RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B81 (2020),123-145

中根元圭『律原発揮』の音律論

System of tuning in Nakane Genkei 's *Ritsugen-hakki*

曽我昇平

Shohei Soga *

Abstract

Nakane Genkei presented a way to arrive at an 12 equal temperament by opening one octave into the 12^{th} root in his *Ritsugen-hakki* [律原発揮].

His achievement was that his calculation-methods were groundbreaking at the world history level. It can be explained because he had clearly more advanced computational power than other music researchers in his era and had the ability to handle higher-order and exponential calculations freely.

In this paper, I consider based on the comparison of Nakane Genkei 's *Ritsugen-hakki* and Cai Yuan-ding's *Lülüxinshu*［律呂新書］. And, I clarify the following four points by investigating historical documents.

ⅰ）Why did Genkei, a famous mathematician , participate in the study of system of tuning? And what was his purpose?

ⅱ）What was the underlying mathematical thought of his pursuit?

ⅲ）What are the characteristics of the mathematics used in his pursuit?

ⅳ）What was his influence on academic research in Japan?

§１　序

中根元圭（1662－1733 年）は，江戸時代中期の和算家・天文家である。その功績について，小林龍彦は「関孝和の高弟建部賢弘との間に主従関係を得て，建部・中根派として関孝和の数学と建部賢弘の円理を後世に伝える役割を果たしたことが知られている。その一方で，18 世紀初頭の江戸幕府対外政策の部

Received November 20, 2019. Revised January 3, 2020.
2010 Mathematics Subject Classifications: 01A27,01A45
Key Words: 12 equal temperament, system of tuning, wasan, Nakane Genkei, Cai Yuan-ding.
* 四日市大学・関孝和数学研究所　Seki Kowa Institute of Mathematics, Yokkaichi University, 1200 Kayo Yokkaichi Mie 512-8512 , Japan.　e-mail: gstfm622@ybb.ne.jp

分変更にも深く関与した人物としても記憶される」[1]と記している。

中根元圭は和算や天文暦学について研究されているが，加えて音律に関する研究も多い。それは，元圭が『律原発揮』「上下相生論」[2]において，十二平均律（12 equal temperament）の画期的な計算法を提示[3]したことにある。

多くの音律研究における中根元圭の評価のポイントである，「画期的な計算法の提示」については，元圭が同時代の世界の他の研究者より，平均律計算に必要な，高次方程式の開方や指数計算等での代数計算に関して，高い能力を有していたことからも説明できる。

また，音律に関する論文では，音律について数学的構造や導き出された数値に注目して論じられているものが多い。しかし，それらの論文では，音律が獲得された時代には存在していなかったセント（$1200log_2x$）という対数単位を用いて考察されているものが多い[4]。しかし，音律は本来数学に依拠する学問であり，その数学は，あくまでその時代の数学に依拠する。例えば，ピュタゴラス音律は比，純正律は比と比の値，中全律は指数，平均律は代数学が大きく関わっている。しかし，それぞれの音律の形成過程に，音程を測定するための対数単位である“セント”は関わっていない。“セント”は，各音律の精度の比較には都合がよいが，音律の歴史が排除されることになる。

本稿では，中根元圭が『律原発揮』を著す基になった中国の蔡元定の『律呂新書』[5]に対して，何について疑問を感じ（「朝思夕慮」），どの様な革新性を提示した（創爲之法）かを考察する。その際，今の数学ではなく，数学史に準拠した当時の数学を用いる。

解明する観点は以下の項目である。

ⅰ）音律に関する研究意図

江戸時代中期の和算家・天文家である中根元圭が，音律研究に参加した理由と，彼の研究意図

ⅱ）追究の根底にある数学思想

元圭の音律追究に寄与した思想

ⅲ）追究に使用した数学

元圭の十二平均律の計算に使用した数学

ⅳ）革新性

元圭の追究の革新性と，他に与えた影響について

---

1 小林龍彦（2012 年）「中根元圭の研究Ⅱ」数理研究所講究録 1787『数学史の研究』，29-43 頁。

2 中根元圭（1692 年刊）『律原発揮』，国会図書館蔵本。

3 元圭は「上下相生論」において，「欲令之齋朝思夕慮創爲之法（これを斉しからしめんことを欲して，朝に思い夕に慮る。創りてこれを法となす）」と記している。

4 明土真也（2011 年）「基本的な統計手法の活用による日本の十二律の推定」，『日本統計学会誌』41，23－50 頁。上垣渉，根津知佳子（2012 年）「音律の数学的構造に関する一考察」，『三重大学教育学部研究紀要 63 巻　教科科学』，141-166 頁。

5 蔡元定（1187 年）『律呂新書』。

§2　音律に関する研究意図

2.1. 『律呂新書』と『律呂精義』

和算や天文暦学の研究者である中根元圭が，音律に関する『律原発揮』を著した意図は，中国の楽律書に発するところが大きい。特に重きを置いた書は，蔡元定の『律呂新書』と，朱載堉の『律呂精義』[6]である。

元圭は，1692 年に『律原発揮』を著し，第 1 節「黄鍾律管之圓」には「張介賓類経附翼曰按律呂精義」と記されており，『楽律全書』に含まれる朱載堉の『律呂精義』の書名が記されている。しかし，この節は，黄鍾律管の数値の記載の後に「璋雖未曽見律呂精義姑算術補空圓及ニ品尺度之数」と記され，璋（元圭）は『律呂精義』を見たことがなく，とりあえず管の内径や寸法の数値は自分の算術に依るとの説明がある。実際，『楽律全書』に含まれている『律呂精義』の校閲が，幕命により荻生徂徠に下命されたのは 1725 年である。それ故，1692 年に元圭が『律呂精義』の詳細な内容まで知見できる可能性は少ない。[7]

1692 年当時の楽律の研究の必読文献は，蔡元定の『律呂新書』であった。この書は 1415 年に中国永楽帝の勅命で編纂された『性理大全』[8]の中に含まれ，朝鮮，日本に伝わった。そして，日本での注釈書として，林鵞峰が『律呂新書諺解』[9]を 1677 年に，中村惕斎が同時期に『筆記律呂新書説』[10]を著している。

『律呂新書』と『律呂精義』には，成立した中国での位置づけに大きな違いがある。『性理大全』に含まれた『律呂新書』は，宋明理学の一端を担う存在であった。学問としての宋明理学は, 銭宝琮が「封建国家の官僚を強化育成し，人民の思想を奴隷化することを目的とした[11]」と記しているように，国家の学問であった。また，明朝期の数学との関係について，「数学は，極端に反動的な主観唯心論が盛行した年代であり, 当時の儒者が一切の専門学問を玩物喪心と軽視したことから，前代の代数学の偉大な成就，例えば増乗開方法や天元術などですら，明朝期には危うく絶学になるところであった[12]」と記している。つまり，『律呂新書』は，国家の学問の一つであり，主観唯心論の側面が大きく，実用面が軽視されているのである。さらに，数学・音楽的には，十二平均律の計算で必要となる増乗開方法や天元術など, 元圭が得意とした高次方程式の開方や指数計算等での代数計算より先に，象数神秘主義[13]が根底にあった。

---

6 朱載堉（1584 年）『律呂精義』,

7 山寺美紀子（2014 年）「荻生徂徠の楽律研究—主に『楽律考』『楽制篇』『琴学大意抄』をめぐって—」,『東洋音楽研究』80，1－19 頁。

8 『性理大全』全七十巻，巻二十二に律呂新書一，巻二十三に律呂新書二。

9 榧木亨（2016 年）「林家における『律呂新書』研究—林鵞峰『律呂新書諺解』を中心として」『関西大学東西学術研究所紀要』49，453-470 頁。

10 山寺三知（2013 年）「校点『筆記律呂新書説』（附訓読）1」『國學院大學北海道短期大学部紀要』30，27－59 頁。

11 銭宝琮（1981 年）『中国数学史』，北京，120 頁。続いて「明朝的科挙制度規定」と記載。

12 同書, 120-121 頁。数学とそろばんを使用した商業算術とは区別されて記述されている。

13 数に象意を与える思想であり，中国の河図洛書，西欧のピュタゴラス等の数秘術。

一方，『楽律全書』に含まれている『律呂精義』は，宋明理学に基づいた楽律論への批判であり，古楽の精神を取り戻すことが意図された。『律呂精義』の著者である朱載堉の思想は，『律呂新書』と同様に象数神秘主義的な河図洛書の理を用いるのであるが，追究順に差がある。『律呂新書』のように数が最初にあるのではなく，「律の理を明らかにする」→「律の数を明らかにする」→「律の音を明らかにする」が用いられている。[14]

『律呂新書』と『律呂精義』の思想的な差は，宋明理学に対する立場である。実際，『律呂新書』は幕府の公式学問としての宋明理学（朱子学）の追究の中で江戸時代初期に重視された。一方，『律呂精義』は江戸時代中期に，宋明理学に異議を唱えた古学（古楽）の追究の中で重視されたのであった。

1692 年の元圭『律原発揮』は，宋明理学の『律呂新書』の追究から，古学の『律呂精義』の追究への端境期に成立しているのであった。

それ故，元圭『律原発揮』について，『律呂新書』との比較から，宋明理学への立ち位置の検証が必要となる。次項では，宋明理学と楽律の関係についてまとめる。その際，国家の学問としての立ち位置が同じである西欧のカトリック神学と対比し，特徴を表出させる。

また，次節では元圭『律原発揮』について，宋明理学に異議を唱えた古学（古楽）の追究の視点から考察する。その際，明朝期の中国において宋明理学に異議を唱えたもう一つの西学についても言及し，元圭の追究姿勢を考察する。

2.2. 宋明理学とカトリック神学

音律論の古典である中国の『律呂新書』と西欧『音楽教程』とには以下の様な共通点がある。

西欧中世のカトリック教会では，「新ピュタゴラス主義」の「数論」に基づき「聖書」を読み解くことが重視された[15]。また典礼では，神の完全性の証明として，天のハーモニーの現れであるとする「ピュタゴラス音律」の協和音を採用し，「神の音律」として絶対視した。それ故，神への祈りの場で歌われるミサ曲が，「神の音律」である「ピュタゴラス音律」を離れることは考えられないことであった。そして，中世を通してボエティウスの『音楽教程』[16]が，学問としての音楽の教科書として使われた[17]。

西欧のピュタゴラス音律の担い手が教会の司祭であり，目的がキリスト世界の調和と安定を求めることにあった。一方，同時代の中国では楽律の担い手は

---

[14] 田中有紀（2014 年）「朱載堉の楽律論における『周礼』考工記・嘉量の制」，『立正大学経済学季報』63-4，119-155 頁。

[15] ヴィンセント・ホッパー，大木富(訳)（2015 年）『中世における数のシンボリズム』，彩流社。

[16] Boethius, *De institutione musica*.（524 年）.（Friedlein, Gottfried. edi. *Anicii Manlii Torquati Severini Boetii De institutione arithmetica libri duo: De institutione musica libri quinque.* 1867.）

[17] キティ・ファーガソン，柴田裕之(訳)（2011 年）『ピュタゴラスの音楽』，白水社。

儒者であり，目的は統治者のため国家の安定を求めることにあった[18]。このように，中世西欧と同時代の音律論には，類似性が大きい。他の観点も加え，12 世紀時点での中国『律呂新書』と西欧『音楽教程』の比較を以下に示す。

観点	**中国『律呂新書』**	**西欧『音楽教程』**
枠組	宋明理学の楽律	聖歌の音律
方法	三分損益法	三倍音の半倍音
担い手	儒者	教養ある司祭
目的	統治者のための楽制の確立	ローマ教会の典礼の確立
追求	調和した音律が政治の安定の象徴	神の完全性，調和と安定
学問	科挙の受験科目	司祭叙品の必要単位
領域	実学ではなく思想・哲学	実学ではなく上位に哲学
思想	数は一のみ，一は万物の従う所の始め	万物は数なり
数と量	度量衡（比と比の値）	比と比の値の区別

中世カトリック教会と中国宋明理学における音律論は，両者において同等性が見て取れる。それは，枠組，方法，担い手，目的，追求，学問，領域，思想，数と量の各要素に存在する。この状況は，16 世紀まで大きな変化が顕在化しなかった。

2.3. 宋明理学と『律原発揮』

上記の観点から元圭の音律論を概観すると，枠組：古学の度量衡，方法：十二平均律追究，担い手：和算家（実務家，数学者），目的：度量法の追究，学問：学際的，領域：実学，思想：観念論ではなく数理的，数と量：代数学的追究である。以上すべての観点で異なっている。

また，元圭の音律論は，朱載堉の音律論と同様に，宋明理学に基づいた楽律論への批判である。しかし，朱載堉の音律論は，宋明理学でも用いられた象数神秘主義的な河図洛書の理については排除していない。つまり，思想については観念論の枠を脱するものではなく，この点，元圭の音律論とは差異がある。

元圭の立ち位置は，次項に示す『律原発揮』の序文からも明らかである。

2.4.『律原発揮』の名古屋玄医による序文

『律原発揮』の序文は，丹水子（名古屋玄医）によるものである。

> 有道而後有理有理而後有数既有数也度量権衡所因生也四者一不正則甚也矣（道有り而して後に理有り，理有り而して後に数有り，既に数有るや度量権衡の因りて生ずる所なり。四つは一つ正からざるとき，則ち甚だし）。

18 田中有紀（2014 年）『中国の音楽論と平均律，儒教における楽の思想』，風響社。

名古屋玄医（1628－1696）は医師であり，当時盛んだった五世派の李朱医学を排し，張仲景の『傷寒論』を参考にして古医方を唱えた人物である。

この玄医による学説は，宋明理学への批判を展開した伊藤仁斎（1627－1705）の古学の台頭とほぼ時期を同じくしている。この序文で注目すべき点は，「道→理→数」の順である。

元圭が参照した『性理大全』版の蔡元定『律呂新書』律呂本源には，楽律の基本となる黄鐘の長さが九寸である理由について，次の記載がある。[19]

> 天地之數始於一終於十其一三五七九爲陽九者陽之成也其二四六八十爲陰十者陰之成也黃鐘者陽聲之始陽氣之動也故其數九（天地の数は一に始まり十におわる。その一三五七九は陽であり，九は陽の成なり。二四六八十は陰であり，十は陰の成なり。黄鐘は陽声の始，陽気の発動なり，故にその数は九である。）

この記載は「数→理→道」である。最初の「数」は，基準音である黄鐘の長さの九尺である。その「数」の 9 は，宋明理学的な理の拠り所になる 9 である。それは，実測の九尺の 9 ではない。そして「理」は宋明理学に基づいた理論を意味している。

道・理・数の関係については，朱世傑『四元玉鑑』の序にも見られる。[20]

> 數一而已一者萬物之所従始故易一太極也（数は一のみ，一は万物の従う所の始め故に易の一は太極である。）

朱の序文は「数→理（万物の従う所）→道（太極：宋明理学の宇宙論の中で重視された概念）」の順であり，この順はピュタゴラスの思想と同等である。それは，「万物は数なり」として，あらゆる事象には数が内在し，宇宙のすべては人間の主観ではなく数の法則に従い，数字と計算によって解明できるとする考えである。

宋明理学に基づいた『律呂新書』，『四元玉鑑』の序文の思想は，『律原発揮』の立ち位置とは異なるものである。序文を記した玄医は，当時の医学が観念論的な思弁に偏ってしまっていることを批判し，古の医学への回帰を目指した古方派に位置づけられる医学者である。ただし，古方派は実証や経験を重んずる宋代以前の古医方の復興への取り組みととらえられており，薬の分量の正確な割合等の実用面の重視ととらえられている。

元圭の追究も，形而上の理を中核に据えた宋明理学に対して，批判的に考察し形而下の実用面の解明を目指したものであった。

---

19 『性理大全』版『律呂新書』(1415 年)，「律呂本原」黄鐘第一，長九寸空圍九分積八百一十分についての記述。

20 朱世傑『四元玉鑑』(1303 年)，元の莫若による前序の冒頭部分。

§3　追究の根底にある数学思想

3.1.　『律原発揮』の思想

古学的な追究において,宋明理学的なバイアスがかかっていないテクストの考察が重視された。1692 年の『律原発揮』発刊時点で，元圭が宋明以前のテクストを手にしていたかは定かではない。ただし，数学に関しては，宋明理学的なバイアスがかかっていないテクストは，中国の西学関係の『天学初函』[21]があり，そして内容的にはバイアスのかかっていない中国の数学書として『算学啓蒙』[22]，『揚輝算法』[23]，『算法統宗』[24]が存在した。

元圭が得意とした高次方程式の開方や指数計算等での代数計算では，『算学啓蒙』『揚輝算法』『算法統宗』の存在が大きい。しかしこれらの書は，数学的な内容については宋明理学のバイアスは認められないが,思想的には宋明理学的な数の神秘性を取り入れている。[25]

中国の西学関係の『天学初函』は，イエズス会の宣教師によって伝えられた西欧数学の漢訳本である。この書の評価は，「使落后的明代数学又轉入一个新的時期（没落した明代数学を新しい時代へと移した）[26]」であり，宋明理学的な数学観からの脱却である。

『天学初函』に含まれる『同文算指』の徐光啓の序文には，宗明理学と明朝末期の数学についての記載がある。[27]

> 算數之学特廃於近世数百年間爾廃之縁有二其一爲名理之儒土苴天下之実事其一爲妖妄之術謬言数有神理能知来蔵住靡所不効（算数の学が特に廃れたのは近々の数百年の間のことである。廃れた原因は二つある。その一つは理学の儒者が天下の実学の事を軽視したことである。他の一つは妖妄の術で，数には神理が有り，それによって過去や未来を知ることができ，明らかにできないことがないと謬言したことである。）

---

21 利瑪竇(授)，李之藻(演)，徐光啓（選)，(1614 年)『同文算指』，北京。『同文算指』は，1628 年に『天学初函』に収められた。『天学初函』は，寛永 9 年（1632 年）に尾張藩が購入したことが名古屋市蓬左文庫の記録に残っている。

22 朱世傑（1299 年)『算学啓蒙』。日本での復刻出版は 1659 年。(復刻年については日本學士院編纂『明治前日本數學史』参照)

23 揚輝（1378 年)『揚輝算法』。日本での 1661 年に関孝和が謄写。

24 程大位（編）(1592 年)『算法統宗』，新安。日本での復刻出版は 1678 年。

25 銭宝琮，前掲，141 頁。「掲河図洛書，見数有本源，有数字神秘主義的思想」と記載。

26 前書，234 頁。

27 利瑪竇(授)，李之藻(演)，徐光啓(選)（1614年)『同文算指』。(『天学初函』海山仙館叢書本，同算指前編序二，七十九頁。(拙著(2013年)「『同文算指』における西洋算術「複式仮定法」の取り扱い―Clavius著*Epitome Arithmeticae Practicae*の比較研究」，『数学史研究』216号，1-32頁参照)。

ここでは，中国での数学の置かれている立場が示されている。この序で記された「名理之儒」は「宋明理学」（日本では朱子学）の事であり唯心論の学派である。中国では，儒学は国家の要の学問であり，倫理観等の宗教的な要素でもあった。徐は「名理之儒」で数学が重視されることはなく，実学としての中国古来の数学も軽視され，それによって「天下之実事」を軽視したと主張したのである。もう一つの「妖妄之術」は占いの術である。それは，ある種の論理性を持った占いであるが, 数学の持つ演繹的な論理性とは全く別物の論理である。

3.2. 『律原発揮』の数学思想

『同文算指』の底本となったのは西欧の数学書であるクラヴィウス著『実用算術概論』[28]である。李之藻と徐光啓は，利瑪竇を通して，この書の中にある実用性を超えた実学としての価値（有用性）を見いだし，宗教的な論理ではない数学的な論理性（確実性）があると考えていた。

さらに，徐は利瑪竇が，「その道を論じ，理を論じる時，いつも根本に戻り実学に基づき，一切の虚玄や玄妄の説を絶対取り除いていた」（其言道言理既皆返本蹠實絶去一切虚玄妄之説）と述べている。さらに「数に象る学はすべて遡及的に源流を継承し，根が付いて葉は着し，上は九天を究め遍く万物を明らかにする。」（而象數之學亦皆遡源承流根附葉著上窮九天旁之説）と記し，数に象る学（数学的諸学）は理論的な系統性があり相互に関連することで，多くの事象が解明されると述べている。

これらに記されている学問追究の考え方は, 近代科学としては当たり前のことであるが，中世末期の西欧を含め，当時，一般には理解することができなかったか，理解しようとしなかった。それは，中国の「妖妄之術」や西欧の「数魔術」が，数を意味付けし，意味付けした数に基づいて現象を解き明かすような，非科学的・非学問的なものに陥ったからである。しかも，東洋の「名理之儒」，西欧のキリスト教神学こそ，当時は科学的・学問的なものと考えられていたからでもある。

しかし，これらの存在の対極が「実用」にあるのではない。このことは先の徐の序文からも見て取れる。「その道を論じ，理を論じる時，いつも根本に戻り実学に基づき，一切の虚玄や玄妄の説を絶対取り除いていた」，つまり，「道→理→（実学に基づき）数」の数理的追究である。

中根元圭の思想を考える上で，名古屋玄医の序文の最初の部分を，実用面のみに矮小化することは正しくなく, 思想や学問のあり方の革新であるととらえる根拠である。

また，中根元圭と荻生徂徠とは旧知の中であり，徂徠による『律楽全書』の校訂に基づき出版された『度量衡考』の校閲者でもあった。徂徠は朱載堉の数

[28] Christopher Clavius（1583）, *Epitome Arithmeticae Practicae*（『実用算術概論』）, Roma.

学批判の一例として，十二平均律で算出される 2 の n 乗根が 25 桁値まで記され, しかもそれが真の値ではないことを指摘し, 実用的でないと批判している。それは，徂徠が数理的真理より実践的実用性を重んじていると言える[29]。ただし，徂徠が批判したのは「宋明理学」的な数理真理であって，科学的な数理的真理ではない。実際，元圭が求めたのは，実学としての価値（有用性）と，数学的論理による（確実性）を合わせ持ったものであった。

§4　追究に使用した数学

4.1.中根元圭の序

『律原発揮』本文は中根元圭の次の文から始まる。

> 律度量衡四者皆本於黍而生於黄鐘之管所謂律者始於黄鐘終於応鐘其上下相生皆以三分増損之法（律度量衡の四つは皆黍に本づいて，黄鐘管より生じる。謂う所の律は黄鐘に始まり，応鐘に終わる。その上下相生するに，皆三分増損の法をもってする。）

律度量衡の 4 つとも，基本単位である黍（1 黍の直径が 1 分，2400 黍の容積が 1 合, 100 黍の重量が 1 銖）に基づいて構成され, 黄鐘の管の長さに基づき, 音律は黄鐘（C，ド）から始めて応鐘（B，シ）で終わる。その求め方は上下相生であり，「三分増損法」であることが記されている。

次に，度は黄鐘の長さ（1 黍の直径が 1 分），量は黄鐘の体積（2400 黍の容積が 1 合），衡は黄鐘の体積（100 黍の重量が 1 銖）であることが記されている。そして，引用文を示し先の説明を補足している。最後に「三者皆起於黄鐘故曰黄鐘爲萬事之本（度量衡の三つは皆黄鐘が起点となるから，故に黄鐘を万物の基となす）」と結んでいる。宋明理学を基盤にした蔡元定『律呂新書』では，数の 9 が意味付けされ，陽声の第一として黄鐘を定義されているのに対して，元圭は，度量衡の実用の規準として黄鐘を位置づけている。ここからも，中根元圭には「宋明理学」の発想の存在が確認できない。

4.2.『律呂新書』と『律原発揮』

4.2.1.三分損益法

『律原発揮』の本論は，黄鐘を基準とする律，度解，量解，衡解の 4 つで構成されている。最初の律に関する章は，黄鐘律管之圖，十二菅長，別法十二管長，二因法，四因法，三歸法，逆生法，本邦十二管名，上下相生法，變調，母子調，本邦俗調七音，楽箏，五音異同，黄鍾實積算法，依銭生尺，本

[29] 小林龍彦(2019 年)「朱載堉の円周率と荻生徂徠」,『日本伝統音楽研究センター研究報告』12,，143-162 頁。

邦舊尺之圖，本邦曲尺之圖の節で構成されている。[30]

『律原発揮』の第 5 節までは，黄鍾は朱子学的な基準の 9 尺ではなく，実用的な商尺，周尺，曲尺による値を示している。第 6 節「三歸法」で，中国由来の「三分損益法（元圭は三分増損法）」が扱われている。

「三分損益法」は，基本の管の長さの三分の一を損し（減じ），次の管の長さを計算する方法である。次の，求められた管の長さの三分の一を益し（加えて），3 つ目の音を計算する方法である。損と益を繰り返して次の音を計算していく方法である。

蔡元定『律呂新書』の「三歸法」[31]には操作法とともに次の注釈がある。「因法歸法所以與尋常之法異者以九爲率也（因法歸法の所以は尋常の法と異なり，九を以て率となればなり）」である。これは，十進法による計算ではなく，九で除する計算である。この計算の利点は，十進法では「三歸法」の基になる除数 3 が割り切れないことの解消にある。これは，数の計算では合理性があるが，量を意識した方法ではない。さらに，「宋明理学」に根拠をおく「黄鐘の律は陽声の第一で，陽気の発動であるから九をその数値とする」考えが概念上の問題である。

4.2.2.三分損益法の差異

『律原発揮』には，『律呂新書』に記載された音名と値が引用して使われているが，両者の記述の間には差異もある。

・『律呂新書』「黄鍾十七萬七千百四十七　全九寸　半無
　　　　　　　　林鍾十一萬八千九十八　全六寸　半三寸不用」[32]

・『律原発揮』「黄鍾一尺（即九寸也　八十一分也七百二十九釐也　六千五百六十一毫也五萬九千零四十九絲也　五十三萬一千四百四十一忽也）　下生林」[33]

『律呂新書』は，「宋明理学」的な陽気の発動としての「九」の意識であり，一方，『律原発揮』は九で除する利便性からの記述である。

また，『律呂新書』の計算術は，「寅辰午申戌六陽辰皆下生」「丑卯巳未酉亥六陰辰皆上生」と「宋明理学」を裏付けにして，操作と陰陽二元とを関連づけている。それに対し，『律原発揮』では，陰陽二元との関連づけでなく，操作と術を具体的に明記している。

4.2.3 『律呂新書』の黄鍾

『律呂新書』黄鍾は「長九寸空圍九分積八百十一分」で始まる。この数値が

---

30 『律原発揮』の節に番号は付われていない。本稿では順に 1 節「黄鐘律管之圖」，2 節「十二菅長」，3 節「別法十二管長」，4 節「二因法」，5 節「四因法」，6 節「三歸法」，7 節「逆生法」，8 節「本邦十二管名」，9 節「上下相生法」，10 節「變調」を使用する。

31 『性理大全書』巻之二十二，律呂新書一・律呂本原，黄鍾之實についての註。

32 同書，十二律之實第四。各律は生成順に記載。

33 『律原発揮』三歸法の節。各律は音程順に記載。

音律体系の根本となると定め，この数値に基づいて他の 11 律を損益していく。
　宋明理学の陰陽二元論から，9 は陽気の完成した状態であり，黄鍾は陰陽五行説に基き万物の中心を意味する黄より最初に位置づけられたものであり，長さ 90 分×断面積 9 分＝容積 810 分と計算された。そして，断面積 9 分×4÷3＝12 平方分，開平して 3 分 4 釐 6 毫強と余り 2 毫 8 絲 4 忽であると註されている。そして，（3 分 4 釐 6 毫）^{2}＋2 毫 8 絲 4 忽=12 平方分，12 平方分×90 分＝1080 立方分，1080 立方分×3÷4＝810 立方分と註されているが，計算誤差が生じている。
　次に黄鍾の實として，12 支順に 3^{n-1} の数値が示され，一巡した黄鍾の實として 3^{12-} ＝177147 が記されている。これは三分損の各音の分母の値である。基準となる黄鍾の定められた値が 9 寸であるが，度量衡の単位は 10 進法であるため，計算の上では黄鍾の 9 寸を 1 分として計算を進めている。

『律呂新書』黄鍾生十一律第三に記されている値　cf.ピュタゴラス音律

子		1 分，9 寸	（C，ド）	1：1
丑	子を下生	3 分の 2	（G，ソ）	3：2
寅	丑を上生	9 分の 8	（D，レ）	9：8
卯	寅を下生	27 分の 16	（A，ラ）	27：16
辰	卯を上生	81 分の 64	（E，ミ）	81：64
巳	辰を下生	243 分の 128	（B，シ）	243：128
午	巳を上生	729 分の 512	（$F^{\sharp}$，ファ$^{\sharp}$）	729：512
未	午を下生	2187 分の 2048	（$C^{\sharp}$，ド$^{\sharp}$)	2187：2048
申	未を上生	6561 分の 4096	（$G^{\sharp}$，ソ$^{\sharp}$)	6561：4096
酉	申を下生	19683 分の 16384	（$D^{\sharp}$，レ$^{\sharp}$)	19683：16384
戌	酉を上生	59049 分の 32769	（$A^{\sharp}$，ラ$^{\sharp}$)	59049：32769
亥	戌を下生	177147 分の 65538	（F，ファ)	177147：131072

　上記の計算は分母が 3^{n-1} 分で，分子は下生が□×2，上生が□×4 によって求められた比である。しかし，上記の下線の部分に計算式と求めた比に誤りがある。それは，宋明理学の原則より，12 支を子寅巳未酉亥の六陽辰の律と，丑辰午申戌の六陰辰の律に分け，六陽辰を下生し，六陰辰を上生すると記されているからである。実際，六陰辰の午を下生すると未は 2187 分の 1024 であるが，記載されているの未の値は午を上生した 2187 分の 2048 である。
　12 律の値は求める操作は，分母が 3^{n-1} で，分子が□×2 か□×4 であり，分子に□×2 適用によって求めた値が 0.5 より大きく 1 未満であることが必要である。この範囲にない場合は□×4 を適用する。
　『律呂新書』には，数の操作より，宋明理学の陰陽二元の理が優先されている。それ故，陰陽二元の理を適用した結果生じた逸脱には，理には触れず，数値の修正にのみ終わっている。このことは，定義や式を修正することなしに，答だけを修正することであり，数学的には決して許されないことである。

4.2.3 『筆記律呂新書説』の黄鍾

『律呂新書』の解説本である，中村惕斎(1629－1702)の『筆記律呂新書説』[34]には，比から値を得る術式が明記されている。「子一分者數起子得一也其總實十七萬七千百四十七以寸法萬九千六百八十三約之得九寸爲黄鍾之管故曰一爲九寸然此處法實未分（子が一分とは，子に起こりて一を得るなり。その総実は 177147，寸法 19683 を約すれば 9 寸を得て黄鍾の管となす。故に曰く，一寸を九尺となす。然れどもその所は，いまだ分からず）」である。実際，177147＝3^{11} は亥（仲呂）（F，ﾌｧ)の實（分子の値），19683＝3^9 は酉（夾鐘）（D$^\#$，レ$^\#$)の實（分子の値）であり，それぞれ『律呂新書』にも記載された値であるが，177147÷19683＝9，（$3^{11}÷3^9$＝9）の持つ意味については疑問が示されている。計算は 10 進法で行い，9 進法の度量衡表示をする意味への疑問でもある。宋・元時代の標準的な度量衡も，江戸時代の日本のそれも，1 丈=10 尺，1 尺=10 寸，1 寸=10 分であり，「一寸を九尺となす」は実測の単位ではなく，概念上の単位であった。

『筆記律呂新書説』には，数値ともに術も明記されている。「丑三分二者三乘法也二實數也下倣此（丑 3 分の 2 は，乗法 3 なり，實數 2 なり，以下これに倣う）」と記されている。つまり，子の總實十七萬七千百四十七の 3 分の 2 が丑の値になることである。これは,「三分損益法」の適用のことであり，177147×2÷3＝118098 で求められることの説明である。しかし，この術では，全律の 6 寸は算出できない。『筆記律呂新書説』には，總實十七萬七千百四十七を使わず,「本法因子一分三倍之爲三故子一爲九寸者亦以三倍法約之一爲三寸本實二共六寸爲林鍾之管是三分損一而下生也（本法, 子の一分に因りて三倍すれば, 故に子の一を九寸となすは, また三倍の法を以てこれを約し, 一を三尺となす。本實二にして，共に六寸，林鍾の管たり，これ三分損一して下生するなり）」と記している。これは，「三分損益法」の下生の術（實の三分×2），上生の術（實の三分×4）の適用である。つまり，177147×2÷3＝118098，177147 : 9＝118098 : □，3 : 2＝9 : □，□＝6 ではなく，明らかに 9×2÷3＝6 の適用である。

辰（姑洗）の全律 7 寸 1 分の算出には，10 進法の計算から，9 進法の度量衡への変換が必要となる。『筆記律呂新書説』には，「卯三爲一寸者亦以三倍法約之九爲一寸以爲法約本實六十四得七寸而餘一又以三倍法約卯一爲三分者一爲一分共七寸一分爲姑洗之管（卯の三を一寸となすは，また三倍の法をもってこれを約し，九を一寸となす。もって法となし本實六十四を約すれば七寸を得て余り一，また三倍の法をもって，卯の一を三分となすを約して，一を一分となす。ともに七寸一分にして姑洗の管なり）と記されている。これは南呂の全律 5 寸 3 分を基にして，姑洗の全律 7 寸 1 分を算出する方法である。しかし，この全律は 9 進法の度量衡であるため，先に算出した南呂の 10 進法の値である 5 餘 1 寸を使って計算し，その結果を 9 進法の度量衡に換算するのである。

---

34 中村惕斎(1697 年)『筆記律呂新書説』，黄鍾生第十一律第三。中村惕斎の註。

数式は　5 餘 1 寸×4÷3＝64÷9 寸＝7 餘 1 寸＝7 寸 1 分となる。7 餘 1 寸＝7+1/9 寸であり，7 寸 1 分となる。

應鐘以降の計算については，「他律皆可例推今不盡釋矣（他律みな例推すべし，今注釈を尽くせず）」と記され，術が明記されていない。例推すれば，7 餘 1 寸×2÷3＝128÷27 寸＝4 餘 20 寸＝4+20/27 寸＝4+6/9+6/81 寸＝4 寸 6 分 6 釐となる。算出順の最後の亥（仲呂）の全律 6 寸 5 分 8 釐 3 毫 4 絲 6 忽餘 2 は, 6+5/9+8/81+3/729+4/6561+6/59049 余り 2 であり, 例推できる水準ではない。

4.3.　『律呂新書』十二律之實第四に記されている値

十二律之實第四において 12 支と各鍾を対応させ，値が記されている。

- 子　黄鐘　177147　全 9 寸　半無
- 丑　林鐘　118098　全 6 寸　半 3 寸不用
- 寅　太簇　157464　全 8 寸　半 4 寸
- 卯　南呂　104976　全 5 寸 3 分　半 2 寸 6 分不用
- 辰　姑洗　139968　全 7 寸 1 分　半 3 寸 5 分
- 巳　應鐘　93312　全 4 寸 6 分 6 釐　半 2 寸 3 分 3 釐不用
- 午　蕤賓　124416　全 6 寸 2 分 8 釐　半 3 寸 1 分 4 釐
- 未　大呂　165888　全 8 寸 3 分 7 釐 6 毫　半 4 寸 1 分 8 釐 3 毫
- 申　夷則　110592　全 5 寸 5 分 5 釐 1 毫　半 2 寸 7 分 2 釐 5 毫
- 酉　夾鐘　147456　全 7 寸 4 分 3 釐 7 毫 3 絲　半 3 寸 6 分 6 釐 3 毫 6 絲
- 戌　無射　98304　全 4 寸 8 分 8 釐 4 毫 8 絲　半 4 寸 8 分 8 釐 4 毫 8 絲
- 亥　仲呂　131072　全 6 寸 5 分 8 釐 3 毫 4 絲 6 忽餘 2
半 3 寸 2 分 8 釐 6 毫 2 絲 3 忽

『律呂新書』では，「辰　姑洗　139968　全 7 寸 1 分　半 3 寸 5 分」のように記されている。ここでは, 前の相生である卯の値を 10 進数の比を使い 104976÷3×4＝139968 と算出している。そして，姑洗は前の相生である南呂の値を 9 進法の量を使い，5 寸 3 分×4÷3＝（5×9+3）分×4÷3＝48 分×4÷3＝64 分＝（7×9+1）分＝7 寸 1 分となる。仮に常用されている度量衡に沿って 10 進法で計算すると，5 寸 3 分×4÷3＝53 分×4÷3＝70 余り 2＝7 寸零分餘 2 となり，明らかに 10 進法は使われていない。

そして，「至仲呂之實」131072÷3＝43690 餘 2，割り切れず余りの 2 がでる。よって，「其數不行此律之所以止於十二也」（この数がこれ以上進まない，このようにして律の総数は 12 である）と，1 オクターブが 12 音で構成されていることの理由として記述されている。

西欧のピュタゴラス音律は，仲呂に相当する（F，ﾌｧ)　177147 : 131072 より 3 倍音の半倍音の半倍音を使い黄鍾に相当する（C，ド）531441 : 524288 を得る。この値は最初の（C，ド）1 : 1 とはならないので，その誤差をピュタゴラス・コンマとして問題視した。そして，この値は最初の（C，ド）1 :

1 に近似することより，1 オクターブが 12 音で構成される根拠とした。
中国も西欧も操作順によって音を構成し，構成手順の限度として 1 オクターブが 12 音であるとしている。これは，1 : 1，3 : 2 という比をつかった処理であり，数に関する追究であり，量ではない。

4.4. 『律原発揮』における操作と術

『律原発揮』は，「律者始於黄鍾終於應鐘（音律は黄鐘（C，ド）から始めて應鐘（B，シ）で終わる）」と記載され，操作順ではなく，音程順（$\mathrm{C}\to\mathrm{C}^{\sharp}\to\mathrm{D}\to\mathrm{D}^{\sharp}\to\mathrm{E}\to\mathrm{F}\to\mathrm{F}^{\sharp}\to\mathrm{G}\to\mathrm{G}^{\sharp}\to\mathrm{A}\to\mathrm{A}^{\sharp}\to\mathrm{B}$）であることが記されている。
第 2 節の「十二管長」では，「以本邦舊尺算之」として，日本の旧尺の長さが記されている。

・黄鐘　8 寸 3 分也 3 釐 3 毫有奇
・大呂　7 寸 8 分零 3 毫有奇
・太簇　7 寸 4 分零 3 毫有奇
・夾鐘　6 寸 9 分 3 釐 6 毫有奇
・姑洗　6 寸 5 分 8 釐 4 毫有奇
・仲呂　6 寸 1 分 6 釐 5 毫有奇
・蕤賓　5 寸 8 分 5 釐 2 毫有奇
・林鐘　5 寸 5 分 5 釐 5 毫有奇
・夷則　5 寸 2 分零 2 毫有奇
・南呂　4 寸 9 分 3 釐 8 毫有奇
・無射　4 寸 6 分 2 釐 4 毫有奇
・應鐘　4 寸 3 分 8 釐 9 毫有奇

（この節では，全ての数値の後に，有奇が付されている。この有奇は端の数が存在することを表している。他の節では使用されていない。）

実用に供する楽器の場合，基準となる寸法を定め，調整を施して使用する。上記の値にも，数値の末に「有奇」と付されており，絶対ではなく相対であることが読み取れる。逆に調和のとれた楽器を基にして，基準となる寸法を改めていく。この手法は音楽の調整法（musical temperament）であり，実用音楽では通常採られる手法である。他方，音楽の調整法ではない音律も存在する。それは，神の音律であるピュタゴラス音律や，人の創りし音律である十二平均律であり，同調のシステム（system of tuning）としての音律である。
元圭の音律追究は，実用に供するために，音楽の調整法である旧尺に戻ることなしに，同調のシステムの更新に向かっている。次の節では，宋明理学に基づいた「三分損益」を，宋明理学の「理」に基づき，深く追究するのである。

4.5.『律原発揮』別表十二長管

第 3 節の「別法十二管長」では，「此法倣黄帝尺寸分以至絲忽皆以九爲率」として，計算法は中国の尺に倣い寸分釐毫絲の 5 桁とも 9 進法を用いて求めることが記されている。常用されている度量衡では，中国も日本も 10 進法で

あるのに，あえて宋明理学で重視された 9 を採用して追究している。

次の第 4 節「二因法」，第 5 節「四因法」の説明の後，第 6 節「三歸法」に各律の数値と算出方法が記されている。第 4 節の最後に「三歸法」による操作と術が記されている。

それは，「下生者隔七二因三歸（下生は七を隔て，因して二，帰して三。□×2÷3）」と，「上生者隔五四因三歸（上生は五を隔て，因して四，帰して三。□×4÷3）」であり，音程順の幅と計算式が示されている。

第 6 節「三歸法」には，「與尋之法異者以九爲率也」と記され，9 進法を用いて求めることが再度記されている。また，9 進度量衡への換算率が「黄鍾一尺（即九寸也　八十一分也　七百二十九釐也　六千五百六十一毫也　五萬九千零四十九絲也　五十三萬一千四百四十一忽也）」と明示されている。この換算率をもって他の 11 律が計算されている。

- 黄鐘　黄鍾一尺即九寸也　9 寸
- 大呂　蕤賓再上生大　6 寸 2 分 8 釐×4÷3＝8 寸 3 分 7 釐 6 毫
- 太簇　林鐘上生太　6 寸×4÷3＝8 寸
- 夾鐘　夷則上生夾　5 寸 5 分 5 釐 1 毫×4÷3＝7 寸 4 分 3 釐 7 毫 3 絲
- 姑洗　南呂上生姑　5 寸 3 分×4÷3＝7 寸 1 分
- 仲呂　無射上生仲　4 寸 8 分 8 釐 4 毫 8 絲×4÷3＝6 寸 5 分 8 釐 3 毫 4 絲 6 忽
- 蕤賓　應鐘上生蕤　4 寸 6 分 6 釐×4÷3＝6 寸 2 分 8 釐
- 林鐘　黄鍾下生林　9 寸×2÷3＝6 寸
- 夷則　大呂下生夷　8 寸 3 分 7 釐 6 毫×2÷3＝5 寸 5 分 5 釐 1 毫
- 南呂　太簇下生南　8 寸×2÷3＝5 寸 3 分
- 無射　夾鐘下生無　7 寸 4 分 3 釐 7 毫 3 絲×2÷3＝4 寸 8 分 8 釐 4 毫 8 絲
- 應鐘　姑洗下生應　7 寸 1 分×2÷3＝4 寸 6 分 6 釐

前述の 4.3 と比較すると，『律呂新書』には 12 支の 10 進法と，各律の 9 進度量衡を区別して使い，さらに常用でない 9 進度量衡について適用する旨の記述がない。一方，『律原発揮』では，常用でない 9 進度量衡について，常用の 10 進からの換算率を明記し，12 支は扱わず，各律の値のみ記述されている。

元圭は，宋明理学上の同調のシステムとしての音律である「三分損益法」を追究した上で，次の節で問題点を指摘している。

4.6.逆生法

三分損益法を扱う「三歸法」の節に続くのが，第 7 節「逆生法」であり，「下生者隔五三因四歸（下生は五を隔て，因して三，帰して四，□×3÷4）」と，「上生者隔七三因二歸（上生は七を隔て，因して三，帰して二，□×3÷2）」が記されている。

加えて，別法として「上生者一百乘之七十五除之下生者五十乘之七十五除之

數之可約（上生は之を乗して百，除して七十五，下生は之を乗して五十，除して七十五）」が記されている。また，設題「逆生法」の割註に「此法有一律以後不以之分説之直曰幾寸分釐毫（この法，一律有りて以って後，この分をもってこれを説かず，直に幾寸分釐毫という）」と記載されている。「三歸法」では黄鍾の 9 寸が基準となるが，「逆生法」では，最初の仲呂の規準が明記されていないので，別法として，□×100÷75）を使用することが記されている。

4.7.『律原発揮』逆生法に記されている術　（cf.計算結果と音程）

仲呂	其法若始仲呂	（100：75＝4：3）	（F ，ﾌｧ）
無射	仲呂下生無射	（4×4：3×3＝16：9）	（$A^{\sharp}$，ラ$^{\sharp}$）
夾鐘	無射上生夾鐘	（16×2：9×3＝32：27）	（$D^{\sharp}$，レ$^{\sharp}$）
夷則	夾鐘下生夷則	（32×4 : 27×3＝128 : 81)	（$G^{\sharp}$，ソ$^{\sharp}$）
大呂	夷則上生大呂	（128×2 : 81×3＝256 : 243）	（$C^{\sharp}$，ド$^{\sharp}$）
蕤賓	大呂下生蕤賓	（256×4 : 243×3＝1024 : 729）	（$F^{\sharp}$，ﾌｧ$^{\sharp}$）
應鐘	蕤賓再下生應鐘	（1024×4：729×3＝4096：2187）	（B ，シ）
姑洗	應鐘上生姑洗	（4096×2：2187×3＝8192：6561）	（E ，ミ）
南呂	姑洗下生南呂	（8192×4 : 6561×3＝32768:19683）	（A ，ラ）
太簇	南呂上生太簇	（32768×2：:19683×3＝65536:59049）	（D ，レ）
林鐘	太簇下生林鍾	（65536×4 : 59049×3＝262144 : :177147）	（G ，ソ）
黄鐘	林鍾上生黄鍾	（262144×2 : :177147×3＝524288:531441）	（C ，ド）

実際，どのような整数比であっても，「三分損益」の操作では 2^n：3^mが約されることがない以上，黄鍾の比が基準の 1 : 1 に戻ることはない。実用上は，ピュタゴラス音律のように，順生で C→G→D→A→E→B→$F^{\sharp}$の 7 音，逆生で F→$A^{\sharp}$→$D^{\sharp}$→$G^{\sharp}$→$C^{\sharp}$の 5 音を採用するか，使用する音程を制限するか，変調等で調整するかで解消される。問題なのは，宋明理学上の同調のシステムとしての音律である「三分損益法」での追究で，黄帝の律である黄鍾が基準の 1 でないことは，統治者のための楽制の確立の目的に反するものとなる。

元圭は，『律呂新書』での，10 進の比の計算と，実用ではない宋明理学的な 9 進度量衡を使った量の計算の併用に疑問を持ち，以後の節からは常用される 10 進度量衡を使った量の計算のみを行った。

4.8.『律原発揮』上下相生論

4.8.1.全律と半律

第 9 節「上下相生論」は以下の記述から始まっている。

> 瑋按諸律可上生者強令下生者生来律長得本律半可下生者強令上生者其生来律長得本律倍古町謂全律半律者此之謂也（瑋は諸律を按べ，上生すべきを強いて下生すれば，その生来する律の長本律の半ばを得，下生すべきを強て上生すれば，その生来する律の長本律の倍を得る。古より

全律半律はこれを言うなり）

元圭（璋）は先ず，上生（□×4÷3）すべきところを下生（□×2÷3）すれば半声が得られると記している。これは，『律呂新書』の太簇 6÷3×4 で全律 8 寸，半律 4 寸（□×2÷3）との記載の説明であり，所謂 1 オクターブ高い音程の説明である。続く，逆に下生すべきところを上生すれば倍声の音が得られるとの記載は，林鐘が黄鍾下生林より 9×2÷3 で 6 寸となるとき，上生（□×4÷3）で 12 寸となり 1 オクターブ低い音程が生ずることの説明である。『律呂新書』における十二律の数値は，全律と半律の 2 つの数値が示されており，その意味である 1 オクターブの説明を，ここに示しているのである。[35]

続いて「上下相生論」は，「試截空圍平均者二管其短管如長菅半（試み截ちて空囲平均は，二管其短管は長管の半ばのごとし）」と全律と半律について記し，「假令長管四寸短管二寸之類吹之考其音雖有高下皆歸一律（例えば，長管四寸短管二寸の類，これを吹きその音を考えるに高下ありといえども皆一律に帰す）」と説明している。これは，全律と半律（2 : 1）のとき，高下（1 オクターブ上）の同じ音であることの確認である。

4.8.2.三分損益法への言及

次に，元圭は「然依三分増損之法則仲呂三分益一亦當再上生黄鍾古所謂變律者也（然るに三分増益の法に依れば，則ち仲呂を三分して一を益し，また当に再び黄鍾を上生す）」と記し，仲呂から黄鍾に至る値を求めている。

元圭は，この計算では『律呂新書』の 9 進法を採用していない。「依横黍而言之」（横黍尺［黄鍾が 9 寸でなく，10 寸を基準とすること］に依りてこれを言う）として，計算している。詳細は記述されていないが，計算の最後に求めた黄鍾の値「黄鍾長九寸八分六釐九毫」が記されている。この値は，10 寸×524288÷531441＝9.865403685（＝10 寸×2^{19}÷3^{12}）から算出できる。表示の度量衡は常用と同じ 10 進法表記である。元圭は，前節の「逆生法」でも，仲呂に 100：75 の比を与えて，10 進法で計算を進めたことと同様である。

元圭は，求めた「黄鍾長九寸八分六釐九毫」について，「本原黄鍾微不同在其長不同在於倍半之外則其音何得同乎（本原の黄鍾と微かに同じからず，その長同じからざることにおいて，倍半の外にあるは則ちその音なんぞ同じことを得んや）」と記している。高下（1 オクターブ上）の同じ音であるなら黄鍾長は 10 寸になるはずであり，計算の「黄鍾長九寸八分六釐九毫」はわずかに異なることを指摘している。つまり，仲呂から「三分損益法」で得られる黄鍾の値は，基準の 10 寸には戻らないことの指摘であった。これは，「三分損益法」の「往不返（往きて返らず）」として知られたものであった。

[35] 遠藤徹（2014 年）［中根元圭著『律原発揮』の音律論に関する覚え書き」，『東京学芸大学紀要. 芸術・スポーツ系』66，pp. 83–98。ここでは，上生を完全四度下，下生を完全五度上，倍声を 1 オクターブ下と読み替えて解釈している。

さらに，元圭は次の指摘をしている。「且視管衰法大呂夾鐘仲呂夷則無射五管者各前管二千百八十七分之二千零四十八也太簇姑洗蕤賓林鐘南呂應鐘六管者各前管二百五十六分之二百四十三也如此衰法不齋則音聲次序豈得平均乎（且つ各管の衰法を視るに，大呂，夾鐘，仲呂，夷則，無射の五管は，各前管の 2187 分の 2048 なり。太簇，姑洗，蕤賓，林鐘，南呂，應鐘の六管は各前管の 256 分の 243 なり。この如く，衰法斉からざるは，則ち音声の次序，豈に平均なることを得んや）」と記し，「三分損益法」では，十二平均律の値が正確に求められないことについて言及している。

4.8.3.　十二平均律

『律呂新書』黃鍾生十一律第三では，12 支の値が操作順に記されている。そして，各管の名前の記載はなく，生成順のため音程順での前後の差は提示できない。一方『律原発揮』では，音程順に各管を配置した場合に明らかになる音程順の前後の差が問題にされている。

1	（黄鐘）（C，ド）	前管との差
2187 分の 2048	（大呂）（C♯，ド♯)	2187 分の 2048
9 分の 8	（太簇）（D，レ）	256 分の 243
19683 分の 16384	（夾鐘）（D♯，レ♯)	2187 分の 2048
81 分の 64	（姑洗）（E，ミ）	256 分の 243
177147 分の 131072	（仲呂）（F，ﾌｧ)	2187 分の 2048
729 分の 512	（蕤賓）（F♯，ﾌｧ♯）	256 分の 243
3 分の 2	（林鐘）（G，ソ）	256 分の 243
6561 分の 4096	（夷則）（G♯，ソ♯)	2187 分の 2048
27 分の 16	（南呂）（A，ラ）	256 分の 243
59049 分の 32769	（無射）（A♯，ラ♯)	2187 分の 2048
243 分の 128	（應鐘）（B，シ）	256 分の 243

上の表のように，「三分損益法」を用いた十二律の計算では，各律の間に 2 種類の数値が表れること，つまり，完全な平均律，12 音の隣り合う音の比を一定にした音律（12 equal temperament）でないことを指摘している。

ボエティウスの『音楽教程』第 2 巻の第 28 章では，半音が全音の半分であるという意味でないことを指摘している。29 章では一番小さい半音として，完全四度から全音 2 つ分を差し引いた残りで，その比は 256 : 243 であり，リンマ（limma）と名付けられていることが記されている。第 30 章では，全音とリンマの差はアポトメ（apotome）と名付けられ，2197 : 2048 であることが記されている。31 章では，全音 6 つ分より小さいが，その差は 531441 : 524288 という微小であり，コンマと名付けられると記されていることと同等である。両者とも，計算で得られる半音の比が同一でないことを指摘している

元圭が宋明理学の「理」ではない，「数理」に基づいて論を展開し，「三分

損益法」の適用では，「数理」的に正しい十二平均律の値を求めることができないことを示している。

§5　革新性

5.1.十二平均律

『律原発揮』9 節上下相生論の解説部分は，前述の 4.8.2.に記載したように「三分損益法」の「往不返」についての問題点の指摘である。その指摘に続き，元圭は「欲令之齋朝思夕慮創爲之法（これを斉しからしめんことを欲して，朝に思い夕に慮る。創りてこれを法となす。）」と記している。その法に依って「六十律」にも，「幾律」にも適用できると記している。

「欲令之齋」は，元圭が従来の「三分損益法」では達成できない十二平均律の計算を考えたことである。そして「朝思夕慮」まで深く追究したことは，単に計算法に苦労したことではなく，同調のシステム（system of tuning）としての音律の「有用性」と「確実性」をどう担保するかにあった。特に「確実性」については，根底に据える「理」をどうするかが問題となる。

この点については，前述したように元圭の立ち位置は明らかである。それは，観念論的な思弁に偏ってしまっている宋明理学への批判である。実際，『律原発揮』は，宋明理学を批判する古医方派である名古屋玄医が序を記し，第 5 節まで，宋明理学の実用性軽視に言及し，日本の旧尺の長さ，実用的な商尺，周尺，曲尺による換算を提示している。さらに，宋明理学の中核の 1 つである数概念を採り入れ，宋明理学の「理」に沿った正確な追究を「三分損益法」に適用し，宋明理学の「理」の適否を明らかにしている。

つまり，元圭が「朝思夕慮」まで深く追究したことは，「平均律の画期的な計算法の提示」に留まらず，宋明理学の「理」に頼らない「確実性」の担保であった。

宋明理学の「理」では，「数は一のみ，一は万物の従う所の始め」であり，宋明理学の陰陽二元論からは，「九は陽気の完成した状態であり，黄鍾は陰陽五行説に基づき万物の中心を意味する黄より最初に位置づけられたもの」であった。宋明理学の「理」に依らない場合，「追究対象が数ではなく，数量であること」と「黄鍾長 9 寸のように，数自体に意味付けを行わず，数値として計算処理を行うこと」が必要となる。そこには，宋明理学の「理」代わって「確実性」が担保できる「理」として，数理が必要となる。

元圭の「創爲之法」は，「其法置一全律也折半之得五分半律也爲實一十一乘方開之得一律衰法九分四釐三毫八絲七忽四三一三六八餘是生次律之法也（その法，全律の一を置きて，これを折半して半律の 5 分を得，実となす。12 乗を開方し，0.94387431368 余を得る。これ次の律が生ずる法なり）」であった。

続いて，「以乘黄鍾長即得大呂長以乘大呂長即得太簇長餘倣此（以て，黄鍾長を乗じて即ちに大呂長を得，大呂長を乗じて即ちに太簇長を得，残りはこれに倣す）」と記し，0.94387431368 を順に乗じれば，12 律の値を求めることが

できることを示している。数学的には，公比$\sqrt[12]{0.5}$ の等比級数である。

元圭の計算は，律管の長さの比を求めることではなく，等比級数である律管の長さを量として求めようとしたのである。それ故，0.5 と 1 の間（「置一全律也折半之得五分半律也」）に 12 律を等比で配すため公比の $\sqrt[12]{0.5}$ を求める（爲實一十一乘方開之得一律）と記されている。

この元圭の方法と，朱載堉の 12 律の計算を比較すれば，朱の方法は律管の長さの比を 1 : $\sqrt[12]{2}$ として順次相生するものであり，この場合，求める各律の比の値は 1 から 2 の間に位置づけられる。この点両者には差異がある。

5.2.『律原発揮』上下相生論に記されている術と値　Cf.計算式

（黄鐘）全律	1	$(\sqrt[12]{0.5})^0=1$
一律（大呂）一十一乘方開	0.94387431368	$(\sqrt[12]{0.5})^1=0.94381743127$
二律（太簇）五乘方開		$(\sqrt[12]{0.5})^2=0.89089871$
三律（夾鐘）三乘方開		$(\sqrt[12]{0.5})^3=0.8408964153$
四律（姑洗）立方方開		$(\sqrt[12]{0.5})^4=0.793700526$
五律（仲呂）四自乘一十一乘方開		$(\sqrt[12]{0.5})^5=0.7491535384$
六律（蕤賓）平方開		$(\sqrt[12]{0.5})^6=0.7071067812$
七律（林鐘）六自乘一十一乘方開		$(\sqrt[12]{0.5})^7=0.6674199271$
八律（夷則）自乘立方方開		$(\sqrt[12]{0.5})^8=0.6299605249$
九律（南呂）一十一乘方開		$(\sqrt[12]{0.5})^9=0.5946035575$
十律（無射）一十一乘方開		$(\sqrt[12]{0.5})^{10}=0.5612310242$
十一律（應鐘）一十一乘方開		$(\sqrt[12]{0.5})^{11}=0.5297315472$
半律		$(\sqrt[12]{0.5})^{12}=0.5$

5.3.十二平均律の計算

実際，元圭がどのようにして 5 分の 12 乗根を計算したかについては明記されていないが，元圭は和算書として『七乗冪演式』[36]を刊行している。

元圭の『七乗冪演式』には，$x+y+z=a\,,x^8-y^8=b,\ x^8-z^8=c$ を満たすx,y,z を求める問題が載せられている。[37]

解法は，y を未知数として，$y+z=t$ とおき $t-y=z$ を 8 乗すれば y^8,z^8 は与えられているので，次のy に関する 7 次式を得る。

① $$(t^8+y^8-z^8)-8t^7y+28t^6y^2-56t^5y^3+70t^4y^4-56t^3y^5+28t^2y^6-81ty^7=0$$

② $x^8-y^8=b$ より$,x^8-b-y^8=0$

①②式の係数を置き換え，③④式を得る

36 中根元圭（1691 年）『七乗冪演式』。版が重ねられた元圭の代表著作の一つ。

37 藤井康生（2001 年）「連立方程式の解法について―江戸時代の数学書の問題より」『和算』91，近畿数学史学会，1-16 頁。江戸時代の数学書として元圭の『七乗冪演式』が採り上げられている。

③　$B - Cy + Dy^2 - Ey^3 + Fy^4 - Gy^5 + Hy^6 - Iy^7 = 0$
④　$\mathrm{A} - y^8 = 0$
上記の 2 式よりyを消去する。

この後，④式 $\mathrm{A} - y^8 = 0$ を $\mathrm{u} - y^2 = 0$, $\mathrm{v} - y^2 = 0$, $\mathrm{A} - v^2 = 0$ と分けて考え，それによって，結果的に連立方程式をつくり，文字の消去を行う。このような操作を繰り返し，すべての文字について解いていった。

その過程で，現代数学でいえば，終結式を行列式で表したものを駆使した。ただし，当時は漢字と漢数字を使った縦書きの文章で表していた点からも，解法の困難さは高いものであった。

元圭が，『七乗冪演式』の方法を拡張して$\sqrt[12]{0.5}$=0.94381743127 が求められたかについては定かでない。確かなのは，元圭の時代の和算家は，高次方程式の解法で世界水準の実力を持っていたこと, 元圭もその代表的な一員であったことである。

実際，$\sqrt[12]{0.5}$ の値を求めるなら，当時知られていた「楊輝の三角形」に基づく 2 項定理を用い，算盤上に實 N，初商a，次商bを置き計算できる。

$$\mathrm{N} - a^{12} = b(12a^{11} + b(66a^{10} + b(220a^9 + b(495a^8 + b(792a^7 + b(924a^6 + b(792a^5 + b(495a^4 + b(220a^3 + b(66a^2 + b(12a + b(1))$$

實 N=0.5,初商a=0.9，次商b=0.04 を導き出したのち，餘を次の實として，繰り返し計算を進めることになり，0.94387431368 までの計算は可能である。この方法も困難さを伴うが，理論的な難解さではない。

5.4.『律原発揮』に記されている工夫

元圭は，従来の操作的な「三分損益法」ではなく，数学的な等比級数に基づいて「創りてこれを法」としている。それは，$\sqrt[12]{0.5}$の近似値を求め，その値を順に乗じ[38]，12 律の値を音程順に求めることである[39]。つまり，音階が初項 1，公比$\sqrt[12]{0.5}$ の等比級数として順に表すことである。

元圭は上下相生論の割註に十二平均律の音程順の値が等比級数であることを示した後，本文に「又前實五乗方開之得二律衰法」と記している。これは二律（太簇）の計算は，5 分の 12 乗根の数値を掛け合わせるのではなく，「五乗方開」と術を示し，$(\sqrt[12]{0.5})^2$ ではなく$(\sqrt[6]{0.5})$の計算をすることを示している。

続く割註に「以乗黄鍾長即得太簇長之類」との説明がある。ただし，この割註の「黄鍾長」が 1 ならば，「太簇長」を「即得」することはできない。元圭は等比級数についての理解と指数計算にも長じていたので，「黄鍾長」の 1 を

38 『律原発揮』上下相生論には「是生次律之法」と記されている。
39 『律原発揮』上下相生論の割註に「以乗黄鍾長即得大呂長以乗大呂長即得太蔟長餘倣此」がある。

等比級数の第 1 項の値である$(\sqrt[12]{0.5})^0=1$ と捉えていたと考えられる[40]。
それ故，元圭は二律（太簇）を「以乗黄鍾長即得大呂長以乗大呂長即得太簇長」の$(\sqrt[12]{0.5})^2$ ではなく，累乗根の性質を適用して「五乗方開$(\sqrt[6]{0.5})$」と求めた。続いて，三律（夾鐘）の長を三乗方開$(\sqrt[4]{0.5})$で，四律（姑洗）の長を立方方開$(\sqrt[3]{0.5})$として計算している。次の五律（仲呂）の長は累乗根の性質が使えないので，本来の法を使い四自乗一十一乗方開$(\sqrt[12]{0.5})^5$ と計算している。以後，累乗根の性質が適用可能な律の計算にはもれなく使用されている。
元圭の工夫は，発生する計算誤差の解消のためではなく，数理的追究についての工夫であった。

§6　結

本稿では，中根元圭『律原発揮』「上下相生論」における十二平均律追究が，どのように画期的な計算法であったかを，数学的構造や導き出された数値に注目して論ずるのではなく，当時の数学，則ち数学史に準拠して考察した。
追究によって，以下のことが明らかになった。

ⅰ）江戸時代中期の和算家・天文家である中根元圭が，音律研究に参加した理由と，彼の研究意図については，『律原発揮』序文と，宋明理学を根底に置いた『律呂新書』序文の比較を通して考察した。そして，元圭が，宋明理学に対して批判的に考察し，数理と実用面の両面からの解明を目指したものであったことを言及した。

ⅱ）元圭の音律追究に寄与した思想としては，『律原発揮』と『律呂新書』の「三分損益法」に関する節での，構成，配置，使用文字，数値等を分析した。そして，元圭の音律追究が，実用に供するために，楽器の調整法を主とする古学に戻ることなしに，同調のシステムの更新に向かっていることについて言及した。元圭は宋明理学に基づいた「三分損益」を，宋明理学の「理」に基づき，深く追究し，限界を明らかにした。

ⅲ）元圭の十二平均律の計算に使用した数学については，『律原発揮』と『律呂新書』で使われた数学について考察した。元圭は，『律呂新書』での，10 進の比の計算と，実用ではない宋明理学的な 9 進度量衡を使った量の計算の併用に疑問を持ち，常用される 10 進度量衡を使った量のみ採用した。その結果，『律原発揮』では，音程順に各管を配置した場合に明らかになる音程順の前後の差について問題提起できた。元圭は，宋明理学に基づいた「三分損益」ではなく，数学に基づいた等比級数へと追究の方向を変更した。

ⅳ）元圭の追究の革新性と，他に与えた影響については，『律原発揮』の十二平均律の計算ついて考察した。元圭の時代の和算史からの考察によって，

40 『天学初函』の『同文算指』の倍加法第十に同等の捉え方（等比級数　$a \cdot r^{n-1}$ において，$r^0=1$ 相当文）が記載されている。

元圭が「朝思夕慮」まで深く追究したことは，「平均律の画期的な計算法の提示」に留まらず，宋明理学の「理」に頼らない「確実性」の担保を目指したことについて言及した。

今後は，「宋明理学」の呪縛から脱却して和算の数学哲学を創り出していった関孝和・建部賢弘・中根元圭の思想に迫り，その中で，元圭がとらえた音律論に迫っていく。

参考文献

[1] 小林龍彦（2012 年）「中根元圭の研究Ⅱ」数理研究所講究録 1787『数学史の研究』，29－43 頁。

[2] 小林龍彦（2019 年）「朱載堉の円周率と荻生徂徠」，『日本伝統音楽研究センター研究報告』12， 143－162 頁。

[3] 森本光生（2011 年）「建部賢弘の数学哲学」，『数理解析研究所講究録』1730，63－76 頁。

[4] 藤井康生（2001 年）「連立方程式の解法について―江戸時代の数学書の問題より」『和算』91，近畿数学史学会，1－16 頁。

[5] 児玉憲明（2009 年）「蔡元定律呂本源詳解」，『人文科学研究』125，2009 年，141－176 頁。

[6] 山寺三知（2015 年）「校点『筆記律呂新書説』（附訓読）」3，『國學院大学北海道短期大学部紀要』，1－31 頁。

[7] 山寺美紀子（2014 年）「荻生徂徠の楽律研究―主に『楽律考』『楽制篇』『琴学大意抄』をめぐって―」，『東洋音楽研究』80，.1－19 頁.。

[8] 榧山亨（2016 年）「林家における『律呂新書』研究―林鵞峰『律呂諺解』を中心として―」『関西大学東西学術研究所紀要』49，453－470 頁。

[9] 田中有紀（2014 年）「朱載堉の楽律論における『周礼』考工記・嘉量の制」，『立正大学経済学季報』63・4，119－155 頁。

[10] 遠藤徹（2014 年）「中根元圭著『律原発揮』の音律論に関する覚え書き」，『東京学芸大学紀要　芸術スポーツ系』66，83－98 頁。

[11] 坂崎紀（2001 年）「平均律の歴史的位置」，『音楽文化研究』，1－14 頁。

[12] 丘光明（2006 年）「中国古代度量衡における黄鍾律音と黍黍」，『計量史研究』28・1，37－42 頁。

[13] 金澤正剛（1998 年）『中世音楽の精神史―グレゴリオ聖歌からルネサンス音楽へ』，講談社。

[14] 銭宝琮編（1981 年）『中国数学史』，北京.（ 銭宝琮編，川原秀樹訳（1990 年）『中国数学史』，みすず書房。

[15] 朱世傑著『四元玉鑑』(1303 年)。（郭春今訳，陳在新英訳，郭金海整理（2006 年）『四元玉鑑』Ⅰ，Ⅱ，遼寧教育出版社）