

## 特異点をもつ曲面の幾何学

大阪大学・大学院理学研究科 梅原 雅頭 (Masaaki Umehara)  
 Graduate School of Science  
 Osaka University

### 1. 波面としての曲面

ここでは、筆者が最近、九大の山田光太郎氏や、広大の佐治健太郎氏・東京電機大の國分雅敏氏・神戸大の Wayne Rossman 氏らと最近行っている特異点をもつ、3次元双曲型空間の平坦な曲面や3次元時空の極大曲面の幾何学について、基本的に現れる2つの特異点「cuspidal edge(カスプ状曲面)」と「swallow tail(ツバメの尾)」の判定条件とその証明について解説し、さらにその応用について述べたい。まず、波面 (wave front) としての曲線と曲面の幾何から話を始めよう。

まず特異点つきの平面曲線について紹介する。平面  $\mathbf{R}^2$  の単位余接束は以下のように平面と円の直積

$$T_1^*\mathbf{R}^2 = \mathbf{R}^2 \times S^1 \ni (x, y, n) \quad (n \in \mathbf{R}^2, |n| = 1)$$

と同一視できる。いまこの上の 1-form  $\eta$  を以下のように定義する。

$$\eta := n_1 dx + n_2 dy$$

ただし  $n = (n_1, n_2)$  とする。この 1-form  $\eta$  は  $d\eta \wedge \eta$  が  $T_1^*\mathbf{R}^2$  上の至る所消えない 3 次形式になるので  $T_1^*\mathbf{R}^2$  上の接触構造を定める。(一般に与えられた Riemann 多様体の単位余接束上には自然な接触構造が存在する。ここで述べたのは、その特別な場合である。) はめ込み  $L: [a, b] \rightarrow T_1^*\mathbf{R}^2$  が「ルジャンドルはめ込み」(あるいは「イソトロピックはめ込み」) であるとは  $L^*\eta = 0$  を満たすときをいう。一般にルジャンドルはめ込み  $L(t) = (x(t), y(t), n(t))$  の平面への射影  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  をフロント (wave front, 波面) という。条件  $L^*\eta = 0$  は  $\gamma'(t)$  と  $n(t)$  とが  $\mathbf{R}^2$  上で直交していることを意味するので次が成り立つ。

**Fact. 1.1.** 任意の正則曲線  $\gamma(t)$  (つまり  $\gamma'(t) \neq 0$  となる曲線) は、単位法線ベクトル  $n(t)$  と対  $(\gamma, n)$  にするとルジャンドルはめ込みとなる。特にフロントは正則平面曲線の拡張概念である。

特異点とは  $\gamma'(t) = 0$  となる点であるが、フロント  $\gamma(t)$  の特異点では、単位法線ベクトルの微分について  $n'(t) \neq 0$  が成り立つ。つまり、曲線  $\gamma(t)$  自体ははめ込みでない点があるが、単位法線ベクトル  $n(t)$  は滑らかにとれて対  $(\gamma(t), n(t))$  としてはめ込みになっているとき、 $\gamma(t)$  をフロントと呼ぶのである。

一般にルジャンドルはめ込みの平面への射影は特異点（一般にはカस्प点）をもつ。与えられた曲線  $\gamma(t)$  を、法線方向に一定距離  $\delta$  だけ動かした曲線

$$\gamma_\delta(t) = \gamma(t) + \delta n(t) \quad (\delta \in \mathbf{R}).$$

を平行曲線という。ホイヘンスの原理によれば、平行曲面は、初期曲線を波面と考えたときの波の時間発展である。このことが、フロント (front, 波面) という言葉の由来でもある。図1は楕円の平行曲線の時間発展である。

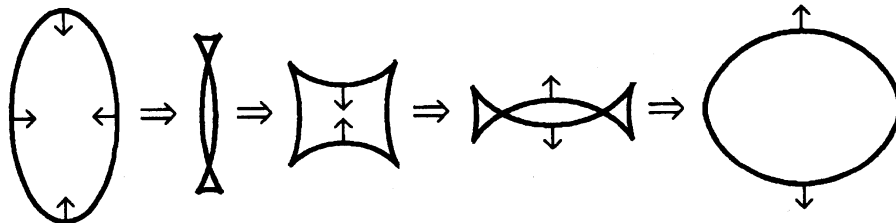


図1 楕円の平行曲線

このように、初期曲線に特異点があなくても、時間発展の過程で自然に特異点が生ずる。平行曲線  $\gamma_\delta(t)$  について以下が成り立つ。

- ジェネリックには  $3/2$ -カस्पと呼ばれるカस्प点 (つまり  $y^2 = x^3$  で表される曲線に現れる特異点) が生ずる。
- フロントの特異点の位置は、平行曲線により移動できる。つまり  $t = t_0$  が  $\gamma(t)$  の特異点なら、十分小さな  $\delta \neq 0$  に対して、 $\gamma_\delta(t_0) \neq 0$  である。

曲線の場合と同様に、特異点を許す曲面としてフロントを定義することができる。空間  $\mathbf{R}^3$  の単位余接束を

$$T_1^*\mathbf{R}^3 = \mathbf{R}^3 \times S^2 \ni (x, y, z, \nu)$$

と同一視し、その上の 1-form を以下のように定義する。

$$\eta := \nu_1 dx + \nu_2 dy + \nu_3 dz \quad (\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3))$$

この 1-form  $\eta$  は  $d\eta \wedge d\eta \wedge \eta$  が  $T_1^*\mathbf{R}^3$  上の至る所消えない 5 次形式になるので  $T_1^*\mathbf{R}^3$  上の接触構造を定める。

$\Sigma$  を2次元多様体とするとき、はめ込み  $L: \Sigma \rightarrow T_1^*\mathbf{R}^3$  がルジャンドルはめ込みとは  $L^*\eta = 0$  のときをいう。ルジャンドルはめ込みの空間への射影をフロント (wave front, 波面) という。曲線と同様に次が成り立つ。

**Fact 1.2.** はめ込まれた曲面  $p(u, v)$  は、単位法線ベクトル  $\nu(u, v)$  と対  $(p, \nu)$  にするとルジャンドルはめ込みと思える。

フロントの特異点では  $p(u, v)$  がはめ込みでなくなるが、単位法線ベクトルの場  $\nu(u, v)$  はその近傍でも、滑らかにとれて、対  $(\gamma(t), n(t))$  は  $\mathbf{R}^3 \times S^2$  へのはめ込みになっている。代表的なものは以下の例に局所微分同相な特異点である。(図2参照)

カスプ状曲面 (cuspidal edge) :  $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 = y^3\}$ ,

ツバメの尾 (swallowtail) :  $\{x = 3u^4 + u^2v, y = 4u^3 + 2uv, z = v\}$

これらの特異点はフロントの摂動に関して安定で、さらにフロントの特異点は少しの摂動でカスプ状曲面かツバメの尾しか現れないようにできることが知られている。

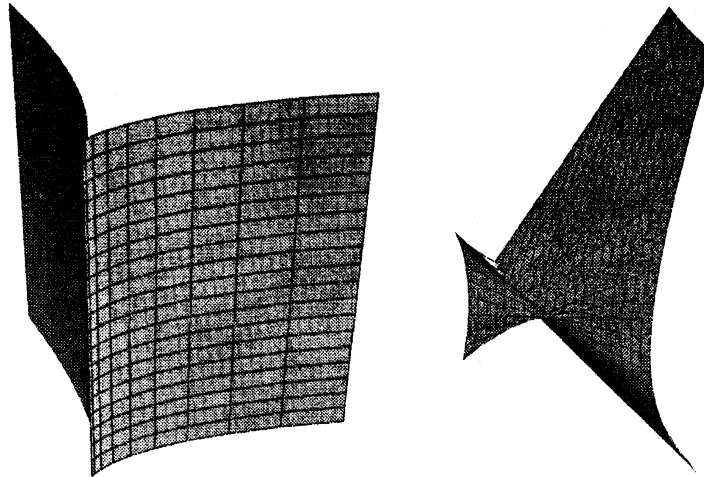


図2 カスプ状曲面 (cuspidal edge) とツバメの尾 (swallowtail)

## 2. CUSPIDAL EDGE と SWALLOW TAIL になるための条件

与えられた特異点が、この2つの特異点のいずれかになるための必要十分条件を与えることができる。

いま  $U$  を  $(\mathbf{R}^2; u, v)$  の領域とし、 $p = p(u, v) : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  をフロントとすると、その単位法線ベクトル  $\nu$  とベクトル積  $p_u \times p_v$  は比例し、 $U$  上の  $C^\infty$ -関数  $\lambda(u, v)$  が存在して

$$p_u \times p_v = \lambda \nu$$

と表すことができる。フロントの特異点は  $\lambda(u, v)$  の零点に対応する。さらに  $d\lambda(u, v) \neq 0$  となる時特異点  $(u, v)$  が非退化であると定義する。非退化な特異点では、陰関数定理より  $uv$ -平面で特異点の集合は正則曲線となり  $\gamma = \gamma(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$  で表され、 $t = 0$  が考えている特異点と考えることができる。一方、この曲線上の各点  $\gamma(t)$  において、第一基本形式が退化する方向  $\eta(t) \neq 0$  が曲線上の関数倍の差を除き一意に定まる。筆者は、國分氏・Rossman 氏・佐治氏・山田氏との共同研究で、以下のような一般的な特異点の判定条件を与えた。

定理 2.1. (4) 非退化な特異点について次が成り立つ。

- (1) カスプ状曲面と局所微分同相であるための必要十分条件は計量の退化方向  $\eta$  と特異方向  $\xi$  が横断的であることである。
- (2) ツバメの尾と局所微分同相であるための必要十分条件は、 $\gamma'(t_0) = \eta(t_0)$  かつ  $\det(\gamma'(t), \eta(t))'|_{t=t_0} \neq 0$  となることである。

この定理は、当初の目的以外にも、後で述べるようにいろいろな応用がある。判定条件が単純であるのが長所である。Darboux の定理により、局所的にすべての接触構造は同一であるから、この判定条件は外の空間が一般の 3次元多様体の場合にも適用できる。

例 2.2. (典型的な Cuspidal edge の場合) 典型的な *cuspidal edge*

$$p(u, v) := (2u^3, -3u^2, v)$$

の場合に定理 2.1 (1) の条件の成立を確かめてみよう。まず

$$p_u \times p_v = -6u(1, u, 0)$$

なので  $u = 0$  (つまり  $v$  軸) が特異点集合である。したがって単位法線ベクトルは

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}(1, u, 0)$$

であるが、これは特異点まで込めて単位法線ベクトル場になっていることがわかる。  $p_u \times p_v = \lambda(u, v)\nu$  とおくと

$$\lambda(u, v) = \det(p_u, p_v, \nu) = -6u\sqrt{1+u^2}$$

であり

$$\lambda_u(0, v) = -6(< 0)$$

であるから  $v$  軸上で  $d\lambda \neq 0$  である。また  $p_u(0, v) = 0$  であるから、退化方向は  $\eta = (1, 0)$  であり、一方、 $(0, 1)$  は特異曲線の接方向であるから、2つの方向は横断的であることがわかる。

例 2.3. (典型的な Swallow tail の場合) 典型的な *Swallow tail*

$$p(u, v) := (3u^4 + vu^2, 4u^3 + 2uv, v)$$

の場合に定理 2.1(2) の条件の成立を確かめてみよう。まず

$$p_u \times p_v = 2(6u^2 + v)(1, -u, u^2)$$

なので  $6u^2 + v = 0$  が特異点集合である。そして  $u = v = 0$  のときが、*swallow tail* に対応する。(その他の特異点は *cuspidal edge* である。) したがって単位法線ベクトルは

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{1+u^2+u^4}}(1, -u, u^2)$$

であるが、これは特異点まで込めてなめらかである。 $p_u \times p_v = \lambda(u, v)\nu$  とおくと

$$\lambda(u, v) = \det(p_u, p_v, \nu) = 2\sqrt{1+u^2+u^4}(6u^2+v)$$

であり

$$\lambda_v(u, v) = 2\sqrt{1+u^2+u^4}(> 0)$$

なので、特異曲線上の点はすべて非退化である。一方特異曲線  $6u^2 + v = 0$  上で  $p_u = 0$  であるから、退化方向は  $\eta = (1, 0)$  であり、一方、特異曲線の接ベクトルは  $\gamma' = (1, -12u)$  である。よって

$$\frac{d}{dt} \det(\gamma', \eta) = \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -12u \end{vmatrix} = -12 (\neq 0)$$

であるから  $u = 0$  で、定理 2.1 の (2) の条件が満たされる。

(定理の証明の概略) 証明の概略をここに記しておこう。まず2つのフロントに関して、特異点の像が局所微分同相であることと、ルジャンドル写像へのフロントの持ち上げがルジャンドルはめ込みとして同値であることが知られている (Zakalyukin [Z])。上の定理の条件は、この同値関係によって不変な概念であり、上に述べたように典型的な *cuspidal edge* と *swallow tail* に関しては、上の2つの例で確かめたように上の条件が満たされていることから、証明の本質は、上の条件を満たす特異点が *cuspidal edge* と *swallow tail* に微分同相であることを示す部分にある。

文献 [1] にしたがって、そのための準備を与えよう。まず一変数の  $C^\infty$  関数

$$f = f(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(0) = 0$$

が  $t = 0$  で  $A_k$ -singularity をもつとは

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(k)}(0) = 0, \quad f^{(k+1)}(0) \neq 0$$

となるときをいう。ただし  $f^{(n)}(t) = d^n f / dt^n$  ( $n = 1, 2, \dots, k+1$ ) である。さらに  $\Omega^n$  を  $\mathbf{R}^n$  の原点を含む領域とし、 $C^\infty$ -写像

$$F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Omega^n \rightarrow \mathbf{R}$$

が  $f$  の ( $n$ -変数の) unfolding (開折) であるとは

$$F(t, 0) = f(t) \quad (t \in (-\varepsilon, \varepsilon))$$

が成り立つときをいう。ただし  $0$  は  $\mathbf{R}^n$  の零ベクトルである。さらに、行列

$$\begin{pmatrix} F_{x_1} & F'_{x_1} & \dots & F_{x_1}^{(k-1)} \\ F_{x_2} & F'_{x_2} & \dots & F_{x_2}^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ F_{x_n} & F'_{x_n} & \dots & F_{x_n}^{(k-1)} \end{pmatrix}$$

の階数が  $k$  のとき versal unfolding (普遍開折) という<sup>1</sup>。ただし

$$F_{x_j}^{(i)} := \frac{\partial^{i+1} F}{\partial x_j \partial t^i}(t, x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, \dots, k-1, \quad j = 1, \dots, n)$$

である。このとき  $\Omega^n$  の部分集合

$$D_F := \{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n; \exists t \in \mathbf{R} \text{ such that } F(t, \mathbf{x}) = F'(t, \mathbf{x}) = 0 \}$$

を  $F$  の 判別集合 (discriminant set) という。次が成り立つ。

**Fact 2.4.** [1]  $n = 3$  とし  $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{R}$  は  $A_k$ -singularity をもつとし  $F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Omega^3 \rightarrow \mathbf{R}$  を versal unfolding とする。このとき

- (1)  $k = 2$  のとき  $D_F$  は *cuspidal edge* に局所微分同相である。
- (2)  $k = 3$  のとき  $D_F$  は *swallow edge* に局所微分同相である。

<sup>1</sup>正確には  $\mathcal{K}$ -versal という。いま  $F$  を versal とし  $G$  を別の  $m$ -変数の  $f(t)$  の unfolding とすると  $G(t, x) = \lambda(t, x)F(a(t, x), b(x))$  を満たす局所的に定義された  $C^\infty$ -関数  $\lambda(t, x) (\neq 0)$  と  $a(t, x)$  そして  $b : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  が存在する。つまり他の unfolding はこの意味で  $F$  から誘導される。versal (普遍) という言葉はこの性質に由来する。uni-versal の uni が抜けたのは変数の数に対して、一意性がないためらしい。

この事実を用いて定理を示すためのアイデアは, cuspidal edge や swallowtail のジェネリックな方向からの切り口を考えることにある. 切り口に現れるのは, 平面曲線としてフロントであり, このフロントは, それ自身の接線の包絡線になっており, その包絡線を  $F(t, x, y, z) = F'(t, x, y, z) = 0$  という形に自然に書くことができ, 元の曲面は  $F$  の判別集合  $D_F$  と一致する. つまり, 包絡線から定まる unfolding  $F$  が versal であることを示せばよい. この手順を各場合に記すと以下のようなになる.

(1) を満たす特異点が cuspidal edge になること. 原点を特異点としてよい. また  $\mathbf{R}^3$  において, 特異方向が  $z$ -軸になるように曲面を回転させる. そして, 原点の近傍で  $z$ -軸に垂直な平面で曲面を切ると, まず, その切り口  $(X(t, z), Y(t, z))$  は (平面曲線としての) フロントになることを示す. すると切り口の曲線について特異点もこめて単位法線ベクトルの場

$$n(t, z) = (a(t, z), b(t, z))$$

がなめらかにとれ

$$F(t, x, y, z) = a(t, z)(x - X(t, z)) + b(t, z)(y - Y(t, z))$$

と定めると  $F = 0$  は, 曲線  $(X(t, z), Y(t, z))$  の接線となる. そして, この接線族の定める包絡線が元の曲線だから,  $F = F' = 0$  が曲線  $(X(t, z), Y(t, z))$  を表す. 特に判別集合  $D_F$  が, 元の曲面である. 比較的簡単な計算により

$$\begin{pmatrix} F_x(0, 0) & F'_x(0, 0) \\ F_y(0, 0) & F'_y(0, 0) \\ F_z(0, 0) & F'_z(0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(0, 0) & a'(0, 0) \\ b(0, 0) & b'(0, 0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となることが示せて, 曲線  $(X(t, z), Y(t, z))$  がフロントであることから, この行列の階数が2であることがわかり  $F$  が versal であることがわかる. もっとも計算が面倒なのは  $f(t) := F(t, 0, 0, 0)$  が  $A_2$ -singularity をもつこと, つまり  $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$  かつ  $f^{(3)}(0) \neq 0$  が示せる. (最後の  $f^{(3)}(0) \neq 0$  を示す部分に定理の条件 (1) を用いる. )

(2) を満たす特異点が Swallowtail になること. 証明の方針は cuspidal edge の場合とほぼ同様である. つまり適当な方向から切った切り口の平面曲線はフロントとなり, 接線の式を  $F = 0$  と云う形にあらわすと  $D_F$  が元の曲面になる. したがって  $F$  が versal かつ  $f(t) := F(t, 0, 0, 0)$  が  $A_3$ -singularity をもつことを示せばよいのだが, 計算は cuspidal edge の場合より遙かに大変である. (最後の  $f^{(4)}(0) \neq 0$  を示す部分に定理の条件 (2) を用いる. )

### 3. $H^3$ の平坦な曲面

ガウス曲率が0の曲面は平坦な曲面とよばれるが、双曲型空間  $H^3$  においては、残念なことに完備な例はホロスフィア以外にほとんど存在しない。次が知られている。

**Fact 3.1.** (Volkov-Vladimirova [9], S. Sasaki [7]) 3次元双曲型空間  $H^3$  の完備かつ平坦な曲面はホロスフィアか測地線の平行曲面に限る。

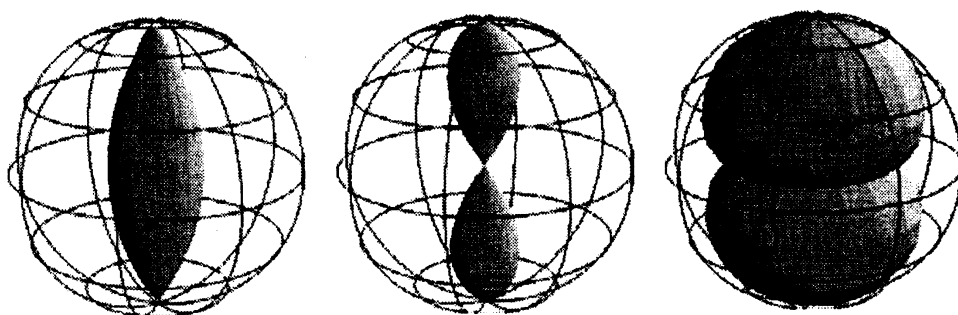


図4 (平坦な回転面)

実際、3次元双曲型空間における、平坦な回転面は分類されていて、ホロスフィア以外に三種類が存在する(図4)。この3種の曲面のうち特異点のないのは、測地線の平行曲面(図4左)のみで、残りの1つは砂時計型(図4中央)で円錐的特異点を持ち、もう一方は雪だるま型(図4右)で cuspidal edge と呼ばれる特異点をもつ。ところで、平坦な曲面は平行曲面をとる操作と相性がよい。

**Fact 3.2.** 平坦な曲面の平行曲面は、また平坦である。

実は、上の平坦な回転面に現れる特異点は、すべて平行曲面をとる操作によってその位置をずらすことができる。つまりフロントになっている。

そこで、 $H^3$  のフロント  $f: \Sigma \rightarrow H^3$  が平坦であるとは  $f$  の特異点以外の点ではガウス曲率が0であることとし、特異点ではその平行曲面を考えると、その点のガウス曲率が0であることとすると、特異点を持たない平坦な曲面を一般化する意味で平坦なフロントが定義できる。平坦な曲面は第二基本形式によって複素構造を与えると、 $\mathbf{R}^3$  の極小曲面の場合と類似の Weierstrass 型の表現公式をもつことが知られている。この公式を用いて平坦なフロントで完備(正確には、特異点集合がコンパクトで、特異点集合を含む曲面上の有界開領域を除いた部分で距離空間として完備な)例が豊富に存在することが示せる。さらに曲面の各点  $p$  において正の(負の)法線方向に測地線を延ばし、理想境界



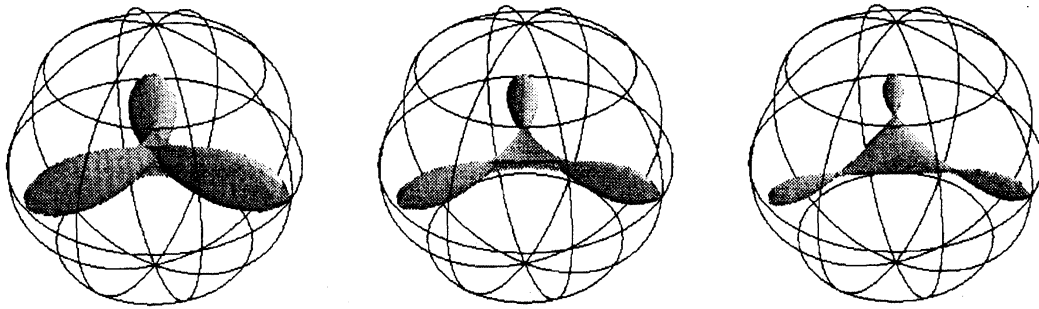


図6 (3つのエンドをもつ例)

$\partial H^3 = S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  にぶつかった点を  $G_{\pm}(p)$  とする. この写像  $G_{\pm}$  は双曲的ガウス写像と呼ばれる. 上に定義した意味での完備かつ平坦なフロントにおいては双曲的ガウス写像の対  $(G_+, G_-)$  は共に,  $\Sigma$  上の有理型関数となる. 次が成り立つ.

**定理 3.3.** (*Gálvez-Martínez-Milán [3]*)  $\Sigma$  を  $H^3$  にはめ込まれた完備かつ (向き付け可能な) 平坦なフロントとすると,  $\Sigma$  はコンパクトリーマン面  $\bar{\Sigma}$  から有限個の点  $p_1, \dots, p_n$  を除いたものと正則同値である.

除かれた  $n$  個の点  $p_1, \dots, p_n$  は, エンド (end) と呼ばれる. さらに  $G_+, G_-$  が共に,  $p_j$  まで有理型に拡張されるとき  $p_j$  は正則であるという. 次が示せる.

**定理 3.4.** (*Kokubu-Yamada-U. [6]*) 完備かつすべてのエンドが正則な  $H^3$  の平坦なフロントについて

$$\deg(G_+) + \deg(G_-) \geq (\text{エンドの数})$$

が成り立つ. (ただし  $\deg(G_+), \deg(G_-)$  はガウス写像の写像度を表す.) 等号はエンドがすべて自己交叉しないことと同値である.

上の不等式の等号を満たす例は, 数多く, 種数が高い例も構成できる (図6, 図7).

ここまでは, 前節に紹介した特異点の判定条件とは関係ない. 前節の応用としては, 以下の2つの定理が示せた.

$U \subset \mathbb{C}$  を原点を中心とする単位円板の近傍とし,  $h$  を  $U$  上で定義された正則関数とする. このとき複素係数の常微分方程式

$$F^{-1}dF = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ e^h & 0 \end{pmatrix} dz$$

の初期値  $F(0) = \text{id}$  に関する解

$$F_h : U \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C})$$

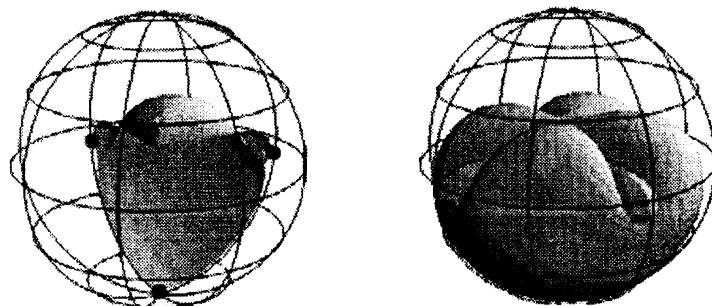


図7 (5つのエンドをもつ種数1の平坦曲面)

の  $\pi : \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})/\mathrm{SU}(2)$  による  $H^3$  への射影

$$f_h := \pi \circ F_h$$

は、平坦な曲面を与える。  $F$  がはめ込みであることと射影  $\pi \circ F$  が、フロントになることは同値になる。平坦な  $H^3$  のフロントの任意の特異点の近傍は皆、このようにして作られた  $f_h$  と合同である。したがって特異点の近傍のふるまいをしらべるには、対応

$$h \longleftrightarrow f_h$$

によって、平坦なフロントを  $U$  上の正則関数の全体  $\mathcal{O}(U)$  と同一視してよいだろう。いま、  $\mathcal{O}(U)$  に  $C^\infty$ -compact open topology を入れる。すなわち

$$J_H^k(U) \ni j^k h := (p, h(p), h'(p), h''(p), \dots, h^{(k)}(p)) \in U \times \mathbb{C}^{k+1}$$

によって、正則関数  $h$  の芽の定める  $U$  上の  $k$ -jet の全体  $J_H^k(U)$  を定める。ここに  $U \times \mathbb{C}^{k+1}$  から、定める位相を入れる。さて  $\mathcal{O}(U)$  の部分集合  $S$  が open であるとは任意の  $h \in S$  に対して、非負整数  $\ell$  と  $U$  の有限個のコンパクト部分集合  $K_1, \dots, K_s$  と、それと同数の  $J_H^k(U)$  の開集合  $O_1, \dots, O_s$  が存在して、

$$h \in \bigcap_{r=1}^s [K_r, O_r]_\ell \subset S$$

となることとして定まる位相が  $C^\infty$ -compact open topology である。前節の特異点の判定条件をこの場合に翻訳すると次が得られる。

命題 3.5. ([4])  $h \in \mathcal{O}(U)$  について、次が成り立つ。

- (1)  $p \in U$  が  $f_h$  の特異点であるための必要充分条件は  $\mathrm{Re}(h(p)) = 0$ .
- (2) さらに、それが非退化な特異点であるための必要充分条件は  $h'(p) \neq 0$ .
- (3) さらに、それが *cuspidal edge* と局所微分同相であるための必要充分条件は  $\mathrm{Im}(e^{-h/2}h') \neq 0$  となることである。

- (4) もしも,  $\text{Im}(e^{-h/2}h') = 0$  であるとき, それが swallowtail と局所微分同相であるための必要充分条件は  $\text{Re}\left\{e^{-h}\left(h'' - \frac{(h')^2}{2}\right)\right\} \neq 0$  となることである.

さらに, これを用いて次の二つの定理が示せる.

**定理 3.6.** ([4])  $K$  を  $U$  の任意のコンパクト部分集合とすると

$S(K) := \{h \in \mathcal{O}(U); f_h \text{ は } K \text{ 上 } \textit{cuspidal edge} \text{ か } \textit{swallowtail} \text{ しかもたない.}\}$   
は  $\mathcal{O}(U)$  の開かつ稠密な部分集合である.

$C^\infty$ -フロントの全体の中で cuspidal edge か swallow tail しかもたないフロントの全体は, Whitney  $C^\infty$  位相に関して open かつ稠密であることが知られているが, 平坦な曲面の全体に制限しても, (位相は少々異なるが) ある意味で同様の主張が成り立つことを上の定理は述べている. この定理の証明は Sard の定理と陰関数定理を用いて, 比較的簡単に証明できる.

上の定理は局所的だが, 以下のように大域的にも同様のことが云える.

**定理 3.7.** ([4])  $f: \Sigma \rightarrow H^3$  を, にはめ込まれた完備かつ回転面でない (向き付け可能な) 平坦なフロントとすると, 有限個の実数値  $t = t_1, \dots, t_m$  を除いて, 平行曲面  $f_t$  は *cuspidal edge* か *swallow tail* しかもたない.

回転面の場合には, 円錐的特異点がすべての平行曲面に現れるケースが実際にあるので, この定理の例外となる. 有限性がでてくる鍵は, 正則関数の一致の定理を用いる部分にあるが, 特異点の判定条件は, 複素解析的ではないので, 証明法は単純ではなく, 特に双曲的ガウス写像が真性特異点をもつ場合が, もつとも面倒な部分である.

#### 4. 3次元時空の極大曲面.

2次元多様体  $\Sigma$  から 3次元時空  $(L^3, ++-)$  へのはめ込み  $f: \Sigma \rightarrow L^3$  の平均曲率な零であるような曲面を極大曲面という. フロントに直接なるわけではないが, 極大曲面についても  $H^3$  の平坦な曲面と類似の話ができる. まず, 次が知られている.

**Fact 4.1.**  $L^3$  の完備・空間的極大曲面は平面に限る.

**Fact 4.2.** Weierstrass 型の表現公式をもつ. (つまり関数論的に立場から曲面が構成できる. 複素構造は, 第1基本形式から誘導される.)

**Fact 4.3.** 曲面  $f : \Sigma \rightarrow L^3$  は  $\mathbf{C}^3$  の *null holomorphic immersion*  $F = (F_1, F_2, F_3) : \tilde{\Sigma} \rightarrow \mathbf{C}^3$  への自然な持ち上げをもつ。(但し  $\tilde{\Sigma}$  は  $\Sigma$  の普遍被覆。) ここで  $F$  が *null* とは

$$\partial F_1 \cdot \partial F_1 + \partial F_2 \cdot \partial F_2 - \partial F_3 \cdot \partial F_3 = 0$$

が成り立つことである。

*null holomorphic immersion* の  $L^3$  への射影を **maxface** (極大面) とよぶ。maxface は、フロントの概念とは別物ではあるが、特異点を限定する概念となっている。maxface で、完備 (正確には、特異点集合がコンパクトで、特異点集合を含む曲面上の有界開領域を除いた部分で距離空間として完備) かつ平坦な例が豊富に存在する。これは、実際、ある種の  $\mathbf{R}^3$  の極小曲面を  $L^3$  へ両者の間の Weierstrass 表現公式の類従を利用して転送することによって構成できる。さらに次が成り立つ。

**定理 5.1.** (Yamada-U. [8])  $\Sigma$  を  $L^3$  にはめ込まれた完備な (向き付け可能な) maxface で、有限全曲率をもつとすると、 $\Sigma$  はコンパクトリーマン面  $\bar{\Sigma}$  から有限個の点  $p_1, \dots, p_n$  を除いたものと正則同値である。また、除かれた  $n$  個の点  $p_1, \dots, p_n$  はエンドと呼ばれ、曲面のガウス写像

$$G : \Sigma \rightarrow \overline{H_+^2 \cup H_-^2} = S^2 = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$$

は、 $\Sigma$  上の有理型関数となり、各エンドにおいて  $G$  は真性特異点をもたない<sup>2</sup>。特に  $G$  は  $\bar{\Sigma}$  まで、有理型に拡張される。そして次が成り立つ。

**定理 5.2.** (Yamada-U. [8]) 完備かつ有限全曲率をもつ  $L^3$  の (空間的な) maxface について次が成り立つ。

$$2\deg(G) \geq -\chi(\Sigma) + (\text{エンドの数}).$$

等号はエンドがすべて自己交叉しないことと同値である。

さて、maxface の特異点が、いつ *cuspidal edge* や *swallow tail* になるかという問題が自然に生ずる。maxface は、一般にフロントの概念と異なるので、2節に紹介した方法がそのまま適用できない。しかし、実は次が成り立つ。

<sup>2</sup> 3次元時空において、ガウス写像は双曲平面への写像となる。双曲平面を2枚用意し、特異点を通ると、もう一方へ移ると考える。2枚の双曲平面を理想境界で貼り合わせてコンパクト化すると、ガウス写像を、球面への写像と考えることができ、この球面を何回覆っているかで写像度が定義される。

命題 4.4. (Yamada-U. [8])  $f : M^2 \rightarrow L^3$  をリーマン面  $M^2$  から  $L^3$  への *maxface* とする. もしも  $f$  のガウス写像  $G$  が  $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  への有理型写像として考えたときの *meromorphic 1-form*  $dG$  が零点をもたなければ  $f$  は非退化な特異点のみをもつ ( $\mathbb{R}^3$  の通常の *contact structure* に関する) フロントとなる.

この命題は,  $f$  の単位法ベクトル場  $n$  を滑らかにとることができて, さらに,  $dG$  が零点をもたないことから  $(f, n)$  が, はめ込みになることが簡単な計算でたしかめられ, 証明が完了する. すると極大面に対しても前のフロントの場合の判定条件が適用できて, 以下が示せる. まず  $U$  を  $\mathbb{C}$  における原点を中心とする単位円板とする. そして  $h$  を  $U$  上の正則関数とすると  $(e^{h(z)/2}, dz)$  を Weierstrass data とする極大面

$$f_h(z) := \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^z (-2g, (1+g^2), \sqrt{-1}(1-g^2)) dz$$

が定まる. すると  $L^3$  のフロントの任意の特異点の近傍は, このようにして作られた  $f_h$  と合同である. したがって特異点の近傍のふるまいをしらべるには, 対応

$$h \longleftrightarrow f_h$$

によって, 極大面を  $U$  上の正則関数の全体  $\mathcal{O}(U)$  と同一視してよいだろう. いま,  $\mathcal{O}(U)$  に  $C^\infty$ -compact open topology を入れる. 定理 3.6 とほぼ同様ににして次が示せる.

定理 4.5. (Yamada-U. [8])  $K$  を  $U$  の任意のコンパクト部分集合とすると

$$S(K) := \{h \in \mathcal{O}(U); f_h \text{ は } K \text{ 上 } \textit{cuspidal edge} \text{ か } \textit{swallowtail} \text{ しかもたない.}\}$$

は  $\mathcal{O}(U)$  の開かつ稠密な部分集合である.

## 5. 終わりに

最近, 神戸大学の藤森氏 [2] が de Sitter 空間の平均曲率 1 の曲面について, ある種の特異点を許すと, 本文で説明した極大曲面のときと同様に Osserman 型の不等式の類似などがなりたつことを示した. (この考究録に藤森氏御本人による解説があると思います.) このような曲面では, 本文で紹介した平坦な曲面や極大曲面同様に完備なものが自明なものしかなく, 特異点つきの曲面を考えることは自然な方向と思われる. 実際, 具体例も多く構成されつつある. 筆者は

山田氏との共同研究 [8] で, 3 次元 Euclid 空間のある種の極小曲面の族を 3 次元時空の極大曲面に転送して種数 1 の新しい例を構成したが, 類似の方法で藤森氏 [2] によって  $H^3$  のある種の平均曲率 1 の曲面の族を de Sitter 空間の平均曲率 1 の曲面に転送できることが示されている. また, これとは別の見地から最近, Lee 氏と Yang 氏の共同研究 [5] によって, de Sitter 空間の平均曲率 1 の曲面がたくさん作られている.

現在, 筆者は, 佐治氏と山田氏と一緒に, 曲面の generic な特異点に特異曲率を導入することを考えている. この特異曲率の積分は全曲率と合わせると曲面のオイラー数が現れるという正統なもので, 是非, 別の機会にその幾何学的諸性質を紹介したいと考えている.

#### REFERENCES

- [1] J.W. Bruce and J. Giblin, *Curves and Singularities*, GTM 14, Springer-Verlag 1973.
- [2] S. Fujimori, Space like CMC 1 surfaces with elliptic ends in de Sitter 3-space, Preprint.
- [3] J. A. Gálvez, A. Martínez and F. Milán, Flat surfaces in hyperbolic 3-space, *Math. Ann.* **316** (2000), 419–435.
- [4] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, Singularities of flat fronts in hyperbolic 3-space, Preprint (math.DG/0401110).
- [5] S. Lee and S.-D. Yang, A spinor representation for spacelike surfaces of constant mean curvature  $-1$  in de Sitter three-space, Preprint.
- [6] Masatoshi Kokubu and Masaaki Umehara and Kotaro Yamada, Flat fronts in hyperbolic 3-space, to appear in *Pacific Journal of Math.*, (math.DG/0301224).
- [7] S. Sasaki, On complete flat surfaces in hyperbolic 3-space, *Kodai. Math. Sem. Rep.* **25** (1973) 449–457.
- [8] M. Umehara and K. Yamada, Maximal surfaces in Minkowski 3-space with singularities, Preprint (math.DG/0307309).
- [9] J.A. Volkov and S.M. Vladimilova, Isometric immersions of the Euclidean plane in Lobachevskii space, *Math. Notes* **10** (1971) 655–661.
- [10] V.M. Zakalyukin, Reconstructions of fronts and caustics depending on a parameter and versality of mappings, *J. Soviet Math.* **27** (1984) 2713–2735.