結びついていたのであり、統治する役人たちが解かなければならなかった（または、他の人びとに解くように勧めた）問題のために、捧げられたものである。国土の測量調査、穀倉の容積、堤防や運河の築造、徴税や交易の交換率など――これらはもっとも重要と思われた実際問題であった。‘数学のための’数学（mathematics 'for the sake of mathematics'）については、極端なほど少しのことしか存在しなかった。このことは中国の計算者たちが真理に興味をもたなかったことを意味するのではなくて、ギリシャ人の追求した抽象的で系統だったアカデミックな真理ではなかったのだ、ということである。この期間中、ずっと大衆は文盲のままであって、政府が作製させ、筆写し、かつ行政網の種種の重要部局に配布した写本には近づくこともできなかった。職人たちはいかに才能があっても、見えざる壁の反対側で、文学的素養をもった学者たちから隔てられて活躍していた([14])。

引用文中の「‘数学のための’数学」は、ギリシャの哲学者ピュタゴラスやプラトンの影響下で「純粋数学」が興隆した文化共同体で流布した数学の特異な形態であることに注意する必要がある。そうではない数学が中国では連綿と発展し、そうとう高度な水準にまで達した。ニーダムは、ギリシャ的純粋数学概念とは対照的な中国数学の形態に光を投じながらも、それが文字に習熟しえたごく

---

[13]Joseph Needham, *Science and Civilisation in China*, Vol 3: *Mathematics and the Sciences of the Heavens and the Earth* (Cambridge: Cambridge University Press, 1959), pp. 150-151; 邦訳、ニーダム [1991], pp. 163-164.

[14]Needham, *Science and Civilisation in China*, Vol 3, p. 153; 邦訳, p. 166.

わずかな特権階層のためであったという蔭の部分にも目を閉ざしていない([15])。

そのうえ、古代ギリシャで生まれた数学の幾何学を主としたパラダイムは、近世ヨーロッパで、とくにフランソワ・ヴィエトとルネ・デカルトによって代数的言語で再解釈されなければならなかった [Sasaki 2003]。近代西欧数学の厳密性は、代数的思考によるものとなった。そのことは、オーギュスタン=ルイ・コーシーの『解析教程――第一部代数解析』（*Cours d'Analyse: 1ère partie, Analyse Algébrique*, 1821）から見てとれることである。

数学は一般に、「純粋な演繹的科学」であると信じられてきた。カルマール・ラーサローは、この信仰が支持されてきた理由を要約して、こう述べている。

> (i) アプリオリの哲学が興隆した。それによれば、直観的に明証的な公理群と推論諸規則は、実践によってテストされることは不必要と考えられた。(ii) 数学は、その適当な方法によって、「不可謬」の科学として述語的なものになった。(iii) 数学は、その精確さによって、他の諸学問の理想と考えられるようになった。たぶん、スピノザの『幾何学的方式で論証されたエティカ』（*Ethica more geometrico demonstrata*）に始まり、今日の数学的経済学ないし数学的言語学にいたるまで。(iv) 数学自身の成功と、それから、経験的事実について成り立つますます一般的な規則性への抽象的方法の拡張がなされることによって。そのことは、ますます抽象的な数学的諸定理とアルゴリズムに反映されるようになった([16])。

しかしながら、これらの状況証拠は、数学が経験的起源をもち、その基礎が経験的側面をもつことを否定しない。むしろ、この学問的特徴は、「準経験的」（quasi-empirical）呼ばれるべきであろう。というのも、「数学的に与えられている」（mathematically given）は「経験的に与えられている」と同一ではなくとも、それと密接に関係しているからにほかならないからである。位相幾何学、解析学の諸定理についての歴史的研究と、ゲーデル後の数学の彼の理解によって、数学哲学の「現在の経験主義的ムード」（present empiricist mood）なる特徴づけをな

[15] Needham [1959], pp. 151-153. 『九章筭術』の重要性については、以下の文献でおおいに論じられている。*The Nine Chapters of the Mathematical Art: Companion & Commentary*, by Shen Kangshen, John N. Crossley, and Anthony W.-C. Lun (Oxford: Oxford University Press; Beijing: Science Press, 1999) & 《九章筭术》*Nine Chapters on the Art of Mathematics*, 3 volumes, by Guo Shuchun, Joseph W. Dauben, and Xu Yibao (Liaoning Education Pess, 2013), and in *Les Neuf Chapitres: Le Classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*, Edition critique bilingue traduite, présentée at annotée par Karine Chemla et Guo Shuchun (Paris: Dunod, 2004). とりわけ、最後のフランス語版への Geoffrey Lloyd の "préface" を見よ.
ちなみに、日本人が独自の独創的数学を開化させるようになったのは 17 世紀の江戸時代初期で、中国宋元数学を導入せしめてからのことであった。この点については、拙稿「和算の成立」『思想』，第 1138 号（2019 年 2 月），pp. 103-125 を見よ。もっと詳細には、拙著[2020].

[16] Kalmár [1967], pp. 188-189.

したのは、イムレ・ラカトシュであった。彼は、1930-31年のクルト・ゲーデルの不完全性定理のインパクトを説明して簡潔に述べている。

> 数学における証明と定義の無限後退によって、ユークリッド的〔エウクレイデース的〕論理によっては止めることができない。論理は数学を解説するかもしれないが、証明することはできない([17])。

したがって、カルマールによる問題提起へのラカトシュのコメントの標題は、「近年の数学哲学における経験主義のルネサンス」となっている。ラカトシュは、彼の主張を述べている。

> カルマール教授によって強力に提示された現在の経験主義的ムードは、数学は、基礎論研究の最初の英雄時代の期待された、エウクレイデース〔ユークリッド〕的ないし準エウクレイデース的でなく、準経験的なのである。注意は、そのエウクレイデース的核心の外側の数学の部分に向けられるようになっている([18])。

一言で言えば、数学は規範的には「純粋な演繹的な科学」であるが、実際には、「準経験的」なのである。

数学の命題の不可謬性なるものはどうか？ エウクレイデースの『原論』第5巻と第10巻の諸命題は不可謬で、たとえば、アリストテレスの『自然学』の自然哲学的言明とは異なるのではないだろうか？

数学理論には二種あると考える論者がいる。ひとつは、数学者に理論創成時に生き生きした応用を提供する数学理論のグループである。これらの理論を、「活きている」（active）と呼ぶことにしよう。それは、しばしばクーンの「通常科学」（normal science）に対応する、ヘルベルト・メーアテンスのいう「通常数学」（normal mathematics）の概念へと拡張されるかもしれない([19])。他のグループは、もはや「活きてはいない」理論からなる。精確には、流行遅れの理論であろう。

数学なる学問を歴史的に発展する一科学と見なすとすれば、それは経験的起源をもち、絶対的厳密性は得られない。スティーヴン・ケルナーはゲーデル後の数学の哲学的意味を分析し、それを競合的な非ユークリッド幾何学の存在と比較している。

> いくつかのドグマティックな形而上学はつねに無視するとして、20世紀の

---

[17]Lakatos [1962], p. 178; Lakatos [1978a]に再刊, p. 19. 強調は原文. クーン教授は、Lakatos [1976]を高く評価すると意見を吐露していた（1986 年の来日時）.

[18]Lakatos, "A Renaissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics?" in Lakatos (Ed.) [1967], p. 202 (強調は原文). この観点は、Lakatos [1978b], pp. 24-42, においても展開されている.

[19]Mehrtens [1976], p. 305; Reprinted in Gillies (Ed.) [1992], p. 29.

> メタ数学的発見は、非競合的数学諸理論の古典的哲学によって共有されていた共通了解の誤謬が結論づけられなければならず、もし数学が、実際の、もしくは、あらゆる可能世界で真あるいは偽でないなら、それは無意味だというような実証主義的考えを導く、ということはない([20])。

こうしてケルナーは、競合的数学的諸理論が経験とかかわり、そして、それらの歴史的妥当性と生き残りが現実世界への応用によって支持されると述べて、ドグマ的形式主義を排斥する。

> 他方、それらは、それらのどれもが実際的ではなくとも、さまざまな同値ならざる、たがいに競合的諸理論が有意味的である、すなわち、相異なる可能世界で真であり、それらの相互の一致や競争は経験とのかかわりにある、すなわち、それらのすくなくともいくつかの公理とか定理が、経験的諸命題とともに一致可能であるかそうでないかという観点を支持する([21])。

もしも三段論法の推論がつねに真であるとすると、数学的命題は、その公準が真であるとすれば、必然的に真である。しかし公準や厳密性の規準は時間依存的である。数学の世界は、たとえ理念化されているにしても、本質的に現実世界へと開かれている。さらに、そのような理念化は、歴史を超越することはできない。数学用語は、それが紡ぎ出された歴史的世界に縛られている。エウクレイデース『原論』の第一定義を引用してみよう。「点とは部分のないものである」。この定義へのコメントが示しているように、点の定義は再三再解釈されてきた。精確に言えば、ダーフィト・ヒルベルトの『幾何学の基礎』（*Grundlagen der Geometrie*, 1899年初版） はエウクレイデースのものと同一ではない。もしエウクレイデースの理論が永遠であるとしたら、その理論は、初等的言明と、ギリシャ人と近代人に共通な世界にだけかかわるといったことは真であろう。だが、17世紀から20世紀初めまで、エウクレイデース主義は大きく後退してしまった。ラカトシュが述べているように、

> 経験主義のプログラムの可謬的彫琢が勝利し、エウクレイデース主義者の無謬学等々といった、知識が依然としてトリヴィアルな立ち遅れた学科だけでしか生き伸びられなかったのだ([22])。

われわれわれは、歴史的に遺棄された自然学理論――たとえば、アリストテレスの自然哲学――を、関連する世界観（Weltanschauung）とか、運動、真空、空

---

[20]Körner [1967], pp. 131-132. ラカトシュのはじめの動機は、「論理実証主義の防波堤」（a bulwark of logical positivist philosophy）である形式主義を反駁することであった。「序論」（Author's introduction）を見よ（Lakatos [1976], p. 2; 拙訳[1980], p. 3）.
[21]Körner [1967], p. 132.
[22]Lakatos [1962], p. 166; Reprinted in Lakatos [1978], p. 7.

間、場所といった用語を検討することによって解説する。古代のアリストテレス自然学と近代のニュートン力学とのあいだには非連続性が存在する。クーンは、この非連続性を「通約不可能性」（incommensurability）と呼び、そこに科学革命を見た([23])。なるほど自然科学においては、数学におけるよりも、新しい言明によって、はるかに容易に反駁されることは認められるにしても、「数学においてだけ、各世代は旧い構造に新しい階を打ち立てるのである」というような19世紀の数学者の夢を見ることはできない。

これまで、数学をプラトン主義的に捕らえてはならず、経験的側面をも備えるということを「準経験的」という形容詞を用いて主張してきたが、今度は、数学的真理は社会的次元を持つことを述べる。

ジュディス・V・グラビナーは1974年刊の論考「数学的真理は時間依存的か？」において、数学的厳密性の基準が変わる理由を追求している。オーギュスタン=ルイ・コーシーやベルナルド・ボルツァーノにはじまる19世紀の解析学者は、無限小代数解析の諸命題に厳密な証明を要求した。複素関数、多変数関数、無限三角関数への関心が増すにようになる18世紀末になると、誤謬を回避することが重要になった。グラビナーは社会的変化にアピールする。

> 18世紀の最後の10年間、数学者たちはしばしば宮廷に仕えていた。彼らの仕事は、数学をやり、そうして彼らのパトロンの栄誉とか啓発をなすことであった。しかし、フランス革命後、ほとんどすべての数学者は生計を教えることで立てるようになった([24])。

グラビナーは問う。「数学者の教える必要性という新しい経済的状況はどうして厳密性を促進させることになるというのだろうか？」　この問いに対して彼女は答える。「教えることは、つねに、教師を教える学科の基礎を注意深く考察することを余儀なくさせる。数学者は、それを用いるために概念について充分の理解するようになり、経験から得られた洞察に頼るようにさせられた可能性がある」([25])。

たしかに数学的命題は時間依存的ではあるが、時代と文明を容易に跨がる厳密性の基準の光のもとで、無謬であるかに見える。それらが創造された世界観に依存するかもしれないが、理解可能である。数学のこの側面は、疑いなく自然諸科学とはおおいに異なる。この意味で、数学的知識は、プラトン主義的意味での理念的世界にかかわる。

しかし、数学には依然として活きているかどうかについての問題がある。『原論』第5巻・第10巻は、特別の歴史的関心の対象として以外にはもはや活きては

---

[23]Kuhn, "What Are Scientific Revolutions" in Kuhn [2000], pp. 13-32. 拙訳 [2008], 第1章.1

[24]Grabiner [1974], p. 360; Reprinted in Tymoczko (Ed.) [1998], p. 207.　Grabiner [1981] をも見よ.

[25]Ibid., p. 360; Tymoczko (Ed.) [1998], p. 208. 1

いない。厳密な意味では、第 1 巻ですら数学研究者のあいだでは活きてはいない。数学的思考の仕方が変わったからだ。エウクレイデースに帰る以前に、微分積分学に焦点を当てることとする。

§4. 微分積分学以前の面積測定と接線法
――アルキメデスからピエール・ド・フェルマーまで

さて、われわれは17世紀ヨーロッパで微分積分学がいかにして形成されたのかを見ようとし、そのためにアルキメデスからピエール・ド・フェルマーまでの先駆的数学者を考察する([26])。

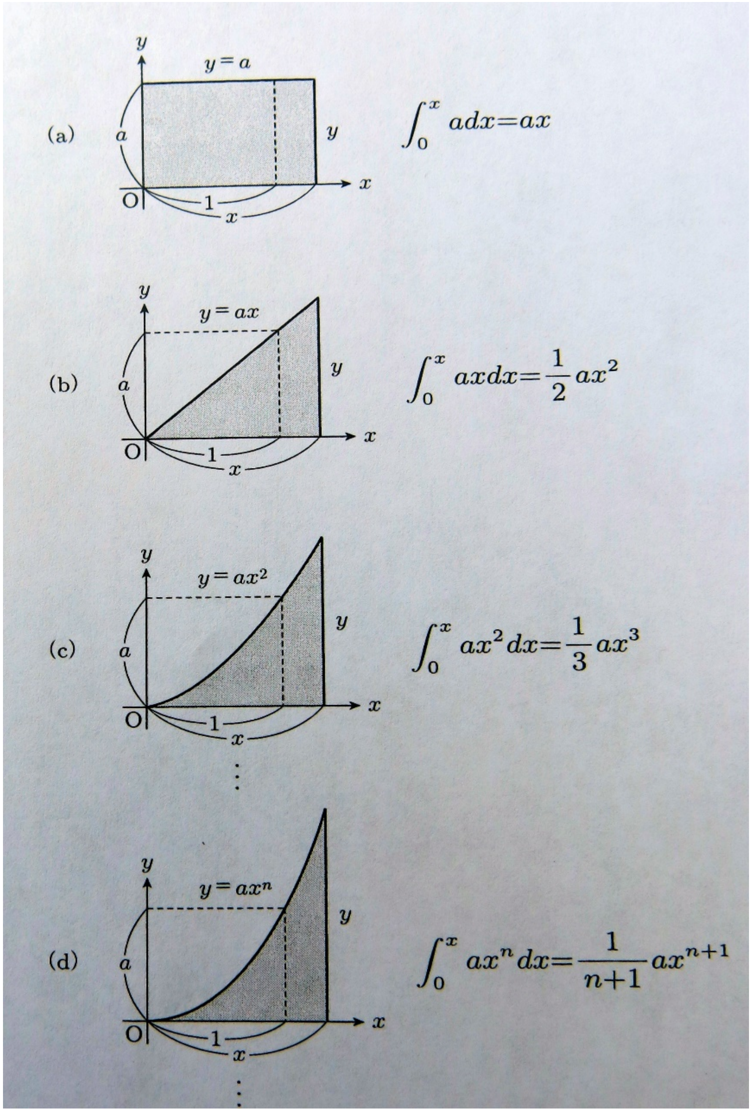
積分法は、古代からの面積測定ないし計算の技法から出た、と言うことができる。古代人は、一方の辺がa で、他方の辺がxである長方形の面積が$\int adx = ax$（図1.a）であることを知っていた。それから、底辺がx で、高さが$y = ax$ である三角形の面積が$\int axdx = ax^2/2$ （図1.b）に等しいことも知っていた。

そうして、アルキメデスが『パラボラの求積』において試みたことは、パラボラの断片の面積を得ることであった。巧妙な幾何学的並びに機械学的方法によって、彼は、パラボラの断片の面積が、近代代数言語では、$\int ax^2dx = ax^3/3$ （図1.c） であることを求めた。

アラビア数学史の専門家のロシュディー・ラーシェドは、西暦9世紀イスラーム世界の数学者サービット・イブン・クッラが古代ギリシャの無限小幾何学を算術的な新軌道に乗せ、そうして彼の天才的孫のイブラーヒーム・イブン・シナーン・イブン・サービット・イブン・クッラがパラボラの求積についてアルキメデスの導出法をエレガントに簡約化したことを示した。そのうえで、10世紀から11世紀前半のイブヌル・ハイサム（アルハサンal-Ḥasanという名から、ラテン語的にはアルハゼン） が、無限小幾何学に関して古代のアルキメデスに優るとも劣らない結果を得たことを示した [Rashed 1993]。

[26]無限小数学発展の概観は、なかんずく、Edwards [1979]を見よ。原典については、Struik (Ed.) [1969]が有益である。拙著[2010]をも参照。

図 1



アルキメデスの著作集がルネサンスのヨーロッパでほぼ全面的に復興するや、人文主義的数学者は、アルキメデスの方法をわがものとし、それを超えて進むようになった。ボナヴェントゥーラ・カヴァリエリ（Bonaventura Cavalieri *c*. 1598-1647）は、1635年にボローニャで刊行された『不可分者による連続体の幾何学』（*Geometria indivisibilibus continuorum*）において、求積の新規の方法を導入し、アルキメデスのパラボラについての公式 $\int ax^2dx = ax^3/3$ を得たが、新しい結果は導き出さなかった。だが、1647年刊の後年の著作『幾何学の六つの演習』（*Exercitationes geometriae sex*）において、$n = 3, 4, ..., 9$ についての一般ないし高次パラボラについて、以下の公式を得た。

$$\int ax^ndx = ax^{n+1} / (n+1).$$

想像可能なように、カヴァリエリがこれらの結果を得るために用いたアルキメデスのパラボラの求積の幾何学的方法の自然な拡張と言えるものであった。才能ある17世紀の数学者にとって、以下の公式を帰納的に一般的に推測することは、それほど難しいことではなかったであろう（図1.d）：

$$\int ax^n dx = ax^{n+1} / (n+1) \text{ for } ax^n \ (\mathrm{n} \geqq 3).$$

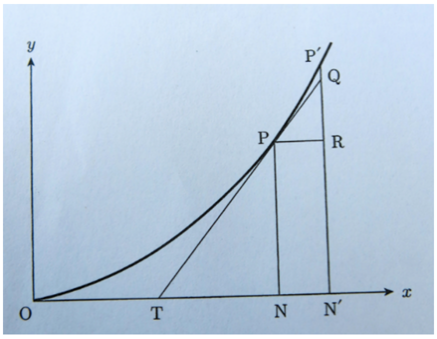
さらに、ピエール・ド・フェルマー（Pierre de Fermat　1607/8-1665）は上記の公式を、n が正の有理数と−1ではない負の整数について成り立つことを示した。

接線を描く近代的方法もがフェルマーによって得られたということができるであろう。彼の「極大・極小を求めるため、そして曲線の接線についての方法」（Methodus ad disquirendum maximam et minimam et de tangentibus linearum curvarum）という標題の稿本は、1629~36年書かれたものと推測されるが、そこでファルマーは、極大値・極小値、それからパラボラへの接線を描く代数的方法を得ている([27])。

曲線へのＰにおける接線*PT*をいかに描くかの彼の方法を見てみる。彼は接線影*TN*の長さを求めることから得ている。これから、*n*を正の整数とするときの一般パラボラ $y = x^n$ への接線の方法へと拡張することができる([28])。図2において、P を (x, y) とし、P' が曲線上の近傍の点 $(x+e, y+d)$ であるとすれば、以下の式を得る。

$$y + d = (x + e)^n = x^n + nx^{n-1} e + \{e^2 \text{ の項、および } e \text{のもっと高次の項}\}$$

図2



そうすると、$d/e = nxn - 1 + \{e$を含む項$\}$.　したがって、曲線のP における傾きは以下の式によって得られる。これはわれわれに馴染みの公式である。

---

[27]Fermat [1891], t. I , pp. 133-167; A French translation in Fermat [1896], t. Ⅲ, pp. 121-147.　Cf. Mahoney [1973], Chapter Ⅳ: "Fashioning One's Own Luck," pp. 143-213.
[28]解釈については、Hollingdale [1989], pp. 141-142 を見よ．図 2 はこの書の p. 142 から採られている．

$$dy/dx = dx^n / dx = nx^{n-1} .$$

接線のアルゴリズム的方法によって、フェルマーは、一般パラボラ$y = ax^n$の接線の傾きが$dy/dx = nax^{n-1}$ となるという結果を得た。しかし、不幸にして、彼は求積法のアルゴリズムと接線法のアルゴリズムがたがいに可逆であるという関係を導くことはできなかった。

§5. 微分積分法の基本定理の認識
――幾何学的思考法 対 代数的思考法をめぐる五人の数学者

17世紀中葉、5人の数学者が漸次的に、求積法と微分法のあいだの可逆関係を認識していった。イタリアの数学者のエヴァンジェリスタ・トリチェッリ（Evangelista Torricelli 1608-1647)、スコットランド人のジェイムズ・グレゴリー（James Gregory 1638-1673)、ケンブリッジ大学の２人の数学教授アイザック・ニュートン（Isaac Newton 1642-1727）とアイザック・バロウ（Isaac Barrow 1630-1677)、そしてドイツの万能人（uomo universale）グットフリート・ヴィルヘルム・ライプニッツ（Gottfried Wilhelm Leibniz 1646-1716)であった。

最初に求積法と接線法の可逆関係を認識したのはトリチェッリであった。特定の幾何学的曲線に関して、すなわち一般パラボラと双曲線の場合に、面積を見いだすと逆接線問題を解くことは本質的に同一であることを理解した。いわゆる逆接線問題は、接線を特徴づける法則が与えられたとすれば、曲線を求めることに帰着される。この認識は、ガリレオ・ガリレイから得られた運動学的考察と、カヴァリエリの不可分者の幾何学的方法から得られた。トリチェッリの数学的著作は、1919-44年に全４巻・全５部からなる『エヴァンジェリスタ・トリチェッリ著作集』（*Opere di Evangelista Torricelli*）が出版されるまでは、未刊のままであった。たしかに、トリチェッリは注目すべき数学者であったのだが、正統的な幾何学的方法に全面的に依存し続けたのであった。同時代人は彼を「最高の幾何学者」（geometra summo）と呼んだのだが、そのとおりであった。

ジェイムズ・グレゴリーは求積法と接線法の可逆関係の認識を公刊した最初の人であった。パドヴァで1668年に出版した『幾何学の一般的部分』（*Geometriae pars universalis*）においてであった。グレゴリーが扱った曲線はごく一般的であったのだが、トリチェッリの場合と同じく、代数的ではなく、全面的に幾何学的であった。A・プラーグが1939年に述べたことはまったく正しかったように思われる。「事実、積分法の基本定理の最初の証明が得られている。けれども、接線と面積の問題は、依然として狭く、幾何学である。微分と積分は、計算過程として、演算とは理解されておらず、精確に「演算」の思想に基づく、近代的な抽象的概念を応用することによって、旧式の結果を描写したり、説明したりすること

はほとんど正当化されない」(29)。

アイザック・ニュートンは、求積法と接線法が代数的にたがいに可逆であることを認識した最初の数学者であった。彼はこの結果に1665年5月には到達した。若きニュートンは、「流率法についての1666年10月論文」なる草稿において、問題5をつぎのように書いている。「面積が任意に与えられた方程式によって表現される曲線の性質を見いだすこと」(30)。

ニュートンの「解答」は本質的に以下のようであった。図3において、曲線 $ac = q = f(x)$ の下に描かれる面積をyとし、底辺が x で、高さが1である長方形の面積 x を考える。 流率p ($= \dot{x} = dx/dt$, ライプニッツ的記号法で）とq ($= \dot{y} = dy/dt$) を$q = be : bc$であるようにとる。すなわち、$p : q = 1 : f(\mathrm{x})$となる。 $y = \int f(t)\, dt$ であるから、 先の式は、$(d/dx) \int f(t)\, dt = f(x)$であることを示す。この定式化と「解法」はきわめて単純であり、微分積分学の基本的利にほかならない。

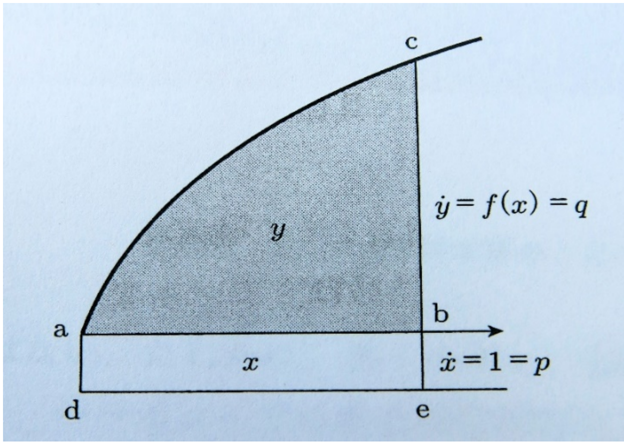


図3

しかしながら、ニュートンは、この注目すべき結果をただちに公にはしなかった。彼の流率法が一般的に知られるようになったのは、「曲線求積論」（De quadratura curvatum）が1704年に公刊されたことによってであった。

ケンブリッジ大学のヘンリー・ルーカス数学教授の前任者のアイザック・バロウは、代数的に微分積分学の基本定理に翻訳可能な結果を公にしたことで知られる。ケンブリッジで1668-69年に講義され、1670年に公刊された『幾何学講義』（*Lectiones geometricae*）によってであった。その講義録の第X講の命題11は、つぎのように読める（図4）(31)。

> *ZGE*を、軸が*VD*の任意の線とし、*VZ*における最初のものから何からの仕方で連続的に増大する垂直線（*VZ*, *PG*, *DE*）はその軸に主として当てられた

---

[29]Prag [1939], p. 491.　Dehn et al. [1943], p. 162 をも見よ。

[30]Newton [1967], p. 427.

[31]Barrow [1860], pp. 243-244.　Child [1916], pp. 116-117 をも見よ。　Child には誤訳があるが、私がラテン語原文によって訂正してある。

ものとする。さらに、線VIFは、VDに垂直に引かれた直線EDF（それは曲線をE, Fで、VDそれ自身をDで切るであろう）に対して、DFとある定まったRからの長方形が対応して囲まれる広がり$VDEZ$に常に等しくなるようであるとする。ところで、$DE : DF = R : DT$とし、直線TFを結ぶ。これは、曲線VIFに接するであろう([32])。

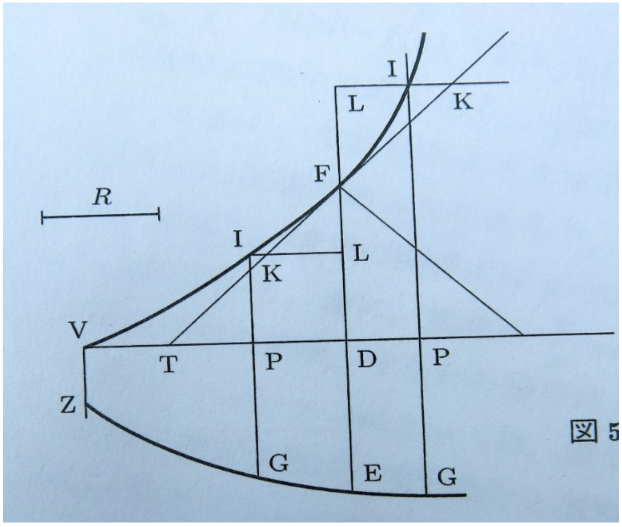


図4

すなわち、任意の曲線をZGEとし、第二の曲線VIFが、Rを与えられた長さの線分とする時、面積$VDEZ = R$・DFとし、さらに、$DE : DF = R : DT$という関係式を満たすものとする。この仮定のもとで、TFは曲線VIFに接すると主張するのである。

証明は簡明であり、以下のようである。任意の点Iが線VIFの内部にとられているとするなら、仮定の関係式から、比例式$LF : LK = DF : DT = DE : R$ が成り立つ。すなわち、R・$LF = LK$・DE. ところで、面積$PDEG = R\,(FD - LD) = R$・LF、したがって、LK・$DE =$ 面積$PDEG < PD$・DEとなる. ゆえに、$LK < DP = LI$.

そうではなく、点IがFの反対側にとられているとすると、同様にして、今度は$LK > DP = LI$が示される。以上の考察から、線TKF全体が、曲線$VIFI$の下にあることがわかる。換言すれば、線TFは、曲線VIFに接することが示されたのである。

バロウの証明が、グレゴリーの場合と同様に純粋に幾何学的であることが印象的である。マホーニィは、バロウのソースとしてグレゴリーの『幾何学の一般的部分』があったとしている([33])。ここで、バロウの幾何学的考察を代数解析的

[32]Isaac Barrow, *Lectiones geometicae*, in *The Mathematical Works*, ed. by W. Whewell (Cambridge, 1860; Hildesheim/New York: Georg Olms, 1973), pp. 243-244. 比例の記号は少し変えてある。

[33]M. S. Mahoney, "Barrow's Mathematics: between ancients and moderns," in *Before Newton: The life and times of Isaac Barrow*, ed. by Mordechai Feingold (Cambridge: Cambridge University Press, 1990), pp. 179-249, at p. 235.

言語に翻訳してみる。曲線ZGEを$y=f(x)$, 曲線VIF を$z=g(x)$で表わすと、前記関係式は、$Rz=\int y\,dx, y:z=R:DT$と書き換えることができる。上の証明で、DTがVIFの接線影（接線の横座標）であることが示されたから、$y:z=R:zdx/dz$. それゆえ、$y=R\,dz/dx$, すなわち、$y=(d/dx)\int y\,dx$. これは、まさしく「微分積分学の基本定理」の一形態にほかならない。それで、ジェイムズ・M・チャイルドは、『アイザック・バロウの幾何学講義』（1916）において、バロウは微分積分学に到達していたと結論したわけであった。チャイルドによれば、命題11は、「微分と積分（積分は総和として定義されている）が逆操作であることの厳密な証明なのである。周知にように、バロウは、最初にこのことを認識しただけではなく、きわめて注意深く、全面的証明を与えている事実から判断して、加えて、逆定理を証明する労を取っている。これらの事実から判断して、彼は定理の重要性をも理解していたに違いないと私は主張する」([34])。こうして、「バロウは微分積分学を得ていた」([35])というチャイルドの結論が導き出される。

ここでわれわれは問わなければならない。以上で示したバロウの命題は、本当に微分積分学の基本定理を言えるのであろうか？　換言すれば、バロウは、微分積分学の中核部分を得ていたと言えるのであろうか？

たしかに、バロウは、ウィリアム・オートリッドの1631年刊の『数学の鍵』で提示されていた記号代数に親しんでいたし、1655年刊のみずからのエウクレイデース『原論』の簡約版本を見ればわかるように、記号代数を自家薬籠のものとしていた。だが、先述の第X講命題11を注意深く検討すれば、明らかになるように、その命題は全面的に幾何学的なスタイルをとっている。バロウは、幾何学の古代ギリシャ的やり方の称賛者であり続けたのであった [Sasaki 1985]。

バロウとまったく異なっていたのはライプニッツであった。彼は、子ども時代から普遍記号学という野心的な学問思想的プログラムを抱懐していた。デカルト的な記号代数の知識は、フランス・ファン・スホーテンによって編集されたデカルト『幾何学』（*Geometria*）の1659-61年刊の第二版から得ていた。とくに、ファン・スホーテンの『普遍数学の諸原理』（*Principia matheseos universalis*）に親しんでいた。その論著は、もともとはデンマーク人のエラスムス・バルトリンによって編纂されライデンにおいて1651年に公刊されていたものであった。

ライプニッツの数学的能力は、彼のパリ滞在時にクリスティアーン・ホイヘンスと出会うことによって著しく増進せられた。ホイヘンスによって1673年に読むことを進言されたのは、ブレーズ・パスカルの幾何学的著作であった。まもなく、ライプニッツは、パスカルの幾何学的論考に、パスカルのアルキメデス的な厳密な幾何学的スタイルによってではなく、デカルト的な代数解析のスタイルによって親しんだのであった。ライプニッツの遺稿「微分算の歴史と起源」（Historia et origo calculi differentialis）なる稿本において、彼はデトンヴィル（パ

---

[34]J. M. Child, *The Geometrical Lectures of Isaac Barrow* (Chicago/London: Open Court, 1916), p. 124.

[35] Ibid., p. ix.　強調は原文.

スカルの筆名）の幾何学図形を見た瞬間について漏らしている。「デットンヴィルが示した一事例から光が突然差した。奇妙なことに、パスカル自身はそれに気づくことはなかった。というのは、パスカルは、球とその一部との表面積を測るアルキメデスの定理を証明するとき、軸の周りの回転によって生成される立体の全表面をそれに比例する平面図形に還元するという方法を用いたからであった。そのことから、われわれの若い友人〔ライプニッツ自身のこと〕は、つぎの一般的定理を発見したのであった。すなわち、曲線に垂直な直線が軸と曲線に挟まれた部分は、規則正しく軸に垂直に立てられると、軸から測った曲線のモメントに比例する図形を与える、というものであった」([36])。ライプニッツのパリでの最初の数学研究の大きな成果は、円と円錐曲線の算術的求積であり、そのもっともよく知られた結果は、彼の名が付いた $\pi/4 = 1/1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \ldots$ 公式であった([37])。

1675年10月末、ライプニッツの無限小計算に重要な一歩が記された。パリでの最終年はライプニッツの脅威の諸年（anni mirabiles）のなかのひとつであった」[Antognazza 2009, p. 163]。1675年10月29日の日付けをもつ「求積解析の第二部」（Analyseos tetragonisticae pars secunda）において、ライプニッツは、記号∫（アルファベットの s の長いかたち ſ のイタリック体）を「和」（summa）、そして記号 *d* を「差」（differentia）に用いて、書いている。「ちょうど∫が次元を増すように、*d*は減らす。ところで、∫は和を、*d* は差を意味する」([38])。

ライプニッツは1680年代になると、ライプツィヒで新規に創刊された雑誌『学者報知』（*Acta Eruditorum*）に、新しい無限小計算についての論考を出版し始める。その手始めは、1682年2月号掲載の「円の真の比例」（De vera proportione circuli）であった。標題から判明するように、それは円の算術的求積についてであった。1684年4月号には、「極大・極小、そして接線についての新方法」（Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus）が掲載された。それは、微分計算の基礎法則についての論文であった。そこでは、微分計算は、「アルゴリズム」（Algorithmus）([39])と呼ばれた。いまや周知にように、ラテン語の「アルゴリスムス」（algorismus）は、ムスリム数学者の名前ムハンマド・イブン・ムーサ・アル=フワーリズミーに由来し、インド - アラビア数字による計算技法を指す名称となったものであった。ライプニッツは、この語彙を自分の記号計算法のための語彙として使用しようとしているのである。"algorismus"ではなく、"algorithmus"なる綴りが用いられたのは、おそらく、その語が、アラビアの固有

[36]Leibniz [1858], p. 399; 邦訳[1999], pp. 317-318. An English translation in Leibniz [1920], p. 38.

[37]算術的求積についての詳細なテキストは Leibniz [1993]; [2012], pp. 520-676; With a French translation, Leibniz [2004].

[38]Leibniz [1899], p. 155; 邦訳 [1997], p. 167. An English translation in Leibniz [1920], p. 82.

[39]Leibniz [1858], p. 222. ライプニッツの微分算についての、*Acta euditorum* 掲載の論考テキストのフランス語訳については、Leibniz [1989]を見よ．語彙"L'Algorithme"は p. 110 に見える．

名詞ではなく、ギリシャ語語彙から出来したものと誤解したからであろう。

『学者報知』の1686年6月号に掲載の「深奥の幾何学と不可分者並びに無限者の解析について」(De geometria recondita et Analysi Indivisibilium atque infinitorum) において、"$d.\frac{1}{2}xx = xdx$" なる式とその逆の"$\frac{1}{2}xx = \int xdx$"なる式を書いてあとで、ライプニッツは書いている。「というのも、通常の計算での冪と根のように、和と差、すなわち、∫と*d*は逆になるからである」([40])と注意している。これは、全面的に代数的形態での無限小計算の基本定理の告知であった。ヨーゼフ・E・ホフマンが述べているように、ライプニッツが新しい無限小計算発見の過程でなしたことは、「無限小問題の代数化」であった([41])。1693年9月号に、ライプニッツは「幾何学的求積の補充、すなわち、あらゆる求積の運動によるもっとも一般的な方式、そして同様に、接線が与えられた条件のもとでの線の多様な作図」(Supplementum geometriae dimensoriae, seu generalissima omnium Tetragonismorum effectio per Motum: similiterque multiplex constructio lineae ex data Tangentium conditione) を掲載し、そこで、求積の一般的問題は接線の法則が与えられた線を見いだすことに帰着されることを、代数的アルゴリズムにおいてだけではなく、無限小幾何学的に示した([42])。これは、「無限小計算」、すなわち微分積分学の基本定理の言明なのである。

「微分積分学」(calculus differentialis et integralis) なることばは、ライプニッツのもっとも才能ある後継者であるヤーコプ・ベルヌリ (1654-1705) とヨーハン・ベルヌリ (1667-1748)の兄弟によるものであったが、ヴィエトとデカルトの有限量についての代数解析を無限小にまで拡張した形態なのである。この特性は明確にライプニッツによって述べられている。「微分算の歴史と起源」において、彼は、ヴィエトとデカルトの数学は「通常のすなわちアポロニオス幾何学」(Geometria communis seu Apolloniana) なのであるが、彼自身のは、「アルキメデス幾何学」(Geometria Archimedea.) ([43]) である、と主張した。もしもデカルト的数学が「普遍数学」(mathesis universalis) の一形態と呼ぶとすれば、ライプニッツのは、「普遍数学」のアルキメデス的形態であったのである。

17世紀西欧は、トリチェッリと同様の「最高の幾何学者」である数学的天才たちを生んだ。パスカルは、そのような「最高の幾何学者」のひとりであり、彼の数学は、アルキメデス的な無限小幾何学のある種の頂点であった。ライプニッツは、パスカルの無限小幾何学についての著作をヴィエトとデカルトが開拓した新しい数学様式で見た。ライプニッツの「微分算の歴史と起源」中の彼自身のことばで言えば、「ライプニッツ以前には誰ひとり、新しい算法の一種のアルゴリズムを作ることは及ばなかったのである。このアルゴリズムによって、想像力は図形への不断の注意から解法された。これは、ヴィエトとデカルトが通常の幾何

---

[40]Leibniz [1858], p. 231; Leibniz [1989], pp. 137-138.
[41]Hofmann [1974], p. 194.
[42]Leibniz [1858], p. 298;　Leibniz [1989], p. 263; 邦訳[1999], pp. 39-40; Struik (Ed.) [1969].
[43]Leibniz [1858], pp. 393-394.

学、すなわちアポロニオス的な幾何学について行なったことであるが、デカルトはより高度の、アルキメデス幾何学に属すること、また、同じ理由から機械的と呼ばれた線を、はっきりと自分の計算から排除してしまった。けれども、いまはライプニッツの新しい算法によって、幾何学のこのような全体が解析的計算の対象となるのである」([44])。一言で言えば、ライプニッツは、彼の数学的経歴のまさに最初から、すぐれて「最高の代数学者」（algebrista summo）なのであったのだ。「というのも、ライプニッツにとっては、典型的に、彼の微積分学へのアプローチが、数学や自然学をはるかに超えて、論理学、哲学、宗教、倫理学、政治学へと及ぶ含意をもった、はるかに広範なプロジェクトである、普遍記号学（characteristica universalis）の一部だったからなのである」[Antognazza 2009, p. 165]。ときに、数学思想の様式は、17世紀に、幾何学的なものから代数的なものへと転換したことが指摘される[Mahoney 1980]。この転換によって、幾何学的曲線を特徴づける仕方が変わった、すなわち、幾何学の基礎の変更が、なかんずくデカルトとともになされた [Molland 1976]。したがって、ライプニッツの斬新な計算法は、剴切には、「無限小代数解析」（infinitesimal algebraic analysis）と呼ばれるべきなのである。この意味で、もしもトリチェッリとパスカルの幾何学的思考様式に「保守的」な要素を見るとすれば、ライプニッツは、数学的な革命家なのであった[Grosholz 1992]。

ニュートンもまた、数学上の革命家と呼ばれるかもしれない。だが、彼は成熟した年になってからは、「保守的」になった。彼はデカルト的代数解析から数学学習を始め、流率法を発見したのであったが、1680年代には、バロウとホイヘンスといった古典的で幾何学者であった数学者の厳密性の基準へと帰っていった。そうして、こう漏らした。「代数は数学にぶきっちょな者どもの解析なのだ」（Algebra is the Analysis of the Bunglers in Mathematics.）([45]) 。ニュートンが晩年称賛したのは、古代ギリシャのアルキメデスとパッポスの形態の幾何学的解析なのであった。

微分積分学において、ライプニッツは、クーンの自然科学でのアントワーヌ=ロラン・ラヴォワジエに準えることができるであろう。旧式のフロギストン理論を旧套墨守するのではなく、酸素による燃焼理論を提唱した、あの化学革命のヒーローである。数学にも革命は存在するのである。われわれは、幾何学的思考法を保持したトリチェッリ、グレゴリー、バロウを微分積分学の基本定理の発見者と見なすことはできない。たしかに、ニュートンは基本定理を最初に見いだした。だが、彼は後年、「保守化」した。カール・B・ボイヤーの用語での「解析革命」（analytical revolution） [Boyer 1956, pp. 218, 256, & 268] を始めたのはライプニッツであった。「解析革命」は、フランス革命後に開設されたエコル・ポリテクニクにおいて教育学的道具になった。

---

[44]Leibniz [1858], pp. 393-394; An English translation in Leibniz [1920], pp. 25-26.
[45]引用文は Hiscock [1937], p. 42. この一文は 1708 年 5 月に書かれた．編集者は注記している。「これはユーモア無しと思われているニュートンの稀な発言にちがいない」（This must be a rare utterance from the supposedly humourless Newton.）

§6. 数学における真理と自然科学における真理との対照

それでは、数学的真理は、どう特徴づけされるのであろうか？　自然諸科学における真理と異なるのであろうか？　もしそうだとすると、前者は後者とどう異なるのであろうか？

クーンは、『科学革命の構造』において、ラヴォワジエによる酸素の発見は、いわゆるフロギストン説を信奉し続けたシェーレとプリーストリーのある種の「ほのめかし」とは異なっていたのだと論じた。「ラヴォワジエが1777年以降の諸論文で告知したのは」、とクーンは書いている――「酸素の発見なのではなく、酸素による燃焼理論なのである。その理論は、通常、化学革命と呼ばれるほど広範な化学の再定式化にとっての要石であった」[Kuhn 1962, p. 56]。フロギストン説は、ラヴォワジエの新規の燃焼理論とともに遺棄されてしまったのだ。

数学における革命によって何が起こるのか？　本章の第３節で指摘しておいたように、数学的真理は、準経験的であり、かつ時間依存的に相違ない。それは、この現実の自然的、社会的世界から隔絶されているわけではないのだ。しかし、同時に、現実の自然の世界や、エトムント・フッサールの哲学的語句を用いて言えば「生活世界」（Lebenswelt）によって、全面的に経験的ないし存在論的に拘束されているわけでもない。それから、数学的真理は、せいぜい条件的真理であることに注意されねばならない。今日的理解によれば、「数学は可能的な理念的構造の科学（science of possible idealized structures）と見なされる」。この定義は、パウル・ベルナイスの特徴づけによる[Bernays 1974, p. 603]。数学の革命によって、新規の理論ははや流行り、旧式の理論は流行遅れになるに相違ない。すなわち、メーアテンスの概念を用いて表現すれば、「通常数学」（normal mathematics）であることを止める。だが、全面的に遺棄されるわけでもない。たとえば、ライプニッツの解析革命によって、無限小計算はとても影響力を増し、数学者たちによって大いに利用されるようになった。けれども、たとえば、トリチェッリやパスカルの無限小幾何学の真理価値は維持された。この意味で、数学における革命は、自然諸科学における革命ほどラディカルなわけではない。

数学における真理価値は、ふつうは保持されるとされる。数学は相対的に存在論的に拘束されるわけではないからである。他方、自然諸科学は現実の経験的な自然世界にかかわり、数学よりは、はるかに大きな度会いで、存在論的に拘束される。これが、自然諸科学の旧理論がしばしば単純に遺棄されてしまう理由なのである。たとえば、フロギストン説である。けれども、ある種の理論、たとえば、ニュートン力学は学ばれ続ける。

ここで、数学的真理について、一般的に注記する必要がある。数学的真理は、一般に論証によってその真理性を保証されるものと理解される。けれども、その論証は、なんらかの前提のもとでなされ、絶対的に真理が保証されるわけではない。論証手続き上からみて、数学的真理は、条件的（conditional）なのである。また、存在論的にも自然諸科学のような経験的拘束を強く受けるわけではない。古代ギリシャのプラトンが明確に指摘していたように、それから20世紀の数理

論理学者のゲーデルが数学的に証明してみせたように、数学的真理は「不完全」（incomplete）なのである。今日では、ジョセフ・アマディー・ゴグェンによって、「証明」は「証明事象」（proof-events）として、歴史的に相対化されつつある[Vandoulakis-Stefaneas 2013]。今日では、こういった数学真理についての「偶像破壊的」理解を想起する必要があるであろう。

今度は、革命概念について、省みてみる必要があるであろう。一般にラディカルな変革がなされることを革命と呼ぶ。ここで、いくつかの政治革命でさえ、それほど破壊的なわけではないことを思い起こす必要がある。たとえば、1640年代・50年代英国のいわゆるピューリタン革命は、たしかに、国王チャールズ一世を殺害し、内乱を伴った。だが、1688-89年の名誉革命は、暴力がほとんどなかった点で、「名誉」に値した。〔西欧史における「革命」（revolution）なる語彙の発展については、[Rachum 1999]を見よ〕。

この革命における度合いについての識別は、自然諸科学の革命と数学における革命に導入されてしかるべきかもしれない。自然諸科学は自然によって存在論的に大きく拘束されるがゆえに、変革はドラスティックになされる。他方、数学における真理は、変革の度合いは、それほどドラスティックではないと考えられる。

数学的知識は、自然科学的真理と比較して、たしかに「上空飛翔」する。プラトン主義的真理観が唱えられるゆえんである。しかしながら、地上に一度も降り立つことなく、上空を飛翔し続けることはできない。ともかく「地上的」知識の一種として存続するのである。

クーンは、自然諸科学における革命を基本的パラダイムの転換として特徴づけた。アリストテレス的自然学とニュートン的自然学は、パラダイムないし解釈学的基底が相違する。クーンの解釈では、アリストテレス的自然学は、単純に誤謬なのではない。ある意味で、すなわちある種の解釈学的概念枠においては、理解可能なのである。クーンが、自然諸科学と人間諸科学とは、類似点と相異点の双方をもつ、と理解する([46]) のと同じく、われわれは自然諸科学と数学のあいだに、相異点とともに類似点を認めなければならない。主要に、両者ともに歴史所産だからである。クロウが1992年に述べたように、「数学において革命が起こるかどうかの問題は、実質的に、定義による」([47]) とすることにはある種の道理がある。

ここで、第4節と第5節の展開した求積と接線法、さらには、微分積分学をめぐる議論を省みることとする。アルキメデス的無限小幾何学の求積法は、カヴァリエリ、トリチェッリ、パスカルらによって幾何学的に発展の経路をたどった。しかし、英国オックスフォード大学のジョン・ウォリスの『無限の算術』（*Arithmetica infinitorum*）なる1656年刊の著作以降、記号代数化の方向に転轍した。その方向

[46]"The Natural and the Human Sciences" in Kuhn [2000], pp. 216-223, esp. 221；拙訳[2008]第 10 章，とくに、p. 286 以下、を見よ．

[47]Crowe [1992], p. 316.

は、若きニュートンと、さらに全面的にはライプニッツによって、全面的な代数化の道を歩んだ。ルネサンス以後の無限小幾何学の伝統は、「最高の幾何学者」トリチェッリによって極められた。ウォリス以降の無限小幾何学の代数解析化の方向の頂点を極めたのは、ライプニッツであった。彼を、私は「最高の代数学者」と特徴づけた。よく知られているように、ニュートンは、若い時代には、デカルトの記号代数学の流儀を尊重したが、1670年代のある時期からは、エウクレイデース、アルキメデス、パッポスの古典幾何学尊重の方向へと逆転した。

こうしてみると、微分積分学の代数的アルゴリズムの発見と、その基本定理の幾何学的論証を成し遂げた最大の数学者のライプニッツは、フロギストン説による燃焼理論を棄却し、酸素による新燃焼理論を推進させた化学革命の立役者のラヴォワジエと似ている。ただし、化学理論におけるフロギストン説による燃焼理論は端的に遺棄されたのと対照的に、無限小幾何学による求積法と接線法は、たしかに流行遅れになったと見なされるのだが、遺棄されはしなかった。ここに数学理論と自然科学理論の相異点のひとつが明らかに存在する。ただし、ライプニッツ的な徹底的な代数解析的伝統の自律化＝自立化は、フランス革命後の「解析革命」とともに成就されたものと考えられるべきである。換言すれば、数学理論の交替は、自然科学理論の交替ほどラディカルではないかもしれないが、前者にもかなりラディカルな交替は、歴史を顧みると存在するのである。このような歴史事象をわれわれは、「数学における革命」（revolutions in mathematics）と呼ぶこととする。

総合的にまとめるとすれば、われわれが、自然諸科学には革命の概念を認め、数学には求めないとするのは、不自然であり、奇妙である。なぜなら、両者ともに、人間の知的活動の歴史所産であり、たしかな解釈学的基底をもち、理論のラディカルな交替がありうるからのである。

要するに、自然諸科学と数学の両者において、革命的変化は起こる。知識の二つの領域には、相異がある。一方の自然諸科学においては、経験的で現実の自然的世界によって存在論的に拘束され、革命的変化は新旧理論をたがいに遮断する。他方の数学では、条件的で仮設的であり、したがって、存在論的に現実世界からそれほど拘束されない数学において、革命的変化において、以前の理論の損失はそれほど大きくはなく、その性質は、数学的「言語」の翻訳、あるいは数学思想の様式転換によっても、通常、維持される。しかしながら、新旧理論のあいだには、「通約不可能的」（incommensurable）要素は、存在するにちがいない。それから、数学は、その実践的諸要素からなるがゆえに、その社会的基礎とともに、独自に変容する場合がある。また、数学諸理論の内容は、その形式と他のメタ内容的諸要素から分離されるわけではない。両者は、1975年のマイケル・クロウには失礼ながら、たがいに結びついているのである。それゆえ、数学においてさえ、革命は存在する。その最大の理由は、自然諸科学と同じく、数学も「歴史 - 内 - 存在」（In-der-Geschichte-sein）なのだからである。すなわち、歴史的（それから文化的に）に変容するのである。この点について、私は非妥協的である。

言語哲学に「言語相対仮説」（hypothesis of linguistic relativity）という理論が

あって、しばしばアメリカ人言語学者の名前から、「サピア - ウォーフ説」と呼ばれる。言語形式と言表内容が密接不可分であるする説である。フランスの現象学的哲学者のメルロ=ポンティは、人間の精神と身体は人が考えるほど、隔絶されているわけではないことを主張した。同様の理論であろう。クーンは自然科学理論にも、必要な変更を加えれば、同様の理論が成り立つことを示した。彼はしばしば20世紀後半の最大の哲学者のひとりと認められることがある。私は、数学史・数学哲学においても、同様の理論が成立することを示そうとしているのである。

§7. 数学における革命の概念

われわれはもはや、数学において、革命ないしドラスティックな転換が存在したことを否定することはできない。いまや、われわれは数学的知識の発展における四つのパターンを識別する。数学的内容と制度的背景の両方において発展し、さらに漸進的にか、あるいは革命によって発展する。

(1) 数学的知識の漸進的変容があるが、このタイプに変化について説明する必要はないであろう。ほとんどの数学者は、数学が段階ごとの発見によって漸進的に発展してきたと信じている。

(2) 基本的概念、形式、数学メディアにおいて、革命的変化が起こる。この種の変化には「革命的」（revolutionary）という語彙が用いられる。数学はときに、基本的諸概念と形式のドラスティックな変容によって進歩し、強い抵抗を経験することがある。こういった局面において、数学的内容といわゆる外面の数学的形式（たとえば、思考様式、認識論的前提、記号）は、たがいに不可分である。このカテゴリーの変化のいくつかの事例を挙げてみる。古代ギリシャの公理論数学の成立、17世紀西欧のヴィエトとデカルトによる代数解析プログラム、およびニュートンとライプニッツによる新規の無限小解析の形成、そして、19世紀前半のガウス、ボヤイ・ヤーノシュ、ロバチェフスキイによる非ユークリッド幾何学の発見（あるいは発明）である。これらの革命的変化は、数学的なアイディアのドラスティックな交代、並びに数学技法の洗練によっている。

数学的発展の二つの他のカテゴリーは、制度的変化ないし社会的変容にかかわる。

(3)　一般に、数学的な知的活動が行われる制度的ないし社会的環境は、漸進的に発展する。

(4) しかしながら、いくつかの事例で、制度的環境は、革命的に転換する。われわれは、このカテゴリーのエクスターナルな革命的変化の事例に出会う。9-10世紀のバグダードにおけるギリシャ数学のイスラーム文明への系統的導入、12世紀ルネサンスとイタリア・ルネサンスにおける数学的著作の翻訳運動、フランス革命直後のドラスティックな制度的変容などである。この最後の革命的変化に沿って、モンジュとラクロワによる解析革命が、エコル・ポリテクニクで起こ

った。これは、ライプニッツの無限小代数解析プログラムの継続という性格をもっていた。

しまいに、19世紀後半の日本における前近代数学から近代西洋数学への転換に言及すべきであろう。1868年の明治維新以前、徳川日本は、中国起源の和算と呼ばれる数学的伝統の最高形態を発展させていた。だが、1872年の明治新政府による学制において、西洋算術が採用せられ、1877年には東京大学、東京数学会社が成立を見た。それ以後、日本の数学は、算盤＝ソロバンを除き、ほぼ全面的にヨーロッパ的なものとなった[Sasaki 1994 & 2002]。こういった、基本的な社会的・文化的構造の転換に連動したドラスティックな変換は、中国、朝鮮、ヴェトナムといった他の東アジア諸国でもなされた。しかし、日本の場合がもっともラディカルであった。

日本はこれ以前、古代の律令国家の成立とともに、中国算学が制度化され、さらに16世紀末からの中世から近世への過渡期には、宋元明代中国数学が、中国から直接に、あるいは李朝朝鮮から導入され、和算という日本に独創的数学開化の基になった。

この種の変容では、制度的環境がのちの数学的発展の行く末を圧倒的に決定することになる。インド神話にいう「ジャガナート」のようなものであった。クーンのオリジナルな定式化では、通約不可能な要素、そうして革命は、関連する知識のほとんど通時的発展として認容されるのであるが、われわれはいまや、地理的に多様な文化においても、同様の変容を認めるべきである。私は、いまや、この新規の研究プログラムを「文化相関的数学哲学」（intercultural philosophy of mathematics）と呼んで、学問的前進を企図している。

§8. 結論的注記

クーンは、『科学革命の構造』で展開した議論を再確認して、「科学革命とは何か？」において、科学的発展に、通常的（normal）なものと、革命的（revolutionary）なもの二種類の区別を導入した。「革命的変化は、その革命が起こる前に使用されている概念内部では順応しきれない発見を伴います。そのような発見をなすか、それを同化せしめるためには、考え方と一定範囲の自然現象の記述の仕方を変更しなければなりません」[Kuhn 2000, pp. 14-15; 拙訳2008, p. 15]。この種の発見の例として、クーンは、ニュートンの運動の第二法則の発見に言及している。さらに、近代の燃焼理論に沿った酸素の発見のような他の事例をも念頭に置いていたにちがいない。

これまで、われわれは、数学においても革命が存在すると論じ、数学的革命における破壊の程度は、自然諸科学におけるほど大きくないとした。クーンによる、通常的なものと、革命的なもののあいだの科学的発展のタイプの差異化は、数学的内容の発展のわれわれのカテゴリーでの (1) 漸次的発展と、(2) 革命的発展に対応する。

われわれの議論のポイントは、クロウの「転換的」（transformational）と「形成的」（formational）発見の識別が、数学史においては、支持できないということにある。その主たる理由は、数学の内容を、数学的思考の様式から剥がすことができないということにある。このことをわれわれは、微分積分学の基本定理の事例において検討した。われわれが基本定理と呼ぶことのできることがらは、ニュートンとライプニッツによる代数的形態でだけ提起され、トリチェッリ、グレゴリー、バロウの純粋に幾何学的な形態においてではなかったのである。

非ユークリッド幾何学の形成において、ユークリッド幾何学の真理価値は、ある意味でたしかに保持されるのであるが、全面的にではない。古代ギリシャのユークリッドの平行線公準をもつ幾何学は、ヒルベルトの1899年の『幾何学の基礎』の出版後には異なる意味をもつようになった。同様の現象は、アインシュタインが相対性理論を提示したあと、ニュートン力学についても目撃できる。いくぶんかの変化を加えて、クーンの以上の引用文は、数学史にも適用可能である。こうして、われわれは、自然諸科学におけるように、数学においても革命を認めなければならないのである。

先に引用した論考において、クーンは、1947年夏、後年に「通約不可能性」と呼ぶようになる考えを胚胎したときのことを想起している。その事例とは、アリストテレス自然学とニュートン自然学のあいだの通約不可能性、そしてまた、「科学革命」である。

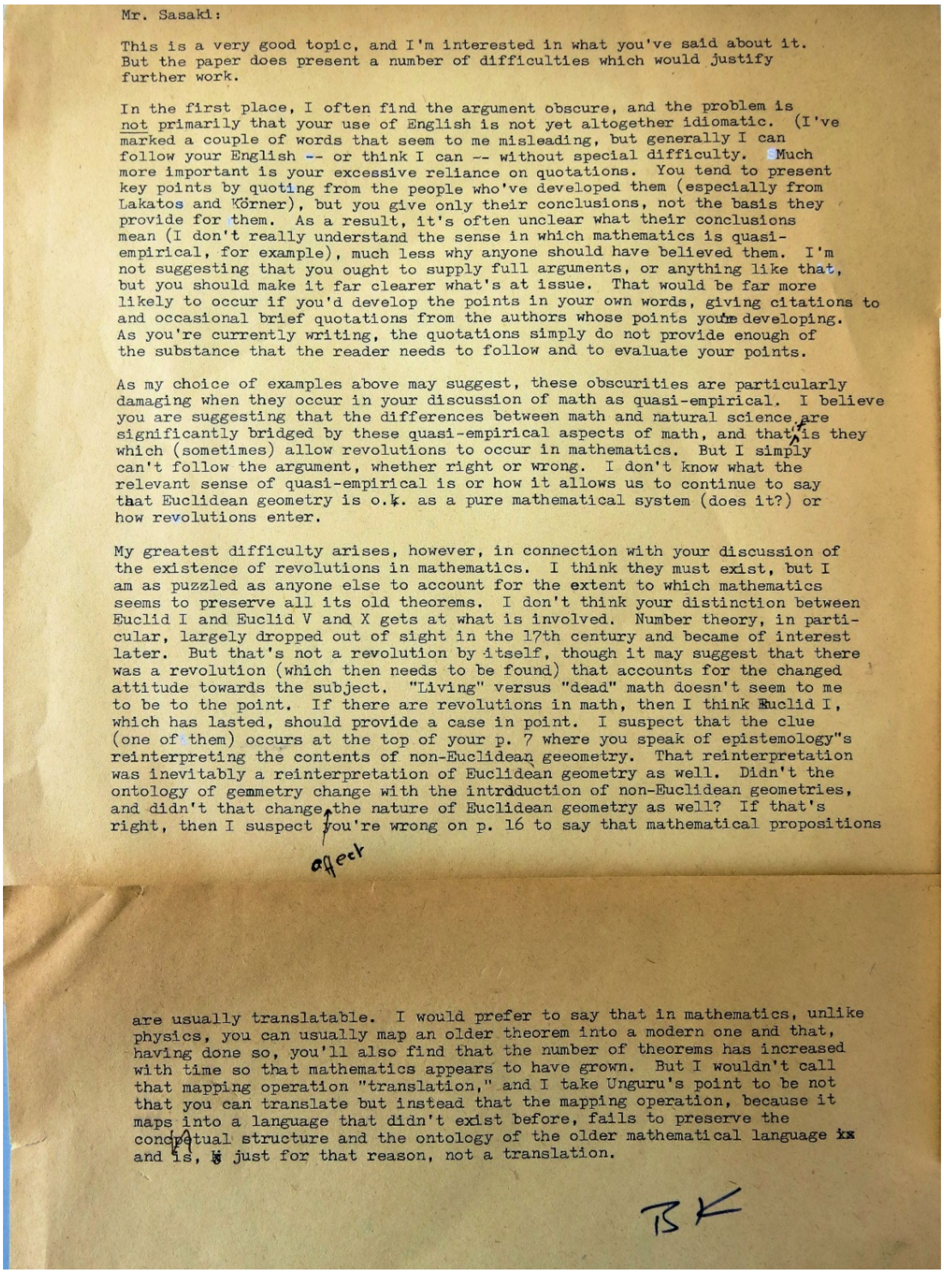
ここで再度、自伝的回想に戻ることとする。私がある種の終末論的感覚を現代数学にもったのは、1968年に、仙台の東北大学数学教室の友人とともに、アルノルト・シェーンベルクとアルバン・ベルクの十二音楽のいくつかの曲を聴いたときであった。その時分、私は、ヒルベルトとブルバキの形式主義的様式の現代的な抽象代数を学ぶ、21歳の学部学生であった。抽象代数学と、ピュタゴラスの時代から音楽的学科の一分野になっていた音楽の両者に、ある種の空虚さを感じたのであった。そのとき以来、音楽の「様式」（style）と数学的思考の「様式ないしモード」（style or mode）は、枢要であるべく感じられ始めたのであった。この経験は、クーンの1962年刊の著作と出会う以前であった。『科学革命の構造』の増訂版の日本語訳が1971年に出版されるや、私は読み、書評まで書いたのであった。たしかに一定のシンパシーをもってはいたのだが、全面的に好意的に読むことはなかった。エクスターナルな側面を顧みずに、科学的営為のインターナル（内的）な側面に集中していたからであった。

1976年から1980年までのプリンストンでの大学院生時代、私は、クーンの「歴史的科学哲学」の学問的プログラムを私の数学史について適用することを考え始めた。1977年5月、私は、クーン教授の学部講義「科学哲学入門」（Introduction to Philosophy of Science）の単位取得のために、私は教授の特別許可を得て、「トーマス・Ｓ・クーンの理論と数学史・数学哲学」（Thomas S. Kuhn's Theory and the History and Philosophy of Mathematics）なるリポートを提出した。きわめて未熟な内容であったことは疑いない。

クーン教授は、私のために、批判的コメントを書いてくれた（図5.aはコメントの

全文）。「これはとてもよいトピックである。私は貴君が書いたことに関心をも

図5a



Mr. Sasaki:

This is a very good topic, and I'm interested in what you've said about it. But the paper does present a number of difficulties which would justify further work.

In the first place, I often find the argument obscure, and the problem is not primarily that your use of English is not yet altogether idiomatic. (I've marked a couple of words that seem to me misleading, but generally I can follow your English -- or think I can -- without special difficulty. Much more important is your excessive reliance on quotations. You tend to present key points by quoting from the people who've developed them (especially from Lakatos and Körner), but you give only their conclusions, not the basis they provide for them. As a result, it's often unclear what their conclusions mean (I don't really understand the sense in which mathematics is quasi-empirical, for example), much less why anyone should have believed them. I'm not suggesting that you ought to supply full arguments, or anything like that, but you should make it far clearer what's at issue. That would be far more likely to occur if you'd develop the points in your own words, giving citations to and occasional brief quotations from the authors whose points you're developing. As you're currently writing, the quotations simply do not provide enough of the substance that the reader needs to follow and to evaluate your points.

As my choice of examples above may suggest, these obscurities are particularly damaging when they occur in your discussion of math as quasi-empirical. I believe you are suggesting that the differences between math and natural science, are significantly bridged by these quasi-empirical aspects of math, and that it is they which (sometimes) allow revolutions to occur in mathematics. But I simply can't follow the argument, whether right or wrong. I don't know what the relevant sense of quasi-empirical is or how it allows us to continue to say that Euclidean geometry is o.k. as a pure mathematical system (does it?) or how revolutions enter.

My greatest difficulty arises, however, in connection with your discussion of the existence of revolutions in mathematics. I think they must exist, but I am as puzzled as anyone else to account for the extent to which mathematics seems to preserve all its old theorems. I don't think your distinction between Euclid I and Euclid V and X gets at what is involved. Number theory, in particular, largely dropped out of sight in the 17th century and became of interest later. But that's not a revolution by itself, though it may suggest that there was a revolution (which then needs to be found) that accounts for the changed attitude towards the subject. "Living" versus "dead" math doesn't seem to me to be to the point. If there are revolutions in math, then I think Euclid I, which has lasted, should provide a case in point. I suspect that the clue (one of them) occurs at the top of your p. 7 where you speak of epistemology"s reinterpreting the contents of non-Euclidean geeometry. That reinterpretation was inevitably a reinterpretation of Euclidean geometry as well. Didn't the ontology of gemmetry change with the intrdduction of non-Euclidean geometries, and didn't that change the nature of Euclidean geometry as well? If that's right, then I suspect you're wrong on p. 16 to say that mathematical propositions

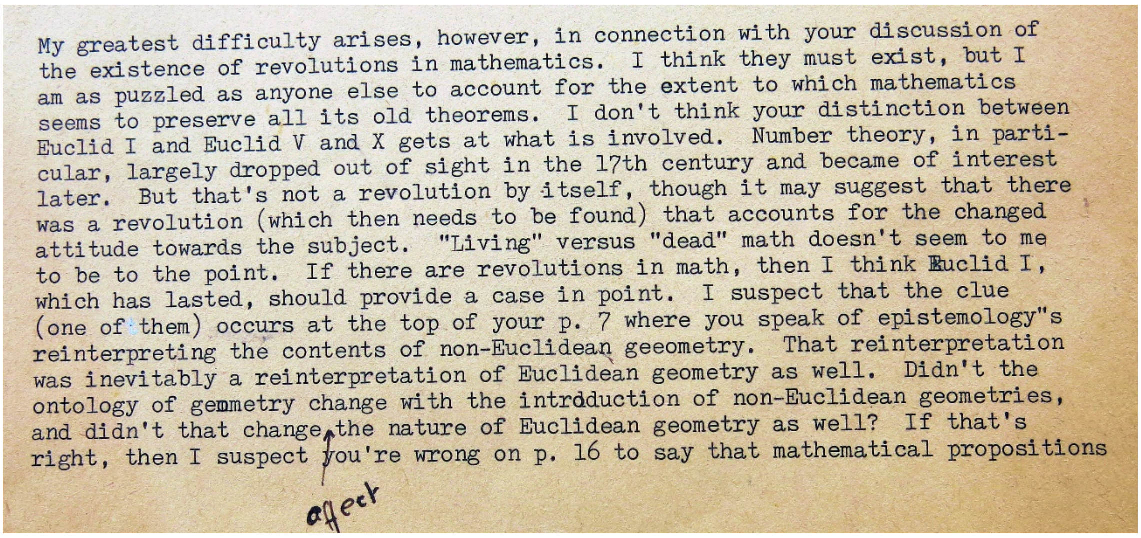
affect

are usually translatable. I would prefer to say that in mathematics, unlike physics, you can usually map an older theorem into a modern one and that, having done so, you'll also find that the number of theorems has increased with time so that mathematics appears to have grown. But I wouldn't call that mapping operation "translation," and I take Unguru's point to be not that you can translate but instead that the mapping operation, because it maps into a language that didn't exist before, fails to preserve the conceptual structure and the ontology of the older mathematical language and is, just for that reason, not a translation.

BK

った。〔……〕私は数学における革命は存在するにちがいないと思う。だが、私は、誰よりも、数学の旧い定理のすべてを保持されるのがどの程度なのかについて説明することに当惑している」（This is a very good topic, and I'm interested in what you've said about it. [...] I think they [revolutions in mathematics] must exist, but I am as puzzled as anyone else to account for the extent to which mathematics seems to preserve all its old theorems.）（図5.bは引用個所を含む，コメント全文aの一部分）。

図5.b



My greatest difficulty arises, however, in connection with your discussion of the existence of revolutions in mathematics. I think they must exist, but I am as puzzled as anyone else to account for the extent to which mathematics seems to preserve all its old theorems. I don't think your distinction between Euclid I and Euclid V and X gets at what is involved. Number theory, in particular, largely dropped out of sight in the 17th century and became of interest later. But that's not a revolution by itself, though it may suggest that there was a revolution (which then needs to be found) that accounts for the changed attitude towards the subject. "Living" versus "dead" math doesn't seem to me to be to the point. If there are revolutions in math, then I think Euclid I, which has lasted, should provide a case in point. I suspect that the clue (one of them) occurs at the top of your p. 7 where you speak of epistemology"s reinterpreting the contents of non-Euclidean geeometry. That reinterpretation was inevitably a reinterpretation of Euclidean geometry as well. Didn't the ontology of gemmetry change with the intrdduction of non-Euclidean geometries, and didn't that change the nature of Euclidean geometry as well? If that's right, then I suspect you're wrong on p. 16 to say that mathematical propositions

affect

クロウの1992年の主張にもかかわらず、私は、私の恩師クーン教授とともに、そして彼をも超えて、数学において、革命の語を使用し続けたいと思っている。以上の拙論はクーン教授の設問にかなりの程度、応え得ているのではないか、と思う。それから、クーン教授は、メーアテンスの淵源する「生きている」数学＝通常数学は、数学における革命についての議論にとって重要ではない、と指摘していたのだが、その指摘を私はかなりの程度、容認する。クーン教授が、インターナルな歴史家ではかならずしもなく、エクスターナルな側面にも大きな関心を寄せる学者であることを知ったのは、私のプリンストン時代であった。数学における革命は、数学史的に見て、社会史的変容がドラスティックになされるときに起こるといった傾向がある。それだけに、クーンのヒストリオグラフィーに適合的である、と私は信ずるものである。

私は、クーン教授が、私の現在の数学における革命概念を支持するかどうかについては、最終的にわからない。クーン教授は、1977年刊の『本質的緊張――科学的伝統と変化における研究文選』（*The Essential Tension: Selected Studies in Scientific Tradition and Change*）に、扉のページに、「K．M．K．に、私の依然として好ましい終末論者に」（For K. M. K., still my favorite eschatologist）なる献辞を書いた。多くの数学史家は、クーンの『科学革命の構造』の考えを拒否してきた。たしかに、「危機」とか「革命」とかの概念の無批判的使用は回避すべきであろう。けれども、われわれはいまや、クーンの「歴史的科学哲学」のヒストリオグラフィーが切り拓いた地平のうえで生きている。私の学問的パースペクティヴにおいて、学問的で厳格な意味で、数学における革命があるということは、争えない。このような理由で、「歴史的数学哲学」のプログラムは、クーンの「歴史的科学哲学」の延長として研究され続けなければならない。

謝辞

トーマス・S・クーン教授は『本質的緊張』（*The Essential Tension*）の献辞 "For K. M. K., still my favorite eschatologist" がある同じページの私がプリンストンで1977年に購入した本に、講演のための来日時の1986年5月2日に東京で、「佐々木力へ、重要な幾日の温かい思い出と感謝をこめて。トム・クーン」（For Chikara Sasaki: Many warm memories of and thanks for several important days.　Tom Kuhn）と、親切にも書いてくれたものだ。教授は私の生涯最大の科学史・科学哲学上の恩師であった。私はこの機会に、いまは亡きクーン教授にたくさんの謝辞を言いたい。

参考文献

[1] ANTOGNAZZA (Maria Rosa)
[2009] *Leibniz: An Intellectual Biography*, Cambridge & New York: Cambridge University Press.

[2] AUSEJO (Elena) & HOMIGÓN (Mariano)
[1996] (Eds.) *Paradigms and Mathematics*, Madrid: Siglo XXI de España Editores.

[3] BARROW (Isaac)
[1860] *The Mathematical Works*, ed. by W. Whewell. Cambridge: Cambridge University Press; Reprinted ed., Hildesheim: G. Olms, 1973.

BERNAYS (Paul)
[1974] Concerning Rationality, in P. A. Schilpp (Ed.), *The Philosophy of Karl Popper: The Library of Living Philosophers*, Vol. XIV, Book 1. La Salle: Open Court, pp. 597-605.

[4] BOYER (Carl. B.)
[1956] *History of Analytic Geometry*. New York: Scripta Mathematica; Reprinted ed. New York: Dover, 2004.

[5] CHILD (James M.)
[1916] *The Geometrical Lectures of Isaac Barrow*. Chicago: Open Court.

[6] CROWE (Michael J.)
[1975] Ten 'Laws' Concerning Patterns of Change in the History of Mathematics, *Historia Mathematica* **2**, pp. 161-166; also in Gillies (Ed.) [1992], pp. 15-20.

[7] Idem.　[1988] Ten Misconceptions about Mathematics and Its History, in William Aspray and Philip Kitcher (Eds.), *History and Philosophy of Modern Mathematics: Minnesota Studies in the Philosophy of Science*, Volume XI. Minneapolis: University of Minnesota Press, pp. 260-277.

[8] Idem.. [1992] Afterward (1992): A Revolution in the Historiography of Mathematics?　in Gillies (Ed.) [1992], pp. 306-316.

[9] DAUBEN (Joseph W.)
[1984] Conceptual Revolutions and the History of Mathematics:　Two Studies in

the Growth of Knowledges, in E. Mendelsohn (Ed.), *Transformation and Tradition in the Sciences, Essays in Honor of I. Bernard Cohen*. Cambridge: Cambridge University Press; also in Gillies (Ed.) [1992], pp. 49-71.

[10] Idem. [1992]. Appendix (1992): Revolutions Revisited, in Gillies (Ed.) [1992], pp. 72-82.

[11] DEHN (M.) & HELLINGER (E. D.)
[1943] Certain Mathematical Achievements of James Gregory, *American Mathematical Monthly* **50**, pp. 149-163.

[12] EDWARDS (Charles Henry, Jr.)
[1979] *The Historical Development of the Calculus*. New York: Springer.

[13] FERMAT (Pierre de)
[1891-1912] *Œuvres de Fermat*, publiées par les soins de MM. Paul Tannery et Chares Henry, t. I-Ⅳ. Paris Gauthier-Villlards.

[14] GILLIES (Donald) .
[1992] (Ed.) *Revolutions in Mathematics*. Oxford: Clarendon Press.

[15] Idem. [1993] *Philosophy of Science in the TwentiethIdem. Century: Four Central Themes*. Oxford: Blackwell.

[16] GRABINER (Judith V.)
[1974] Is Mathematical Truth Time-dependent? *American Mathematical Monthly* **81**, pp. 354-365; Reprinted in Tymoczko (Ed.) (1998), pp. 201-213.

[17] Eadem. [1981] *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*. Cambridge, Mass.: The MIT Press; Reprinted ed., New York: Dover, 2005.

[18] GROSHOLZ (Emily)
[1992] Was Leibniz a Mathematical Revolutionary? in Gillies (Ed.) [1992], pp. 117-133.

[19] HISCOCK (W. G.)
[1937] *David Gregory, Isaac Newton and Their Circle: Extracts from David Gregory's Memoranda, 1677-1708.* Oxford: Oxford University Press.

[20] HOFMANN (Joseph E.)
[1974] *Leibniz in Paris, 1672-1676: His Growth to Mathematical Maturity*. Cambridge: Cambridge University Press.

[21] HOLLINGDALE (Stuart)
[1989] *Makers of Mathematics*. London: Penguin Books.

[22] KALMÁR (László)
[1967] Foundations of Mathematics—Whither Now? in Lakatos (Ed.) [1967], pp. 187-194, with discussion, pp. 195-207.

[23] KÖRNER (Stephan)
[1967] On the Relevance of Post-Gödelian Mathematics to Philosophy, in Lakatos (Ed.) [1967], pp. 118-132, with discussion, pp. 133-137.

[24] KUHN (Thomas S.)

[1962; 2nd ed. 1970; 3rd ed. 1996; 4th ed. 2012] *The Structure of Scientific Revolutions*. Chicago: The University of Chicago Press.

[25] Idem. [1977] *The Essential Tension: Selected Studies in Scientific Tradition and Change*. Chicago: The University of Chicago Press.

[26] Idem. [2000] *The Road since Structure: Philosophical Essays, 1970-1993, with an Autobiographical Interview*, ed. by J. Conant and J. Haugeland. Chicago: The University of Chicago.

[27] Idem. [2008] 佐々木力訳『構造以来の道』（みすず書房）.

[28] LAKATOS (Imre)

[1962] Infinite Regress and Foundations of Mathematics, *Aristotelian Society Supplementary Volumes*, Vol. 36, pp. 155-184; Reprinted in Lakatos [1978a], pp. 3-23.

[29] Idem. [1967] (Ed.) *Problems in the Philosophy of Mathematics*. Amsterdam: North Holland.

[30] Idem. [1976] *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery,* ed. by John Worrall and Elie Zahar. Cambridge: Cambridge University Press.

[31] Idem. [1978a] *Mathematics, Science and Epistemology: Philosophical Papers*, Volume 2, ed. by John Worrall and Gregory Currie. Cambridge: Cambridge University Press.

[32] Idem. [1978b] A Renaissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics? in Lakatos [1978a], pp. 24-42.

[33] Idem. [1980b] 拙訳『数学的発見の論理』（共立出版）.

[34] LEIBNIZ (Gottfried Wilhelm)

[1858] *Mathematische Schriften*, herausgegeben von C. I. Gerhardt, Bd. V. Halle; Reprinted ed., Hildesheim: G. Olms, 1971.

[35] Idem. [1899] *Der Briefwechsel von Gottfried Wilhelm Leibniz mit Mathematikern*, herausgegeben von C. I. Gerhardt. Berlin: Maher & Müller; Reprinted ed., Hildesheim: G. Olms, 1987.

[36] Idem. [1920] *The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz*, ed. and tr. by M. J. Child.. Chicago: Open Court; Reprinted ed., New York: Dover, 2005.

[37] Idem. [1989] *La naissance du calcul différentiel*, Introduction, traduction et notes par Marc Parmentier Paris: J. Vrin.

[38] Idem. [1993] *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis: Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften in Göttingen*, Mathematisch-Physikalische Klasse, Dritte Folge, Nr. 43, Kritisch herausgegegen und kommmentiert von Eberhard Knoboloch. Göttingen: Vandenhoek & Ruprecht.

[39] Idem. [2004] *Quadrature arithmétique du cercle, de l'ellipse et de l'hyperbole*, Introduction, traduction et notes de Marc Parmentier. Paris: J. Vrin.

[40] Idem. [2012] G. W. Leibniz, *Sämtliche Schriften und Briefe*, Siebente Reihe:

Mathematische Schriften, hrsg. von der Liebniz-Forschungsstelle Hannover der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen beim Leibniz-Archiv der Gottfried Wilhelm Leibniz Biblothek Hannover, Sechster Band 1673-1676: Arithmetische Kreizquadratur, Berlin: Akademie Verlag.
[41] Idem. [1997] 『ライプニッツ著作集』2「数学論・数学」（工作舎).
[42] Idem. [1999] 『ライプニッツ著作集』3「数学・自然学」（工作舎).
[43] MAHONEY (Michael S.)
[1973; 2nd ed. 1994] *The Mathematical Career of Pierre de Fermat (1601-1665)*. Princeton: Princeton University Press
[44] Idem. [1980] The Beginnings of Algebraic Thought in the Seventeenth Century, in S. Gaukroger (Ed.), *Descartes: Philosophy, Mathematics and Physics*. Brighton: The Harvester Press & Totowa: Barnes & Noble Books, pp. 141-155.
[45] Idem. [2007] 佐々木力編訳『歴史の中の数学』（ちくま学芸文庫）.
[46] MEHRTENS (Herbert)
[1976] T. S. Kuhn's Theories and Mathematics: A Discussion Paper on the 'New Historiography' of Mathematics, *Historia Mathematica* **3**, 297-320; also in Gillies (Ed.) [1992], pp. 21-41.
[47] MOLLAND (A. G.)
[1976] Shifting the Foundations: Descartes's Transformation of Ancient Geometry, *Historia Mathematica* **3**, pp. 21-49.
[48] MORITZ (R. E.)
[1942] *On Mathematics and Mathematicians*. New York: Dover.
[49]NEEDHAM (Joseph)
[1959] *Science and Civilisation in China*, Vol. 3: *Mathematics and the Sciences of the Heavens and the Earth*. Cambridge: Cambridge University Press.
[50] Idem. [1991] 『中国の科学と文明』第4巻「数学」（思索社）.
[51] NEWTON (Isaac)
[1967] *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Volume I: 1664-1666. ed. by T. Whiteside Cambridge: Cambridge University Press.
[52] PRAG (Adolf)
[1939] On James Gregory's *Geometriae pars universalis*, in Herbert W. Turnbull (Ed.), *James Gregory Tercentenary Memorial Volume*. London: G. Bell published for the Royal Society of Edinburgh, pp. 487-509.
[53] RACHUM (Ilan)
[1999] *"Revolution": The Entrance of a New Word Into Western Political Discourse*. Lanham/New York/Oxford: University of America.
[54] RASHED (Roshdi)
[1993] *Les mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, Vol II: *Ibn Al-Haytham*. London: Al-Furqan Islamic Heritage Foundation.
[55] Idem. [2007 & 2009] *Al-Khwarizmi: Le Commencement de l'algèbre*. Paris: Albert

Blanchard; *Al-Khwarizmi: The Beginnings of Algebra*. London: Saqi.
[56] SASAKI (Chikara) 佐々木力
[1985] The Acceptance of the Theory of Proportion in the Sixteenth and Seventeenth Centuries―Barrow's Reaction to the Analytic Mathematics, *Historia Scientiarum*, No. 29, pp. 93-126.
[57] Idem. [1994] The Adoption of Western Mathematics in Meiji Japan, 1853-19 05, in Sasaki C. et al. (Eds.), *The Intersection of History and Mathematics*. Basel: Birkhäuser, pp. 165-186.
[58] Idem. [2002] The Emergence of the Japanese Mathematical Community in the Modern Western Style, 1855-1945, in K. Parshall & A. C. Rice (Eds.), *Mathematics Unbound: The Evolution of an International Mathematical Research Community, 1800-1945*. Rhode Island: American Mathematical Society & London: London Mathematical Society, pp. 229-252.
[59] Idem. [2003] *Descartes's Mathematical Thought*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
[60] Idem. [2010] *A History of Mathematics*, in Japanese. Tokyo: Iwanami Shoten Publishers.
[61] Idem. [2010] *Introdução à Te oria da Ciência*, tr. Takeomi Tsuno, introd. Shozo Motoyama, Editora da Universidade de São Paulo.
[62] Idem. [2003] 『デカルトの数学思想』（東京大学出版会）.
[63] Idem. [2008] 「ユークリッド公理論的数学と懐疑主義――サボー説の改訂」、『思想』No. 1010（2008年6月号）, pp. 100-149.
[64] Idem. [2010] 『数学史』（岩波書店）.
[65] Idem. [2020予定] 『日本数学史』（岩波書店）.
[68] STRUIK (Dirk J.)
[1969] (Ed.) *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.
[69] SZABÓ (Árpád)
[1969] *Anfänge der griechischen Mathematik*. München & Wien: R. Oldenbourg.
[70] Idem. [1978] 中村幸四郎・中村清・村田全訳『ギリシア数学の始原』（玉川大学出版部）.
[71] TYMOCZKO (Thomas)
[1998] (Ed.) *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, revised and expanded ed. Princeton: Princeton University Press.
[72] Vandoulakis (Ioannis M.)-Stefaneas (Petros)
[2013] Proof-events in History of Mathematics, *Ganita Bharati* **35** (1-4)（2013), pp. 119-157.