多重ゼータ値の合流関係式 (Algebraic Number Theory and Related Topics 2017)

AUTHOR(S):

佐藤, 信夫

CITATION:

佐藤, 信夫. 多重ゼータ値の合流関係式 (Algebraic Number Theory and Related Topics 2017). 数理解析研究所講究録別冊 2020, B83: 183-194

ISSUE DATE:

2020-10

URL:

http://hdl.handle.net/2433/260698

RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B83 (2020), 183–194

多重ゼータ値の合流関係式
(Confluence relations for the multiple zeta values)

By

Nobuo SATO*

Abstract

This article is a research announcement of my upcoming joint paper with Minoru Hirose on a certain class of $\mathbb{Q}$-linear relations among the multiple zeta values (MZVs), which we call *confluence relations*. As is well known, MZVs are iterated integrals of meromorphic one-forms $\frac{dt}{t}$ and $\frac{dt}{t-1}$ on a projective line. Here we consider more general iterated integrals of three different one-forms $\frac{dt}{t}$, $\frac{dt}{t-1}$ and $\frac{dt}{t-z}$ and define the confluence relations as limits as $z \to 1$ of $\mathbb{Q}$-linear relations among these iterated integrals. At first, we define *standard relations* among the iterated integrals which naturally arise by regarding them as functions of z and thus using their differential structure with respect to z, and then we consider their limits as $z \to 1$. The confluence relations seem to give a very rich family of $\mathbb{Q}$-linear relations among MZVs and we even propose a conjecture that they exhaust all the $\mathbb{Q}$-linear relations among MZVs. As a good reason for our conjecture, we prove that the confluence relations imply the extended double shuffle relations (also the duality realtion). A small table up to weight 4 of the confluence relations is given at the end.

§1. 研究の背景と主結果

多重ゼータ値とは、よく知られるように次の多重和で定義される実数である:

$$\zeta(k_1,\ldots,k_d) := \sum_{0<m_1<\cdots<m_d} \frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_d^{k_d}} \qquad (k_1,\ldots,k_{d-1}\geq 1,\ k_d\geq 2)\,. \tag{1.1}$$

オイラーはこの級数について特別な場合に考察し、これらの実数の間に例えば

$$\sum_{0<m<n} \frac{1}{mn^2} = \sum_{0<m} \frac{1}{m^3}$$

Received April 2, 2018. Revised January 3, 2019.
2010 Mathematics Subject Classification(s): Primary 11M32; Secondary 33E20.
Key Words: *multiple zeta values, iterated integrals, double shuffle relation, regularized double shuffle relation, extended double shuffle relation, duality relation, multiple logarithms, hyperlogarithms.*
*Department of Mathematics, College of Science, National Taiwan University, No. 1, Sec. 4, Roosevelt Rd., Taipei 10617, Taiwan (R.O.C.).
e-mail: `nbsato@ntu.edu.tw`

などの関係式があることを発見した。現在では多重ゼータ値は有理数体上の混合テイトモチーフの周期という数論幾何学的な意味があることが示され [8]、広くその重要性が認識されるようになってきた。

多重ゼータ値には無限級数による (1.1) の定義の他に、射影直線上の反復積分を使った定義がある (これらの定義の同値性は難しくない)。反復積分とは $\mathbb{P}^1$ 内のパス $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{P}^1$ と $\mathbb{P}^1$ 上の ($\mathbb{Q}$ 係数) 有理型微分形式 $\omega_1(t), \ldots, \omega_n(t)$ に対して,

$$\int_{0<t_1<\cdots<t_n<1} \omega_1(\gamma(t_1)) \cdots \omega_n(\gamma(t_n))$$

で表される $\mathbb{P}^1$ の直積内の特定の領域上の積分を指す。ここでは特に極の位置と端点 $\gamma(0), \gamma(1)$ を合わせた集合 (S とおく) を固定し、ペア $(\mathbb{P}^1, S)$ 上の反復積分と呼ぶことにする。例えば $S = \{0, 1, \infty\}$ の場合、S 上にのみ極を許した一次の代数的ドラームコホモロジー群は $\frac{dt}{t}$, $\frac{dt}{t-1}$ の 2 元によって生成されるため、$(\mathbb{P}^1, \{0, 1, \infty\})$ 上の任意の反復積分は

$$\int_{0<t_1<\cdots<t_n<1} \frac{d\gamma(t_1)}{\gamma(t_1) - a_1} \cdots \frac{d\gamma(t_n)}{\gamma(t_n) - a_n} \qquad (a_1, \ldots, a_n \in \{0, 1\}, n \geq 0)$$

の線形和となっている。いま特に γ を 0 から 1 への直線のパスとし、

$$I(a_1, \ldots, a_n) := \int_{0<t_1<\cdots<t_n<1} \frac{dt_1}{t_1 - a_1} \cdots \frac{dt_n}{t_n - a_n}$$

とおく。このとき多重ゼータ値は

$$\zeta(k_1, \ldots, k_d) = (-1)^d I(\overbrace{1, 0, \ldots, 0}^{k_1}, \ldots, \overbrace{1, 0, \ldots, 0}^{k_d})$$

という反復積分に表すことができる。多重ゼータ値において、和 $k_1 + \cdots + k_d$ は重さ、d は深さと呼ばれる。いま全ての多重ゼータ値の張る $\mathbb{Q}$-線形空間を $\mathcal{Z}$, 重さ k の多重ゼータ値の張る部分空間を

$$\mathcal{Z}_k = \mathbb{Q}\langle\, \zeta(k_1, \ldots, k_d) \,|\, k_1, \ldots, k_{d-1} \geq 1, k_d \geq 2 \,\rangle$$

で表すものとする。異なる重さの多重ゼータ値の間には本質的に関係式が無いこと、すなわち

$$\mathcal{Z} \stackrel{?}{=} \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{Z}_k$$

が予想されている。明らかに $\dim \mathcal{Z}_k \leq 2^{k-2} (k \geq 2)$ であるが、多重ゼータ値の間には多くの $\mathbb{Q}$-線形関係式があるため実際の次元は自明な上限より遥かに小さい。数値計算から得られている重さ 16 までの予想次元の表は以下のようになる。

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\dim \mathcal{Z}_k$	1	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	28	37

ザギエは一般に、

$$\sum_{k\geq 0} d_k t^k = \frac{1}{1-t^2-t^3}$$

で数列 d_k を定めるとき、

$$\dim \mathcal{Z}_k = d_k$$

であることを予想した。この予想について寺杣 [8]、ドリーニュ、ゴンチャロフ [1] により

$$\dim \mathcal{Z}_k \leq d_k$$

が示された。

さて級数表示、積分表示のいずれからも $\mathcal{Z}_k\mathcal{Z}_l \subset \mathcal{Z}_{k+l}$ が容易にわかる。ただしそれぞれの表示から自然に得られる積構造は異なり、それぞれスタッフル積、シャッフル積と呼ばれる。例えば、

$$\zeta(2)^2 = \sum_{0<m,n} \frac{1}{m^2n^2} = \left(\sum_{0<m<n} + \sum_{0<n<m} + \sum_{0<m=n}\right) \frac{1}{m^2n^2} = 2\zeta(2,2)+\zeta(4),$$

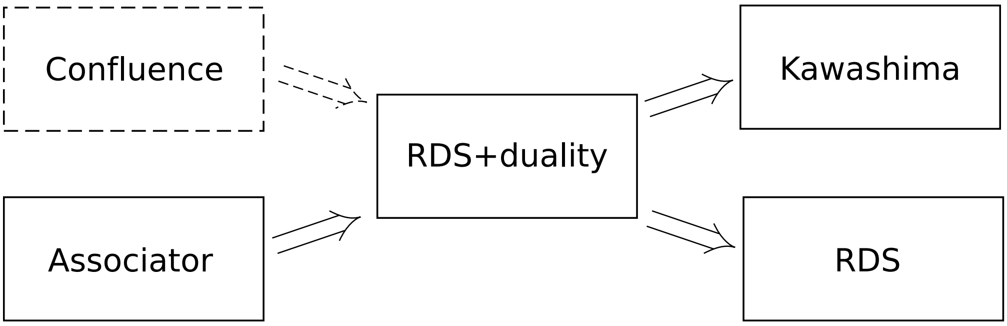
$$\begin{aligned}
\zeta(2)^2 &= \int_{\substack{0<t_1<t_2<1\\ 0<u_1<u_2<1}} \frac{dt_1}{t_1-1}\frac{dt_2}{t_2}\frac{du_1}{u_1-1}\frac{du_2}{u_2} \\
&= \Bigg(\int_{0<t_1<t_2<u_1<u_2<1} + \int_{0<t_1<u_1<t_2<u_2<1} + \int_{0<t_1<u_1<u_2<t_2<1} \\
&\quad \int_{0<u_1<u_2<t_1<t_2<1} + \int_{0<u_1<t_1<u_2<t_2<1} + \int_{0<u_1<t_1<t_2<u_2<1}\Bigg) \frac{dt_1}{t_1-1}\frac{dt_2}{t_2}\frac{du_1}{u_1-1}\frac{du_2}{u_2} \\
&= 2\zeta(2,2) + 4\zeta(1,3)
\end{aligned}$$

といった具合である。二通りの積の表示から得られる $\mathbb{Q}$-線形関係式 (上の例では $\zeta(4) = 4\zeta(1,3)$) は複シャッフル関係式と呼ばれ、さらに収束しないインデックス $(k_1,\ldots,k_{d-1},1)$ の場合に拡張したものは正規化複シャッフル関係式と呼ばれる。正規化複シャッフル関係式は全ての多重ゼータ値間の線形関係式を尽くすことが予想されており [5]、現在のところ数値的に重さ 20 まで確認されている [6]。多重ゼータ値の全ての関係式を尽くす族を見つけることは多重ゼータ値の関係式全体の構造を理解する上で非常に重要な研究テーマであり、これまでに異なる視点から 3 つの「全てを尽くす」ことが予想される大きな族が発見されている。それらは、

- アソシエーター関係式
- 正規化複シャッフル関係式

- 川島関係式 [7]

と呼ばれ、上述の正規化複シャッフル関係式以外はそれぞれ、ドリンフェルト・アソシエーターの幾何的な対称性 (アソシエーター関係式)、多重調和級数を補間するニュートン級数 (川島関係式) から導かれる。今回の我々の研究では、$\frac{dt}{t}$, $\frac{dt}{t-1}$ に加えて $\frac{dt}{t-z}$ を含むより一般の反復積分 ($S = \{0, 1, \infty, z\}$ の場合) を考察し、その関係式において z を 1 に“ 合流 ” させることで「合流関係式」という新たな多重ゼータ値の関係式族を構成し、その族が正規化複シャッフル関係式及び双対関係式を含む大きなものであることを証明した。今回の結果を踏まえると多重ゼータ値のすべての (線形) 関係式を尽くすことが予想される関係式族の間の知られている包含関係は以下のようになる。



さて、合流関係式の構成の方針は以下のとおりである。$\frac{dt}{t-z}$ を含む反復積分は z の関数とみなすことが出来るため、z について微分するという操作が可能である。いま 3 変数非可換多項式環 $\mathbb{Q}\langle e_0, e_1, e_z\rangle$ の部分環

$$\mathcal{A}_z^0 := \bigoplus_{\substack{n \geq 0 \\ a_1 \neq 0,\, a_n \neq 1}} \mathbb{Q}\, e_{a_1} \cdots e_{a_n}$$

を考え、各単項式 $e_{a_1} \cdots e_{a_n}$ に

$$I(a_1, \ldots, a_n) \qquad (a_1, \ldots, a_n \in \{0, 1, z\})$$

を対応付ける $\mathbb{Q}$-線形写像を L とおこう。このとき、後に定義する“ $\mathcal{A}_z$ 上の代数的微分 $\partial_{\alpha,\beta}$ ”を用いて $w \in \mathcal{A}_z^0$ に対して、

$$\frac{d}{dz} L(w) = \frac{1}{z} L(w_0) + \frac{1}{z-1} L(w_1)$$

をみたす $w_0, w_1 \in \mathcal{A}_z^0$ を自然に構成できる。この代数的微分を利用すると、標準関係式という $(\mathbb{P}^1, \{0, 1, \infty, z\})$ 上の反復積分の関係式族 $\mathcal{I}_{\mathrm{ST}} \subset \ker L$ を定義することが出来る。合流関係式とは、およそこの標準関係式の $z \to 1$ での極限から得られる多重ゼータ値の関係式である。いま $\mathcal{A}^0 := \mathcal{A}_z^0 \cap \mathbb{Q}\langle e_0, e_1\rangle$ とおくと、$\lambda(\ker L) \subset \ker L$ となる写像

$$\lambda : \mathcal{A}_z^0 \longrightarrow \mathcal{A}^0$$

が構成できる。特に

$$w \in \bigoplus_{\substack{n\geq 0\\ a_1\neq 0,\, a_n\neq 1,z}} \mathbb{Q}\, e_{a_1}\cdots e_{a_n} \qquad (=\mathbb{Q}\oplus\mathcal{A}_z e_0)$$

に対しては $\lambda(w)=w|_{z\to 1}$($w|_{z\to 1}$ は w 内の e_z を e_1 に置き換えた元) であって, λ は極限 $\lim_{z\to 1} L(w)$ が発散する場合に対して e_z を e_1 に置き換える写像を適切に拡張した写像である。

標準関係式の定義にはいくつかの同値な言い換えがあるが、一つの方法としてある写像 $\varphi_{\sqcup\!\sqcup}\in \mathrm{End}(\mathcal{A}_z^0)$ の像として定義することが出来る。さらに、写像 λ を組み合わせることで各 $w\in\mathcal{A}_z^0$ に対して、それに対応する合流関係式 $\lambda\circ\varphi_{\sqcup\!\sqcup}(w)$ を具体的に与えることが出来る (本稿末の表参照)。また、本稿では合流関係式が多重ゼータ値の関係式を全て生み出すという予想を述べ、予想の肯定的な支持材料として、最後に正規化複シャッフル関係式と双対関係式がいずれも合流関係式に含まれるという結果を紹介する。

なお本稿はリサーチ・アナウンスメントであるため、結果の紹介をメインにしている。本文中の多くの命題の証明は本論文 [4] および関連論文 [3] を参照されたい。

§ 2. 標準関係式

この節では $(\mathbb{P}^1,\{0,1,\infty,z\})$ 上の反復積分について考察し、それらの間の標準関係式を導入する。次の設定を用いる。$\mathcal{A}_z:=\mathbb{Q}\langle e_0,e_1,e_z\rangle$, $\mathcal{A}:=\mathbb{Q}\langle e_0,e_1\rangle$ とし、$S\subset\mathbb{P}^1$ に対して, 許容語の集合 W_S^0 を

$$W_S^0 := \{\, e_{a_1}\cdots e_{a_n} \,|\, n\geq 0,\ a_1,\ldots,a_n\in S,\ a_1\neq 0,\ a_n\neq 1\}$$

で定め、

$$\mathcal{A}_z^0 := \bigoplus_{w\in W^0_{\{0,1,z\}}} \mathbb{Q}\, w \qquad (\subset \mathcal{A}_z)$$

$$\mathcal{A}^0 := \bigoplus_{w\in W^0_{\{0,1\}}} \mathbb{Q}\, w \qquad \left(=\mathcal{A}\cap\mathcal{A}_z^0\right)$$

とおく。

Definition 2.1 (シャッフル積). シャッフル積 $\sqcup\!\sqcup : \mathcal{A}_z\otimes\mathcal{A}_z \longrightarrow \mathcal{A}_z$ を $w\sqcup\!\sqcup 1 = 1\sqcup\!\sqcup w = w$ $(w\in\mathcal{A}_z)$ および、

$$e_x u \sqcup\!\sqcup e_y v = e_x(u\sqcup\!\sqcup e_y v) + e_y(e_x u\sqcup\!\sqcup v) \qquad x,y\in\{0,1,z\},\ u,v\in\mathcal{A}_z$$

で語長 (次数) に関して帰納的に定義する。

Definition 2.2 (スタッフル積 [3])**.** スタッフル積 $*: \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}_z \longrightarrow \mathcal{A}_z$ を $u * 1 = u$, $1 * v = v$ $(u \in \mathcal{A}, v \in \mathcal{A}_z)$ および、

$$e_x u * e_y v = e_{xy}(u * e_y v + e_x u * v - e_0(u * v)) \qquad x \in \{0,1\}, y \in \{0,1,z\}, u \in \mathcal{A}, v \in \mathcal{A}_z$$

で語長 (次数) に関して帰納的に定義する。スタッフル積は「積」と名前がついているものの、実際は $\mathcal{A}_z$ の $\mathcal{A}$ 加群の構造である。

Remark. 2 つの積は共に可換、結合的 (スタッフル積については $\mathcal{A}$ 加群であるという意味) である。上のスタッフル積の定義は一般化されており標準的ではないが、$z_k = -e_1 e_0^{k-1}$ を用いた標準的なスタッフル積 $*: \mathcal{A}^1 \otimes \mathcal{A}^1 \longrightarrow \mathcal{A}^1$ $(\mathcal{A}^1 := \mathbb{Q} \oplus e_1\mathcal{A} \subset \mathcal{A})$ の定義と整合的である [3]。

また、$\mathbb{Q}$-線形写像 $L : \mathcal{A}_z^0 \to \mathbb{C}$ を

$$L(e_{a_1} \cdots e_{a_n}) := \int_{0<t_1<\cdots<t_n<1} \frac{dt_1}{t_1 - a_1} \cdots \frac{dt_n}{t_n - a_n}$$

で定める。許容語の条件 $a_1 \neq 0$, $a_n \neq 1$ は、反復積分が収束するための必要十分条件であることに注意する。

Proposition 2.3 ([3])**.** L はシャッフル積、スタッフル積を通常の積に移す。すなわち、

$$\begin{aligned} L(u \sqcup\!\sqcup v) &= L(u)L(v) \qquad (u, v \in \mathcal{A}_z^0) \\ L(u * v) &= L(u)L(v) \qquad (u \in \mathcal{A}^0, v \in \mathcal{A}_z^0). \end{aligned}$$

次に、$\mathcal{A}_z$ 上に微分作用素 $\partial_{\alpha,\beta}$ を以下で定義する。

Definition 2.4 ([2])**.** $\alpha, \beta \in \{0,1,z\}$ に対して、$\mathcal{A}_z$ 上の $\mathbb{Q}$-線形写像 $\partial_{\alpha,\beta}$ を各単項式 $e_{a_1} \cdots e_{a_n}$ に対して

$$\partial_{\alpha,\beta}(e_{a_1} \cdots e_{a_n}) := \sum_{i=1}^{n} \left(\delta_{\{a_i,a_{i+1}\},\{\alpha,\beta\}} - \delta_{\{a_{i-1},a_i\},\{\alpha,\beta\}}\right) e_{a_1} \cdots \widehat{e_{a_i}} \cdots e_{a_n}$$

で定める。ここで集合 S, T に対してクロネッカー記号を

$$\delta_{S,T} := \begin{cases} 1 & S = T \\ 0 & S \neq T \end{cases}$$

で定めるものとし、また式を簡潔に表すため便宜的に $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 1$ と定義した。

Remark. この微分作用素について、$\partial_{\alpha,\beta} = \partial_{\beta,\alpha}$(添字の対称性) は明らかである。また、$\partial_{\alpha,\beta}(\mathcal{A}_z^0) \subset \mathcal{A}_z^0$ も容易。さらに $\mathcal{A}_z^0$ 上で $\partial_{\alpha,\alpha} = 0$ および $\partial_{1,0} + \partial_{z,0} + \partial_{z,1} = 0$ が成立することが分かる。

さて、この微分写像は実際の微分 $\frac{d}{dz}$ と以下の関係がある。

Proposition 2.5 ([2]). $w \in \mathcal{A}_z^0$ に対し、

$$\frac{d}{dz}L(w) = \frac{1}{z}L(\partial_{z,0}w) + \frac{1}{z-1}L(\partial_{z,1}w).$$

$w \in \mathcal{A}_z$ に対し、記号 $w|_{e_z \to 0}$ で e_z に 0 を代入した元を表すものとする。明らかに

$$w|_{e_z \to 0} = 0 \Longleftrightarrow w \in \mathcal{A}_z e_z \mathcal{A}_z \cap \mathcal{A}_z^0$$

である。命題 2.5 から直ちに次を得る。

Lemma 2.6. $w \in \mathcal{A}_z^0$ に対し、

$$L(\partial_{z,0}w) = L(\partial_{z,1}w) = 0$$

かつ $w|_{e_z \to 0} = 0$ であるならば、

$$L(w) = 0.$$

ただし記号 $w|_{e_z \to 0}$ で e_z に 0 を代入した元を表すものとする。

Proof. 仮定から命題 2.5 より、$\frac{d}{dz}L(w) = 0$、よって $L(w)$ は z の関数として定数である。したがって

$$L(w) = \lim_{z \to \infty} L(w) = L(w|_{e_z \to 0}) = 0.$$

□

また、この微分作用素はシャッフル積・スタッフル積について導分になる。

Theorem 2.7 ([3]). $a \in \{0,1\}$ について次の恒等式が成立する。
(1) $u, v \in \mathcal{A}_z$ に対して

$$\partial_{z,a}(u ш v) = \partial_{z,a}(u) ш v + u ш \partial_{z,a}(v)$$

(2) $u \in \mathcal{A}^1, v \in \mathcal{A}_z$ に対して

$$\partial_{z,a}(u * v) = u * \partial_{z,a}(v)$$

((2) で、$\partial_{z,a}(u) * v$ は恒等的に 0 のため省略した。*)*

命題 2.5 を踏まえて標準関係式を以下のように定義する。

Definition 2.8 ([4]). $w \in \mathcal{A}_z^0$ が標準関係式であるとは、任意の $r \geq 0$ と $a_1, \ldots, a_r \in \{0,1\}$ に対して

$$(\partial_{z,a_1} \cdots \partial_{z,a_r} w)|_{e_z \to 0} = 0$$

を満たすことと定める。標準関係式全体のなす $\mathbb{Q}$ ベクトル空間を $\mathcal{I}_{\mathrm{ST}}$ と表記する。

Remark. 標準関係式 $w \in \mathcal{I}_{\mathrm{ST}}$ が関係式である ($L(w)=0$ である) ことは命題 2.5 から直ちに従う。

標準関係式には便利な言い換えが存在する。まず線形写像 $\varphi_{ш} : \mathcal{A}_z^0 \longrightarrow \mathcal{A}_z$ を以下のように定義する [4]。

$$\varphi_{ш}(w) := \sum_{\substack{r\geq 0\\ b_1,\ldots,b_r\in\{0,z\}}} (\partial_{1,b_1}\cdots\partial_{1,b_r}w)|_{e_z\to 0} ш\, e_{b_1}\cdots e_{b_r}.$$

Proposition 2.9 ([4])**.** $\varphi_{ш}(\mathcal{A}_z^0) \subset \mathcal{A}_z^0$。また $\varphi_{ш}$ は $\mathcal{A}_z^0$ の ш 代数としての準同型で、冪等 *(*$\varphi_{ш}\circ\varphi_{ш} = \varphi_{ш}$*)* である *(*冪等性は次の定理から直ちに分かる*)*。

Theorem 2.10 ([4])**.** w が標準関係式であることと、$\varphi_{ш}(w)=0$ であることと、ある $u\in\mathcal{A}_z^0$ について $w = u-\varphi_{ш}(u)$ と書けることは全て同値である。すなわち、

$$\mathcal{I}_{\mathrm{ST}} = \ker\varphi_{ш} = \mathrm{im}\,(\mathrm{id}-\varphi_{ш}).$$

Proof. $\partial_{1,0} = -\partial_{z,1}-\partial_{z,0}$ だから、$w\in\mathcal{I}_{\mathrm{ST}}$ ならば $\varphi_{ш}(w)=0$。また、$\varphi_{ш}(w)=0$ ならば $w = w-\varphi_{ш}(w)\in\mathrm{im}\,(\mathrm{id}-\varphi_{ш})$。よって

$$\mathcal{I}_{\mathrm{ST}} \subset \ker\varphi_{ш} \subset \mathrm{im}\,(\mathrm{id}-\varphi_{ш}).$$

つぎに逆の包含を示す。いま $b, b_1,\ldots b_r\in\{0,z\}$ ならば $\partial_{1,b}\,(e_{b_1}\cdots e_{b_r}) = \delta_{b,b_r}e_{b_1}\cdots e_{b_{r-1}}$ だから、

$$\begin{aligned}\partial_{1,b}\varphi_{ш}(w) &= \sum_{\substack{r\geq 0\\ b_1,\ldots,b_r\in\{0,z\}}} (\partial_{1,b_1}\cdots\partial_{1,b_r}w)|_{e_z\to 0} ш\, \delta_{b,b_r}e_{b_1}\cdots e_{b_{r-1}}\\ &= \sum_{\substack{r\geq 1\\ b_1,\ldots,b_{r-1}\in\{0,z\}}} \left(\partial_{1,b_1}\cdots\partial_{1,b_{r-1}}\partial_{1,b}w\right)\Big|_{e_z\to 0} ш\, e_{b_1}\cdots e_{b_{r-1}}\\ &= \varphi_{ш}(\partial_{1,b}w)\end{aligned}$$

ゆえに $\partial_{z,a}\varphi_{ш}(w) = \varphi_{ш}(\partial_{z,a}w)$ $(a\in\{0,1\})$。いま $\varphi_{ш}(u)|_{e_z\to 0} = u|_{e_z\to 0}$ だから、

$$(\partial_{z,a_1}\cdots\partial_{z,a_r}(w-\varphi_{ш}(w)))|_{e_z\to 0} = \partial_{z,a_1}\cdots\partial_{z,a_r}w\big|_{e_z\to 0} - \varphi_{ш}(\partial_{z,a_1}\cdots\partial_{z,a_r}w)\big|_{e_z\to 0} = 0.$$

よって $\mathrm{im}\,(\mathrm{id}-\varphi_{ш})\subset\mathcal{I}_{\mathrm{ST}}$。 □

Remark. 上の定理により標準関係式は $w\in\mathcal{A}_z^0$ に対して $w-\varphi_{ш}(w)$ という形で具体的に与えられる。また、ここでは省略したが、$\varphi_{ш}$ の定義において ш を $*$ に置き換えた φ_* も全く同様に定義され、$\mathcal{A}_z^0$ の $(\mathcal{A}, *)$ 加群としての冪等な自己準同型になる。この φ_* を用いると $\mathcal{I}_{\mathrm{ST}}$ の別の表示

$$\mathcal{I}_{\mathrm{ST}} = \ker\varphi_* = \mathrm{im}\,(\mathrm{id}-\varphi_*).$$

が得られる [4]。

§ 3.　合流関係式

前節で定義した標準関係式から多重ゼータ値の関係式をどのように導くかを説明するのがこの節のテーマである。合流関係式とは、標準関係式の $z \to 1$ の極限から得られる関係式のことである。考え方自体は非常にシンプルであるが、十分な関係式を得るためには極限が発散してしまう場合も考察する必要があり工夫が必要である。また発散する場合の取扱いは慎重にしないといけない。例えば、

$$e_z e_0 + e_1 e_z - e_z^2 \in \mathcal{I}_{\mathrm{ST}} \tag{3.1}$$

とすると、

$$L(e_z e_0) + L(e_1 e_z) - L(e_z^2) = 0$$

が $z \in \mathbb{C} \setminus [0,1]$ に対して成立している。ここで $z \to 1$ の極限を真面目に考えずに単に $z = 1$ を代入したらどうか?(3.1) で単純に e_z を e_1 に置き換えた式は $\left(e_z e_0 + e_1 e_z - e_z^2\right)|_{e_z \to e_1} = e_1 e_0$ だが、

$$L(e_1 e_0) = -\frac{\pi^2}{6} \neq 0$$

である。これは $z \to 1 + 0$ の極限をとると、$L(e_1 e_z)$ と $L(e_z^2)$ の二項とも発散し、

$$\lim_{z \to 1+0} \left(L(e_1 e_z) - L(e_z^2)\right)$$

が 0 にならないためである。すなわち

$$\lim_{z \to 1+0} L(w) = L(w|_{e_z \to e_1})$$

は任意の $w \in \mathcal{A}_z^0$ に対しては成立しない。しかし、こうした場合でも、発散の様子を記述することで「発散のない場合の e_z を e_1 に置き換える操作」を発散する場合に一般化し多重ゼータ値の関係式を得ることが出来る。以下にその手順を述べる。

まず、

$$W_{\{0,1,z\}}^{-2} := \{\, e_{a_1} \cdots e_{a_n} \,|\, n \geq 0,\, a_1, \ldots, a_n \in \{0,1,z\},\, a_1 \neq 0,\, a_n \notin \{1,z\}\}$$

とおき、$\mathcal{A}_z^{-2} \subset \mathcal{A}_z^{-1} \subset \mathcal{A}_z^0$ を

$$\mathcal{A}_z^{-2} := \bigoplus_{w \in W_{\{0,1,z\}}^{-2}} \mathbb{Q}\, w$$
$$\mathcal{A}_z^{-1} := \bigoplus_{j \geq 0} \mathcal{A}_z^{-2} e_z^j$$

で定める。$w \in \mathcal{A}_z^{-2}$ に対しては $\lim_{z \to 1+0} L(w) = L(w|_{e_z \to e_1})$ が成立することに注意する。次の補題が基本的である。

Lemma 3.1 ([5, 4]). $w \in \mathcal{A}_z^0$ に対して、十分大きい $m \geq 0$ について

$$L(w) - P_w(\log(z-1)) = O((z-1)\log^m(z-1)).$$

を満たす多項式 $P_w(T) \in \mathbb{R}[T]$ がただ一つ存在する。

この補題より $L(w) = 0 \Leftrightarrow P_w(T) = 0$ だから、$w \in \mathcal{A}_z^0$ に対して $P_w(T)$ の各係数を多重ゼータ値の線形和に表せれば、それらは関係式を与える。いま $\lambda'' : \mathcal{A}_z^{-2} \longrightarrow \mathcal{A}^0$ を

$$\lambda''(w) := w|_{e_z \to e_1}$$

で定めると、$w \in \mathcal{A}_z^{-2}$ に対して明らかに $L(\lambda''(w)) = P_w(0)$ である。そこで以下では、

$$L(\lambda(w)) = P_w(0)$$

を満たす λ'' のうまい拡張 $\lambda : \mathcal{A}_z^0 \longrightarrow \mathcal{A}^0$ を構成する。

- STEP 1. まず λ'' を $\lambda' : \mathcal{A}_z^{-1} \longrightarrow \mathcal{A}^0$ へ拡張しよう。同型

$$\mathcal{A}_z^{-2} \otimes \mathbb{Q}\langle e_z \rangle \longrightarrow \mathcal{A}_z^{-1} \ ; \ u \otimes v \mapsto u \sqcup\mathchoice{}{}{}{}\!\sqcup v$$

の逆写像を $\mathrm{reg}_{\{z\}}$ で表す。このとき、$\mathrm{reg}_{\{z\}}(w) = \sum_{i\geq 0} w_i \otimes e_z^i$ とすると、

$$P_w(T) = \sum_{i \geq 0} L(w_i|_{e_z \to e_1}) \frac{T^i}{i!}$$

である。従って、

$$\mathcal{A}_z^{-1} \xrightarrow[\mathrm{reg}_{\{z\}}]{\simeq} \mathcal{A}_z^{-2} \otimes \mathbb{Q}\langle e_z \rangle \xrightarrow[\mathrm{id}\otimes(|_{e_z \to 0})]{\twoheadrightarrow} \mathcal{A}_z^{-2} \otimes \mathbb{Q} = \mathcal{A}_z^{-2} \quad ; \ w \mapsto w_0$$

の合成写像を $\mathrm{reg}_{\{z\}}^{(0)}$ と表すことにすると $\lambda' := \lambda'' \circ \mathrm{reg}_{\{z\}}^{(0)}$ は $L(\lambda'(w)) = P_w(0)$ を満たす λ'' の $\mathcal{A}_z^{-1}$ への拡張である。

- STEP 2. さらに λ' を $\lambda : \mathcal{A}_z^0 \longrightarrow \mathcal{A}^0$ へ拡張する。同型

$$\mathcal{A}_z^{-2} \otimes (\mathcal{A}_z^0 \cap \mathbb{Q}\langle e_1, e_z \rangle) \longrightarrow \mathcal{A}_z^0 \ ; \ u \otimes v \mapsto u \sqcup\!\sqcup v$$

の逆写像を $\mathrm{reg}_{\{z,1\}}$ で表す。次に、$\mathcal{A}_z$ 上の反自己同型 τ_z を $\tau_z(e_0) = e_z - e_1$, $\tau_z(e_1) = e_z - e_0$, $\tau_z(e_z) = e_z$ で定義し、f を τ_z の $\mathcal{A}_z^0 \cap \mathbb{Q}\langle e_1, e_z \rangle$ への制限として

$$\mathcal{A}_z^0 \xrightarrow[\mathrm{reg}_{\{z,1\}}]{\simeq} \mathcal{A}_z^{-2} \otimes \left(\mathcal{A}_z^0 \cap \mathbb{Q}\langle e_1, e_z \rangle\right) \xrightarrow[\mathrm{id}\otimes f]{\simeq} \mathcal{A}_z^{-2} \otimes \left(\mathcal{A}_z^0 \cap \mathbb{Q}\langle e_0, e_z \rangle\right) \xrightarrow[u\otimes v \mapsto u \sqcup\!\sqcup v]{\twoheadrightarrow} \mathcal{A}_z^{-1}$$

の合成写像を $N : \mathcal{A}_z^0 \longrightarrow \mathcal{A}_z^{-1}$ とおく。f は $\mathbb{Q}\langle e_z \rangle$ 上は恒等写像なので、N は $\mathcal{A}_z^{-1}$ 上は恒等写像。また構成から、$L(w) = L(N(w))$ である。よって、$\lambda := \lambda' \circ N$ は $L(\lambda(w)) = P_w(0)$ を満たす λ' の $\mathcal{A}_z^0$ への拡張である。

さて、$\mathcal{I}_{\mathrm{CF}} := \lambda(\mathcal{I}_{\mathrm{ST}})$ とおき、$w \in \mathcal{I}_{\mathrm{CF}}$ を合流関係式と呼ぶ。λ の性質から直ちに次が得られる。

Theorem 3.2 (合流関係式 [4]). $w \in \mathcal{I}_{\mathrm{CF}}$ に対して $L(w) = 0$。すなわち合流関係式は多重ゼータ値の関係式を与える。

Conjecture 3.3 ([4]). $\mathcal{I}_{\mathrm{CF}} = \ker L \cap \mathcal{A}$。すなわち、合流関係式は全ての多重ゼータ値の線形関係式を与えるだろう。

この予想を支持する根拠として、次の結果を得た。

正規化複シャッフル関係式を含むこと

第一節でも述べた正規化複シャッフル関係式は、正確には次のように定式化される。同型

$$\mathcal{A}^0 \otimes \mathbb{Q}\langle e_1 \rangle \longrightarrow \mathcal{A}^1 (:= \mathbb{Q} \oplus e_1 \mathcal{A})\ ;\ u \otimes v \mapsto u \sqcup\!\sqcup v$$

の逆写像と定数項を取り出す写像 $\mathcal{A}^0 \otimes \mathbb{Q}\langle e_1 \rangle \longrightarrow \mathcal{A}^0 \otimes \mathbb{Q} = \mathcal{A}^0$ の合成を $\mathrm{reg}_{\sqcup\!\sqcup}$ とおく。このとき、正規化複シャッフル関係式とは

$$\mathrm{reg}_{\sqcup\!\sqcup}(u \sqcup\!\sqcup v - u * v) \qquad (u \in \mathcal{A}^1,\, v \in \mathcal{A}^0)$$

の形の元のことであり、よく知られる通り $\ker L \cap \mathcal{A}^0$ の元を与える。いま正規化複シャッフル関係式が生成する $(\mathcal{A}^0, \sqcup\!\sqcup)$ のイデアルを $\mathcal{I}_{\mathrm{RDS}}$ とおく。

Theorem 3.4 (正規化複シャッフル関係式を含むこと [4]). $\mathcal{I}_{\mathrm{RDS}} \subset \mathcal{I}_{\mathrm{CF}}$.

正規化複シャッフル関係式は多重ゼータ値の全ての関係式を与えると予想されているため、その予想を仮定すれば予想 3.3 も正しいことになる。

双対関係式を含むこと

$\mathcal{A}^0$ 上に反自己同型 τ を $\tau(e_0) = -e_1, \tau(e_1) = -e_0$ で定義する。このとき、双対関係式とは

$$w - \tau(w) \qquad (w \in \mathcal{A}^0)$$

の形の元で、$\ker L \cap \mathcal{A}^0$ の元を与える。双対関係式が生成する $(\mathcal{A}^0, \sqcup\!\sqcup)$ のイデアルを $\mathcal{I}_\Delta$ とおく。

Theorem 3.5 (双対関係式を含むこと [4]). $\mathcal{I}_\Delta \subset \mathcal{I}_{\mathrm{CF}}$.

現時点では $\mathcal{I}_\Delta \subset \mathcal{I}_{\mathrm{RDS}}$ は証明されていないため、Theorem 3.5 は Theorem 3.4 と独立した主張である (双対関係式と正規化複シャッフル関係式は異なる背景から得られるため、包含関係を示すのは現状では難しい問題と考えられている)。

合流関係式の表

最後に重さが 4 までの合流関係式の表を記す。ここで、$w \in \mathbb{Q}\langle e_0, e_1\rangle \cup \mathbb{Q}\langle e_0, e_z\rangle \cup \mathbb{Q}\langle e_1, e_z\rangle$ の場合は合流関係式が自明 $(\lambda(w - \varphi_{\sqcup\!\sqcup}(w)) = 0)$ となるため、その場合は予め省いてある。

w	$\lambda(w - \varphi_{\sqcup\!\sqcup}(w))$	w	$\lambda(w - \varphi_{\sqcup\!\sqcup}(w))$
$e_z e_1 e_0$	$-e_1 e_0^2 - e_1^2 e_0$	$e_1 e_z^2 e_0$	$2e_1 e_0 e_1 e_0 + 6e_1^2 e_0^2 + 3e_1^3 e_0$
$e_1 e_z e_0$	$2e_1 e_0^2 + 2e_1^2 e_0$	$e_1 e_z e_0 e_z$	$-2e_1 e_0 e_1 e_0 - 6e_1^2 e_0^2 - 3e_1^3 e_0$
$e_1 e_0 e_z$	$-e_1 e_0^2 - e_1^2 e_0$	$e_1 e_z e_0^2$	$3e_1 e_0^3 + 2e_1 e_0 e_1 e_0 + 6e_1^2 e_0^2$
$e_z^2 e_1 e_0$	$e_1 e_0 e_1 e_0 + e_1^2 e_0^2 + e_1^3 e_0$	$e_1 e_z e_1 e_0$	$3e_1 e_0^3 + 5e_1 e_0 e_1 e_0 + 13e_1^2 e_0^2 + 4e_1^3 e_0$
$e_z e_0 e_1 e_z$	$-4e_1^2 e_0^2 - e_1^3 e_0$	$e_1 e_0 e_z^2$	$e_1 e_0 e_1 e_0 + e_1^2 e_0^2 + e_1^3 e_0$
$e_z e_0 e_1 e_0$	$-e_1 e_0^3 - 4e_1^2 e_0^2$	$e_1 e_0 e_z e_0$	$-3e_1 e_0^3 - 2e_1 e_0 e_1 e_0 - 6e_1^2 e_0^2$
$e_z e_1 e_z e_0$	$-2e_1 e_0 e_1 e_0 - 6e_1^2 e_0^2 - 3e_1^3 e_0$	$e_1 e_0^2 e_z$	$e_1 e_0^3 + e_1 e_0 e_1 e_0 + e_1^2 e_0^2$
$e_z e_1 e_0 e_z$	$4e_1^2 e_0^2 + e_1^3 e_0$	$e_1 e_0 e_1 e_z$	$e_1 e_0^3 + e_1 e_0 e_1 e_0 + e_1^2 e_0^2$
$e_z e_1 e_0^2$	$-e_1 e_0^3 - e_1 e_0 e_1 e_0 - e_1^2 e_0^2$	$e_1^2 e_z e_0$	$-3e_1 e_0^3 - 2e_1 e_0 e_1 e_0 - 6e_1^2 e_0^2$
$e_z e_1^2 e_0$	$-e_1 e_0^3 - 2e_1 e_0 e_1 e_0 - 6e_1^2 e_0^2 - 2e_1^3 e_0$	$e_1^2 e_0 e_z$	$e_1 e_0^3 - e_1 e_0 e_1 e_0 - e_1^2 e_0^2 - 2e_1^3 e_0$

Table 1. 重さが 3, 4 の各 $w \in \mathcal{A}_z^0$ に対する $\lambda(w - \varphi_{\sqcup\!\sqcup}(w))$ の表

References

[1] Pierre Deligne and Alexander B. Goncharov. Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 38(1):1–56, 2005.

[2] Minoru Hirose, Kohei Iwaki, Nobuo Sato, and Koji Tasaka. Duality/sum formulas for iterated integrals and multiple zeta values. *J. Number Theory*, 195:72–83, 2019.

[3] Minoru Hirose and Nobuo Sato. Algebraic differential formulas for the shuffle, stuffle and duality relations of iterated integrals. *preprint*, 2018. `arXiv:1801.03165v1 [math.NT]`.

[4] Minoru Hirose and Nobuo Sato. Iterated integrals on $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty, z\}$ and a class of relations among multiple zeta values. *Adv. Math.*, To Appear.

[5] Kentaro Ihara, Masanobu Kaneko, and Don Zagier. Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values. *Compos. Math.*, 142(2):307–338, 2006.

[6] Masanobu Kaneko, Masayuki Noro, and Kenichi Tsurumaki. On a conjecture for the dimension of the space of the multiple zeta values. *Software for Algebraic Geometry*, IMA 148:47–58, 2008.

[7] Gaku Kawashima. A class of relations among multiple zeta values. *J. Number Theory*, 129(4):755–788, 2009.

[8] Tomohide Terasoma. Mixed Tate motives and multiple zeta values. *Inventiones mathematicae*, 149(2):339–369, 2002.