京都大学防災研究所年報 第 63 号 B
DPRI Annuals, No. 63 B, 2020

動径基底函数を用いた球面上のセミ・ラグランジュ移流

Semi-Lagrange Advection using Radial Basis Functions on the Sphere

榎本剛

Takeshi ENOMOTO

Synopsis

Radial basis functions (RBF) have been used to construct an interpolant from scattered nodes, such as quasi-uniform nodes on the sphere. The RBF advective operator was shown to be well posed on the sphere and an Eulerian advection model on the sphere was constructed in the literature. In the present study, the advection operator is replaced with the upstream trajectory calculation and RBF interpolation to construct a semi-Lagrangian model on the sphere. The semi-Lagrangian model is found to be more accurate than the Eulerian model in the advection of cosine bell and to have much smaller ripples away from the bell. The semi-Lagrangian model presented in this study is a promising approach because of better accuracy and a longer time step than the Eulerian model.

キーワード: トレーサ移流，球面螺旋，内挿

Keywords: tracer advection, spherical helix, interpolation

1. はじめに

大気大循環モデルでは，オイラー移流スキームと並んでセミ・ラグランジュ移流モデルも広く用いられている．時間刻み幅（タイムステップ）を長く取ることができ，値が急変する前線構造を精度よく表現できるためである．セミ・ラグランジュ移流スキームでは，移流項が陽に現れないため微分演算子は不要である．その代わり内挿が必要となる．セミ・ラグランジュ移流スキームには様々なものがある（Staniforth and Coté 1991）が，古典的な上流点探索（Ritche 1987）では節点上に到着する流体粒子の流れを遡り求めた出発点での値を内挿により求める．

動径基底函数（RBF）は，節点からの距離のみに依存する函数で，様々な形状のものが提案されている．規則的な格子を形成しない散在する節点でデータが与えられたとき，RBFを用いると任意の点での内挿値を精度よく計算することができる．

本研究では，球面上の準一様節点でのデータに対してRBF内挿を用いた球面上のセミ・ラグランジュ移流スキーム（RBF-S）を構築する．

RBFは双曲線型微分方程式にも適用可能であり，既にFlyer and Wright (2007)により球面上の準一様節点を用いたオイラー移流モデル（RBF-E）が定式化されている．このモデルでは，RBFで展開された変数を微分し，移流を表す演算子を導出して用いている．この微分演算子は，極を含む球面上のあらゆる点で特異性をもたない．

RBF-Sは，微分演算子の構築が不要で，RBF内挿をそのまま用いることができる．他のセミ・ラグランジュ移流スキーム同様，時間刻み幅がオイラー移流スキームより長く取れることや，不連続の再現性が高まることも期待される．

セミ・ラグランジュ移流モデルは，余弦型の釣鐘様のトレーサを移流する実験（Williamson et al. 1992）により検証する．広く使われているこの移流実験は剛体回転を用いているため，実質的には1次元である．

まず第2節で剛体回転流による余弦型の釣鐘の移流実験を1次元版を定式化し，差分法，スペクトル変換法と比較する．第3節で球面上のRBF-SをRBF-Eと比較する．

2. 1次元移流モデル

本節では，1次元移流モデルを用いて差分法，スペクトル法，RBF-E, RBF-Sを定式化する．球面での移流実験を1次元化した実験により各スキームの誤差を比較する．

2.1 支配方程式と初期値

1次元移流モデルのI個の節点は赤道に沿った緯度円（単位円）上に等間隔$\Delta\lambda = 2\pi/I$に配置する．

$$\lambda_k = \Delta\lambda(k-1), k = 1,2,\cdots,I \tag{1}$$

支配方程式は

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial \lambda} = 0 \tag{2}$$

でh, t, u, λはそれぞれトレーサ，時刻，流速，経度を表す．時間積分には4次のRunge-Kutta法を用いる．$f(x,t) = \partial h/\partial t = -u\partial h/\partial x$とすると，次のように書ける．

$$\begin{aligned} h^{n+1} &= h^n + \frac{1}{6}\Delta t(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 &= f(h^n, t)\Delta t \\ k_2 &= f\left(h^n + \frac{k_1}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}\right) \\ k_3 &= f\left(h^n + \frac{k_2}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}\right) \\ k_4 &= f\left(h^n + k_3, t + \Delta t\right) \end{aligned} \tag{3}$$

2.2 空間離散化

(1) 差分法

差分法では，式(1)の$\partial h/\partial\lambda$を空間中央差分で近似する．

$$\left.\frac{\partial h}{\partial \lambda}\right|_k = \begin{cases} \dfrac{h_2 - h_I}{2\Delta\lambda} & k = 1 \\ \dfrac{h_{k+1} - h_{k-1}}{2\Delta\lambda} & 1 < k < I \\ \dfrac{h_1 - h_{I-1}}{2\Delta\lambda} & k = I \end{cases} \tag{4}$$

(2) スペクトル法

スペクトル法では，フーリエ変換を用いてhをスペクトル係数h_m（mは東西波数）を求め，$I \geq 3N+1$なる切断波数Nで切断する．すなわち波数$N < m < I/2$について$h_m = 0$とする．

$$h_m = \sum_{k=0}^{I-1} h(\lambda_k)\exp\left(-im\lambda_k\right), m = 0,1,\cdots,N \tag{5}$$

空間微分はスペクトル係数にimをかけ逆変換することにより求められる．

$$\frac{\partial h}{\partial \lambda} = \frac{1}{N}\Re\sum_{m=1}^{N} im h_m \exp\left(im\lambda_k\right) \tag{6}$$

式(4), (5)の計算には実数高速フーリエ変換を用いる．

(3) RBF法

rは赤道を通る面の2次元デカルト座標系におけるj番目の節点から距離

$$r = \sqrt{2(1-\cos(\lambda - \lambda_j)} \tag{7}$$

とし，hを距離rのみに依存するRBF $\phi(r)$で展開する．

$$h(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} c_j\phi_j(r) \tag{8}$$

本研究では，ガウス型（GA）RBFを用いる．j番目の節点でのGA RBFは

$$\phi_j(r) = \exp\left[-(\varepsilon r)^2\right] \tag{9}$$

と表される．係数$\mathbf{c} = (c_1, c_2, \cdots, c_n)^T$は節点の上で与えられた$\mathbf{h} = (h_1, h_2, \cdots, h_n)^T$が内挿値と等しいとする選点条件を課し

$$\mathsf{A}\mathbf{c} = \mathbf{h} \tag{10}$$

を解くことにより得られる．全ての節点から他の節点までの距離すなわちi番目とj番目との間の距離r_{ij}は行列で表される．この距離行列に対するRBF（ここでは式(9)）を要素とする行列が内挿行列Aである．

(a) RBFオイラー移流スキーム

オイラー移流に必要な微分演算子を導出する．式(9)のGA RBFをrで微分すると

$$\frac{\mathrm{d}\phi_j(r)}{\mathrm{d}r} = -2\varepsilon^2 r\phi_j(r) \tag{11}$$

式(7)の距離をλで微分すると

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{1}{r}\sin\left(\lambda - \lambda_j\right) \tag{12}$$

となるので

$$\frac{\partial\phi(r)}{\partial\lambda} = \frac{\mathrm{d}\phi_j(r)}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda} = -2\varepsilon^2\left(\lambda - \lambda_j\right)\phi_j(r) \tag{13}$$

が得られる．式(12)に$-u$をかけ$\lambda = \lambda_i$とすると

$$\begin{aligned} -u\frac{\partial\phi(r)}{\partial\lambda} &= \sum_{j=1}^{n} c_j b_{ij} \\ b_{ij} &= 2u\varepsilon^2\left(\lambda_i - \lambda_j\right)\phi_j(r_{ij}) \end{aligned} \tag{14}$$

となる．式(14)を行列$\mathsf{B} = \left(b_{ij}\right)$を用いて表し式(8)を用いると

$$-u\frac{\partial\phi(r)}{\partial\lambda} = \mathsf{B}\mathbf{c} = \left(\mathsf{B}\mathsf{A}^{-1}\right)\mathbf{h} \tag{15}$$

内挿行列Aが対称であることを用いると，微分演算子 $\mathrm{D} = \mathrm{BA}^{-1}$ は線型システム

$$\mathrm{AD}^T = \mathrm{B}^T \tag{16}$$

を解くことにより得られる．RBF-Eでは

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = \mathrm{D}\mathbf{h} \tag{17}$$

を計算する．

(b) RBFセミ・ラグランジュ移流スキーム

一方RBF-Sでは，出発点 $\lambda_\mathrm{d} = \lambda_j - u\Delta t$ での内挿値を式(8)から求める．式(8)は係数$\mathbf{c}$が求まれば，任意のλにおける内挿値が得られることを示している．式(1)の節点位置は固定されており内挿行列Aは時間変化しない．式(10)で計算時刻毎に係数を求める必要があるが，時間積分開始前に予めA^{-1}を計算しておくことができる．

2.3 数値実験

余弦型の釣鐘様に分布したトレーサの初期値は

$$h(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{h_0}{2}\left[1 + \cos(\pi\rho/R)\right] & \rho < R \\ 0 & \rho \ge R \end{cases} \tag{18}$$

ここで$\rho = \lambda - \lambda_c \mod 2\pi$，$h_0, \lambda_c$はそれぞれ山の高さ，トレーサが最大となる経度である．ここでは$h_0 = 1000, \lambda_c = \pi, R = 1/3$である（Fig. 1，青）．

実験パラメタは次のとおりである．節点数$I = 128$，$u = 2\pi/12$ 日．，オイラー移流スキーム（RBF-S以外）の時間刻み幅は$\Delta t = 1800$秒（Courant数0.22），RBF-Sは16倍の$\Delta t = 28800$（Courant数3.55）とした．RBFの形状パラメタはRBF-EとRBF-Sの両方で$\varepsilon = 0.33/\Delta\lambda$ $\Delta\lambda = 2\pi/I$を用いた．

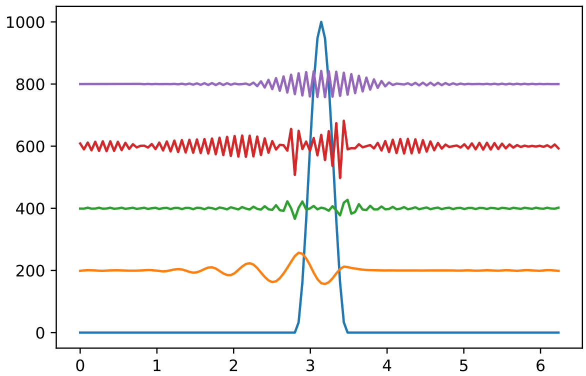

Fig. 1 Initial distribution of the cosine bell (blue) and the error after one revolution for the centred finite difference (×0.1＋200, yellow), spectral transform (×100＋400, green), RBF-E (×100＋600, red), and RBF-S (×100＋800, purple) advection schemes.

一周（12日）後の誤差を比較すると，中央差分[Fig. 1黄]の誤差は他の手法に比べて3桁ほど大きく，余弦型の釣鐘の上流に分布している．スペクトル法[Fig. 1緑]の誤差は最も小さいが，不連続においてGibbsの現象が生じている．RBF-Eは[Fig. 1赤]の誤差はスペクトル法よりもやや大きく，同様にGibbsの現象が見られるが，球面上や局所細密化で有利となる節点配置の柔軟性を考慮すれば，十分な精度であると考えられる．RBF-Sの誤差はλ_cを中心として余弦型の釣鐘の2倍程度の幅に集中しており，λ_cから離れたところでは極めて小さい．セミ・ラグランジュ法ではオイラー法よりも少ない計算回数で時間積分できることも有利な点である．この例は単純な1次元の幾何形状と一定の流速を用いているため，上流点探索のコストは無視できるが，現実的な問題ではこれを考慮する必要がある．

3. 球面上の移流モデル

前節で示した1次元のRBF-EとRBF-Sを球面上に拡張し，余弦型の釣鐘の移流実験により検証する．支配方程式は

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{u}{a\cos\theta}\frac{\partial h}{\partial \lambda} + \frac{v}{a}\frac{\partial h}{\partial \theta} = 0 \tag{19}$$

である．ここでaは惑星半径θは緯度である．

3.1 球面螺旋

球面螺旋節点は北極と南極とを1本の螺旋で結び，螺旋上の節点間隔と隣り合う螺旋の間隔を等しくとることにより，準一様な節点配置を生成する手法である（Bauer 2000）．

球面螺旋上で経度λと余緯度$\theta_\mathrm{co} = \pi/2 - \theta$は次の関係がある．

$$\lambda = m\theta_\mathrm{co} \mod 2\pi \tag{20}$$

N個の節点は

$$\begin{aligned} m &= \sqrt{N\pi} \\ z_k &= \cos(\theta_k) = 1 - \frac{2k-1}{n} \quad k = 1,2,\cdots,N \end{aligned} \tag{21}$$

で生成される．

3.2 オイラー移流

球面上におけるj番目の節点からのデカルト距離は

$$\begin{aligned} r = \big[2\big\{&1 - \cos\theta\cos\theta_j\cos(\lambda - \lambda_j) \\ &- \sin\theta\sin\theta_j\big\}\big]^{1/2} \end{aligned} \tag{22}$$

なので，その微分は

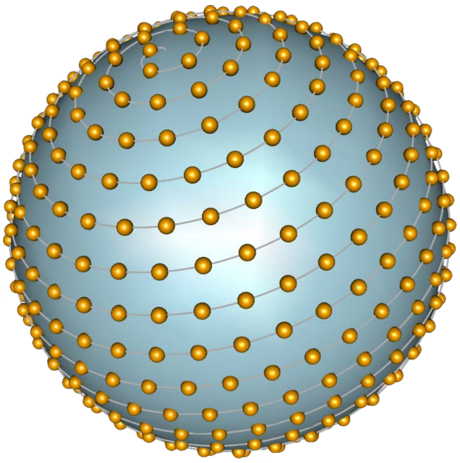

Fig. 2 Distribution of $N=512$spherical helix nodes on the sphere.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial \lambda} &= \frac{1}{r}\cos\theta\cos\theta_j\sin(\lambda-\lambda_j)\\
\frac{\partial r}{\partial \theta} &= \frac{1}{r}\Big[\sin\theta\cos\theta_j\cos(\lambda-\lambda_j)\\
&\qquad -\cos\theta\sin\theta_j\Big]
\end{aligned}
\tag{23}
$$

となる．RBFの勾配は

$$
\begin{aligned}
\nabla\phi_j(r) = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\phi_j}{\mathrm{d}r}\Big[&\cos\theta_j\sin(\lambda_i-\lambda_j)\mathbf{e}_\lambda +\\
&\{\cos\theta_j\sin\theta_i\cos(\lambda_i-\lambda_j)-\sin\theta_j\cos\theta_i\}\mathbf{e}_\theta\Big]
\end{aligned}
\tag{24}
$$

と書ける．微分演算子は

$$
-\mathbf{u}\cdot\nabla_j h = \mathsf{D}\mathbf{h} \tag{25}
$$

ここで$\mathsf{D}=\mathsf{B}\mathsf{A}^{-1}$で，$\mathsf{B}$の要素は

$$
\begin{aligned}
b_{ij} = 2\varepsilon^2\Big[&u\cos\theta_j\sin(\lambda_i-\lambda_j)\\
&+v\{\cos\theta_j\sin\theta_i\cos(\lambda_i\lambda_j)\\
&-\sin\theta_j\cos\theta_i\}\Big]\phi(r_{ij})
\end{aligned}
\tag{26}
$$

となる．

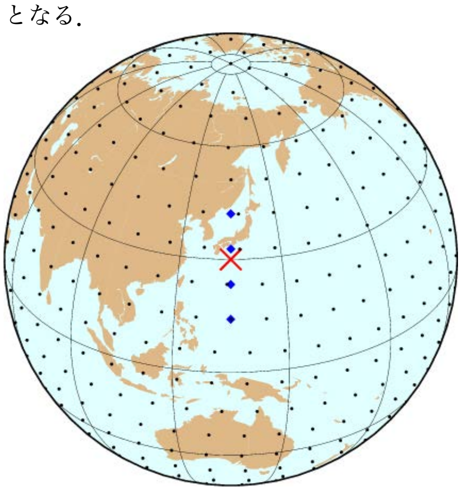

Fig. 3 Interpolation along the helix and a meridian

3.3 セミ・ラグランジュ移流

第2.2節(b)で述べた1次元の場合と同様，セミ・ラグランジュ移流では微分演算子は不要で，上流点探索で得られた出発点での値を内挿する．

(a) RBF内挿

内挿には1次元同様に式(8)を用いる．次元が高くなっても解法が複雑になりにくいのがRBFの特徴の一つである．流速はベクトルなので，緯度経度座標では極での特異性があるため，デカルト座標に変換するRitchie (1987)の上流点探索法を用いる．

(b) 球面螺旋に沿った内挿

螺旋の幾何形状を生かして次の手順で上流点$\mathbf{x}$（×）における内挿を行う（Fig. 3）．

1. 螺旋と子午線の交点を$\mathbf{p}_i$（◆）とする．
2. $h(\mathbf{p}_i)$を螺旋に沿った1次元内挿で求める．
3. $h(\mathbf{x})$を$h(\mathbf{p}_i)$から子午線に沿った1次元内挿で求める．

内挿には3次スプライン（CBC）と単調区分3次（Fritsch and Carlson, 1980)を用いた．

3.4 数値実験

回転軸をα傾けた剛体回転流

$$
\begin{aligned}
u &= u_0(\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\cos\lambda\sin\alpha)\\
v &= -u_0\sin\lambda\sin\alpha
\end{aligned}
\tag{27}
$$

を用いる．初期条件は式(18)と同じである．ただし，$\rho = a\sin^{-1}\left[\sin\theta_c\sin\theta+\cos\theta_c\cos\theta\cos(\lambda-\lambda_c)\right]$である (Fig. 4)．

ここでは$u_0=2\pi a/12$日，$R=a/3, \alpha=\pi/2$とし，地球半径$a=6.37122\times10^6$ mを用いた．

RBF-Eの時間刻み幅は$\Delta t=30$分，セミ・ラグランジュ移流（RBF-S，CBC，PCH）$\Delta t=90$分，RBF-E，RBF-SともGA RBFを用い，形状パラメタそれぞれ$\varepsilon=10$，$\varepsilon\approx8$である．節点数は$N=4096$である．CBCとPCHについては，螺旋と子午線との交点の数は8である．

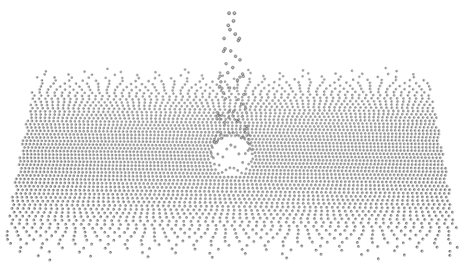

Fig. 4 Three-dimensional visualization of the initial cosine hill. The height is scaled by 0.1.

Table 1. Error after one solid body revolution for RBF Eulerian (RBF-E) and semi-Lagragian models using RBF (RBF-S), cubic spline (CBC), and monotonic piecewise cubic (PCH) interpolation

model	ℓ_2	ℓ_∞
RBF-E	7.98E-03	3.88E-03
RBF-S	3.91E-03	3.07E-03
CBC	4.98E-02	3.50E-02
PCH	3.70E-01	4.43E-01

初期値に対する1周後の値の相対誤差をTable 1に示す．RBF-EとRBF-SはCBCに対して1桁，PCHに対して2桁程度誤差が小さい．RBF-Sは時間刻み幅をRBF-Eよりも3倍大きく取っているにも関わらず，誤差は同程度以下である．多重二乗（multiquadric，MQ）RBFも試してみたが，GA RBFの方が精度がやや良かった．RBFの種類により形状パラメタに対する感度が異なるので，形状パラメタを調整することにより誤差は変化する可能性がある．

CBCは交点が4だと誤差は数倍になる．PCHは交点4でもほとんど差はない．子午線に沿った内挿においては，CBCは交点が増えたことを生かせるが，PCHは区分的であるため精度は向上しない．

1周後の値から初期値を引いた分布をFig. 5に，3次元可視化したものをFig. 6に，ℓ_2の時間発展（CBCは0.1倍，PCHでは0.01倍）をFig. 7に示す．Table 1に示されているRBF-EとRBF-Sと誤差は同程度であるが，Fig. 5a, bの空間分布を比較すると，RBF-Eは小さいながら全球に誤差が広がっていることが分かる．RBF-EとRBF-Sの誤差の分布は，1次元の場合（Fig. 1）の赤と紫の線と同様である．CBCとPCHはトレーサの近傍で誤差が大きいが，離れたところではRBF-Eよりも小さい．

4. まとめと議論

RBFによる内挿を用いたセミ・ラグランジュ移流モデルを構築した．数値解法の特徴を簡潔に記述し，特性の理解に資するため，幾何形状が単純な1次元周期境界条件で，差分法やスペクトル法，RBF微分演算子を用いたオイラー移流スキームと余弦型のトレーサを1周させる実験で比較・検証した．RBFを用いたオイラー，セミ・ラグランジュ移流とも，差分法より精度は格段に向上し，スペクトル法に準ずることが示された．オイラー移流では誤差は全領域に広がっているのに対し，セミ・ラグランジュ移流を用いた場合は余弦型の釣鐘から離れたところでの誤差は小さい（Fig. 1）．

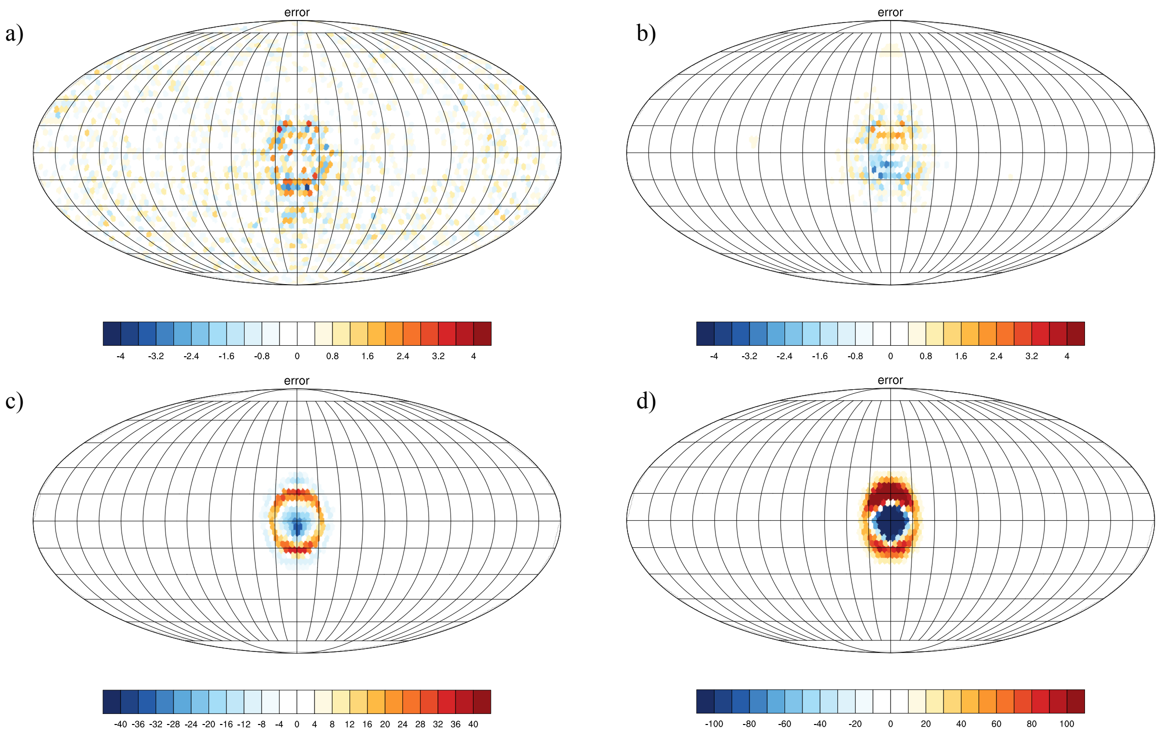

Fig. 5 Distribution of the error in terms of the difference from the initial condition after one revolution for a) RBF Eulerian model (RBF-E) and semi-Lagrangian models using b) RBF (RBF-S), cubic spline (CBC), and monotonic piecewise cubic (PCH) interpolation.

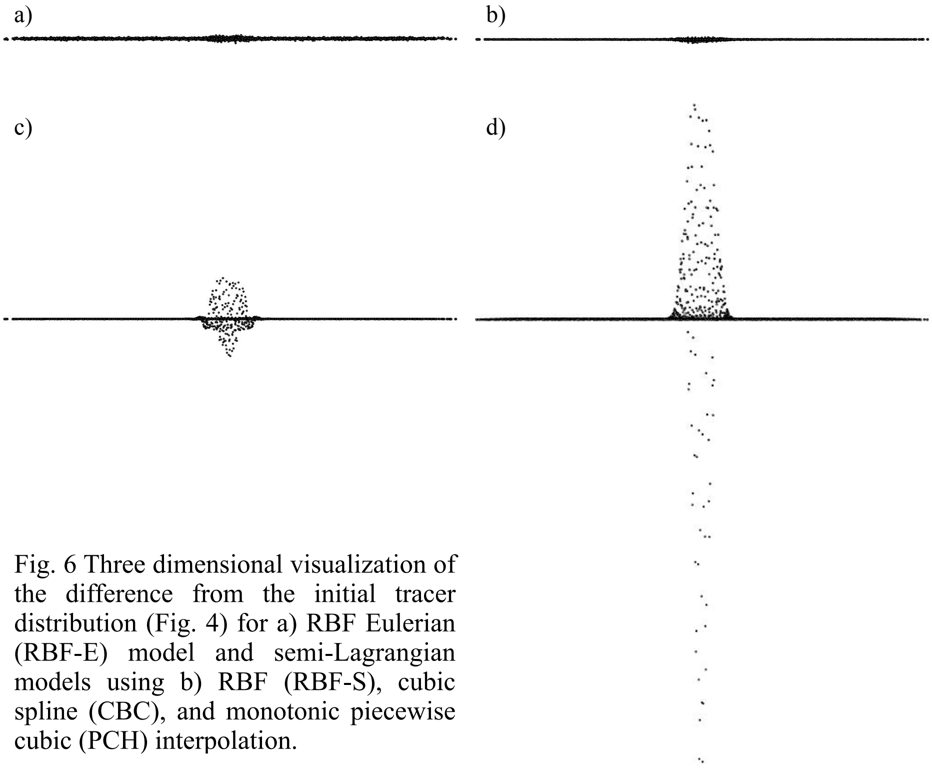

Fig. 6 Three dimensional visualization of the difference from the initial tracer distribution (Fig. 4) for a) RBF Eulerian (RBF-E) model and semi-Lagrangian models using b) RBF (RBF-S), cubic spline (CBC), and monotonic piecewise cubic (PCH) interpolation.

次に移流モデルを球面上の2次元に拡張した．準一様節点は球面螺旋（Fig. 2）により生成した．オイラー移流スキームではRBFの経度と緯度の微分を考え，勾配を導出して微分演算子を構築する．セミ・ラグランジュ移流の場合は出発点を探索する必要がある．RBFを用いた場合，オイラー移流でも，セミ・ラグランジュ移流でも，解法は1次元の場合と同じである．セミ・ラグランジュ移流では，球面螺旋と子午線に沿った内挿スキーム（Fig. 3）を考案し，余弦型の釣鐘（Fig. 4）を流す実験で併せて検証した．

RBFを用いたスキームは，球面上でも1次元の場合と同様に3次スプラインや単調区分3次スキームよりも精度の高い結果が得られた（Fig. 5，6）．オイラー移流の場合は，振幅は小さいものの波紋状のノイズが見られた．

GA RBFは節点から離れたところで値が小さくなる．例えば，$N = 4096$で節点間隔に逆比例する形状パラメタを用いた場合，10^{-15}より小さい要素は約97.4%を占めており，疎行列に対する計算手法を適用できる可能性がある．節点数$N = 576$，1024，1600，2304, 3136, 4096, 5184, 6400, 7744, 9216の$N \times N$行列について，密行列に対する直接解法と疎行列に対する反復解法の実行時間を比較した（Fig. 8）．GA RBFに基づく内挿行列は正定値対称行列なので，疎行列に対する反復解法として共役勾配法を用いた．

密行列に対する直接解法にはLAPACK (Linear Algebra PACKage, Anderson et al. 1999)のDGEMSV及びScaLAPACK (Scalable LAPACK, Blackford et al. 1997)のPDGEMSVを用いた．プログラム疎行列に対する反復解法にはLis (Library for Iterative Solvers for linear systems, Nishida et al .2010) を用いた．LAPACK自体は並列化されていないが，macosでvecLibとして提供され

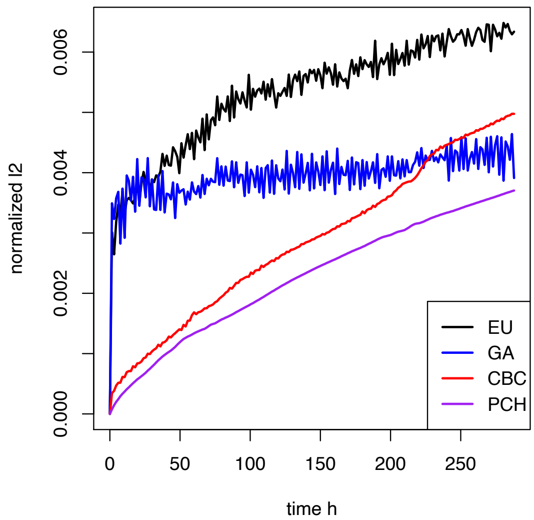

Fig. 7 Time evolution of normalized ℓ_2 error for RBF Eulerian (RBF-E, black) and semi-Lagrangian models using RBF (RBF-S, blue), cubic spline (CBC, red), and monotone piecewise Hermite (PCH, purple) interpolation. Note that the error for CBC and PCH is scaled by 0.1 and 0.11, respectively.

ているBLASは共有メモリ並列化されているため，スレッド数1と4とで比較した．ScaLAPACKとLisはMPI (Message Passing Interface) で並列化し，プロセス数1と4を比較した．LAPACKはDGEMSVの実行時間（wall-clock time）をomp_get_wtime()で計測した．ScaLAPACKはPDGEMSVの実行時間をcpu_time()で計測し，すべてのプロセスの最大値を用いた．Lisはlis_solver_get_time()が返すソルバの実行時間を用いた．各節点数に対して10回実行し，平均値を求めた．

節点数が少ないと共有メモリ並列（青）がMPI並列（青及び赤）に対して有利であるが，節点数が増加すると4プロセスのScaLAPCK（青破線）は4スレッドのLAPACK（黒破線）に漸近する．節点数1000を超えると疎行列の方が圧倒的に高速で，プロセスの増加に対応したスケーラビリティも良さそうである．このような特性を生かして，RBFを用いた力学コアの並列化や高速化ができないか検討していきたい．

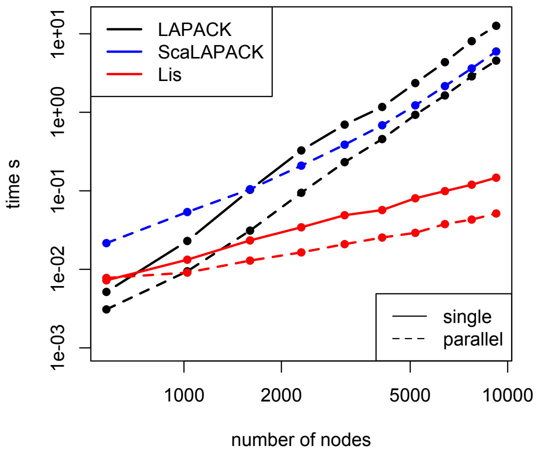

Fig. 8 Wall-clock time (average of 10 measurements) for solving linear systems with LAPACK (black), ScaLAPACK (blue), and Lis (red) using a single (sold) and four (broken) cores measured on MacBook Pro (15-inch 2016) with 2.9GHz quad-core Intel Core i7.

謝辞

本研究はJPSP科研費JP15K13417及び文部科学省ポスト「京」萌芽的課題3「太陽系外惑星（第二の地球）の誕生と太陽系内惑星環境変動の解明」の助成を受けた．

参考文献

Anderson, E., Bai, Z., Bischof, C. Blackford, S. Demmel, J. Dongarra, J. Du Coroz, J. Greenbaum, A. Hammerling, S. McKenney, A. and Sorensen, D. (1999): LAPACK Users' Guide Third Edition, Society for Industrial and Applied Mathematics, pp. 429.

Bauer, R. (2000): Distribution of points on a sphere with application of star catalogs, Jour. of Guid. Control Dyn., Vol. 23, No. 1, 130–137.

Blackford, L. S., Choi J., Cleary, A. D'Azevedo, E., Demmel, J. Dhillon, I. Dongarra, J. Hammaling, S. Henry, G., Petitet, A. Stanley, K., Walker, D., and Wahley, R. C. (1997): ScaLAPACK, Users' Guide, Society for Industrial and Applied Mathematics, pp. 429, pp. 319.

Flyer, N. and Wright, G. B. (2007): Transport schemes on a sphere using radial basis functions, Jour. of Compt. Phys., Vol. 226, No. 1, pp. 1059–1084.

Fritsch, F. N. and Carlson, R. E. (1980): Monotone piecewise cubic interpolation, Vol. 17, No. 2., pp, 238–246.

Nishida A. (2010): Experience in developing and open source scalable software infrastructure in Japan. Computational Science and Its Applications–ICCSA 2010. Lecture Notes in Computer Science, No. 6017, Springer, pp. 87–98.

Ritchie, H. (1987): Semi-Lagrangian advection on a Gaussian grid, Vol. 115, No. 2, pp. 606–619.

Staniforth, A. and J. Côté (1991): Semi-Lagrangian integration schemes for atmospheric models—a review, Vol. 119, No. 9, pp. 2206–2223.

Williamson, D. L., Drake, J. B., Hack, J. J. Jakob, R. and Swarztrauber, P. N. (1992): A standard test set for numerical approximations to the shallow water equations in spherical geometry, Jour. of Comput. Phys., Vol. 102, No. 1, pp. 211–224.

（論文受理日：2020年8月31日）