

## 局所細密化節点による低気圧を模した渦の再現性

## Reproducibility of Vortex Roll-up using Locally Refined Nodes

小笠原 宏司<sup>(1)</sup>・榎本 剛Koji OGASAWARA<sup>(1)</sup> and Takeshi ENOMOTO

(1) 京都大学 理学研究科

(1) Graduate School of Science, Kyoto University, Japan

## Synopsis

Accuracy of advection on the sphere with refined nodes was investigated in a test case with a known exact solution, in which two vortices at the North and South poles roll-up. Flyer and Lehto (2010) investigated the accuracy with refined nodes and showed that the node refinement improves accuracy in the test case. They made refined nodes from minimum energy (ME) nodes using electrostatic repulsion, but this algorithm may not be useful because generation of refined nodes can be slow and inaccurate. Thus, we adopt an alternative node refinement algorithm, the Schmidt transformation of quasi-uniform nodes. We obtained more accurate results with refined nodes than those with quasi-uniform nodes. To achieve normalized root mean square error ( $\ell_2$ ) of about  $1.0 \times 10^{-5}$ , 4096 node are needed in the quasi-uniform case compared to 1849 nodes with refined nodes.

**キーワード** : 動径基底関数, 移流モデル, 局所的細密化

**Keywords** : radial basis function, advection model, local node refinement

## 1. はじめに

Flyer and Wright(2007) [1] は, Radial basis functions (RBF) を用いた双曲線型偏微分方程式の解法を用いて, 全球規模の移流項の計算をスペクトル精度 (節点数の増加に伴い誤差が指数関数的に収束する) で計算することが可能であり, テストケースを用いた数値実験により気象モデルで使われているスペクトル法を用いるよりも高精度に計算できることを示した. さらにこの研究を発展させた内容として先行研究 [2] がある. この研究は局所的に変化が激しい領域がある場合には節点に局所的細密化を施すことによりさらに精度を向上させることが可能であることを示している. しかし, この先行研究 [2] で用いられている局所的細密化の手法は反復法を用いており, 現行の気象モデルで用いられている万を超える節点数への適用には不向きである. よって本研究の目的は気象モデルにおいても使いやすい決定論的な局所的細密化の手法 (一度の計算で局所的細密化を施せる手法) を用いて高精度な計算が可能な RBF を用いた移流項の計算手法を開発することである.

本論文の構成は次のとおりである. 第 2 節で RBF, 第 3 節で局所的細密化について紹介する. 第 4 節で実験設定を記述し, 第 5 節に実験結果を示す. 第 6 節ではまと

めと議論を行う.

## 2. Radial Basis Functions (RBF)

RBF は「多次元において節点  $x_i$  と節点での値  $f(x_j)$  のみで適切に未知の曲面を表現できるのか」という質問から研究が始まった基底関数である. RBF は節点間距離のみに依存し, 直交性がないという特徴を持っている. Table. 1 に一般的によく使われる RBF を載せている. RBF は大きく分けて 2 つに分けられ有限回微分可能な RBF と無限回微分可能な RBF と呼ばれている. 前者は節点間距離が 0 の時に微分可能ではなくなってしまう特徴があり, 補間において誤差が代数的に収束する. 後者は補間の誤差が指数関数的に収束する特徴があり, 形状を決める任意パラメータ  $\varepsilon$  を持ち,  $\varepsilon$  を大きくしていくほど尖った形になる (Fig. 1).

Table 1 Commonly used RBFs.

Radial Cubic	$r^3$
Thin Plate Spine	$r^2 \log r $
Gaussian	$e^{-\varepsilon^2 r^2}$
Inverse Multi Quadric	$\frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 r^2}}$

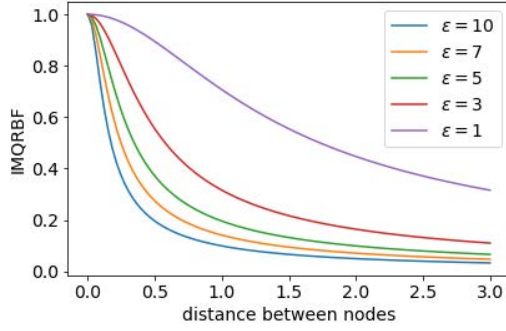


Fig.1 Shapes of IMQ RBF for various  $\epsilon$ . The vertical and horizontal axes represent the value of RBF and distance between nodes, respectively.

## 2.1 RBF を用いた内挿

RBF を用いた内挿は距離のみを用いることから格子を必要としない特徴がある。これは座標系の軸に沿った展開をしないことを意味する。この特徴から高次元化しても近似が複雑にならない利点がある。

RBF を用いた内挿ではまず節点の位置 $x$ と既知の値である節点ごとの値 $f(x)$ を用いて関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \sum_i^N \lambda_i \phi(\|x - x_i\|) \quad (1)$$

で展開する。係数の決定は節点ごとの係数を節点ごとに関数と値が一致するという条件で決定する。これは線形システムを解くことと同等である。次に係数 $\lambda_j$ と内挿したい場所の節点 $x_j$ との距離から $\phi(\|x_i - x_j\|)$ を計算し、それらの積を用いて節点 $x_j$ の値 $f(x_j)$ を内挿すると

$$f(x_j) = \sum_i^N \lambda_i \phi(\|x_i - x_j\|) \quad (2)$$

である。

## 2.2 RBF を用いた移流項の計算

今回は研究で用いる球面上の移流スキーム[2]を紹介する。座標は球座標を用いる。移流項の近似は内挿と同様に関数を節点間距離と係数の積の線形結合によって展開する。よってスカラー $h$ の移流項は

$$U \cdot \nabla h = \sum_i^N \lambda_i [(U \cdot \nabla) \phi(\|x - x_i\|)] \quad (3)$$

により近似される。

$A = \phi(\|x_i - x_j\|)$ ,  $B = \sum_i^N [(U \cdot \nabla) \phi(\|x - x_i\|)]$  とすると実際に計算するのは

$$U \cdot \nabla h = (BA^{-1})h = D_N h \quad (4)$$

であり $D_N$ を求める。逆行列 $A^{-1}$ を計算するより線形システムを解くほうが高い精度を得ることができるので、 $D_N$ は

$$D_N A = B \quad (5)$$

の転置を取り

$$A^T D_N^T = B^T \quad (6)$$

とし、式(6)を計算し、 $D_N^T$ の転置を取ることで計算する。一様の場合 $A$ は対称なので $A^T = A$ であるが、計算領域全体で $\epsilon$ が同じ値を取らない場合は対称行列にならない。

## 3 局所的細密化

局所的細密化節点を用いた移流項の計算手法は局所的に変化の激しい領域が存在する場合に準一様な節点を用いた場合よりも高精度に計算できることが報告されている[2]。

### 3.1 Schmidt 変換

本研究で用いた局所細密化手法 Schmidt 変換 (Fig.2) [3]を紹介する。Schmidt 変換は等角変換であり、節点の直線がなす角度が変換後も変わらない特徴があるあり、緯度 $\theta$ だけを変換し、経度は変換しない変換である。変換後の緯度を $\theta'$ とすると変換後の緯度は

$$\theta' = \arcsin \left( \frac{(1-c^2) + (1+c^2) \sin(\theta)}{(1+c^2) + (1-c^2) \sin(\theta)} \right) \quad (7)$$

である。 $c$ は点の集め方を決める定数であり、 $0 < c < 1$ で集めたい地点が疎になり、 $1 < c$ で注目している地点に集まる。

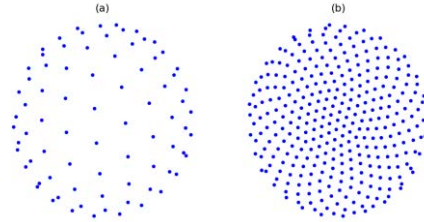


Fig.2 Distribution of nodes near the (a) South and (b) North poles after Schmidt transformation for 400 nodes.

### 3.2 テストケースに合わせた局所的細密化

両極にある静止した渦の巻き上げ実験 (第 4.1 節参照) は両極に渦ができるので片方の極に細密化させる Schmidt 変換をそのまま用いることは精度の向上につながらない。よって両極に細密化するように任意パラメーター $c$ に緯度依存性を持たせた。緯度依存性を持たせた任意パラメーターを $c'$ とすると

$$c' = c_0 \sin \left( \frac{\pi \mu}{2} \right) \quad (8)$$

$\mu = \sin(\theta)$ ,  $c_0$ : 倍率因子

これにより両極に細密化を施すことができる (Fig. 4)。

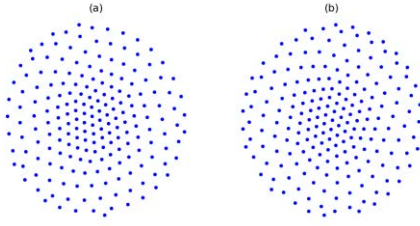


Fig.3 Refined nodes sets near the (a)South and (b) North poles after revised Schmidt transformation for 400 nodes.

#### 4 実験設定

本研究では開発した移流モデルの精度評価のためのテストケースとして渦の巻き上げ実験 (Fig. 3) を行った。このテストケースは全球規模の移流を扱ったテストケースで経度方向にしか移流が生じない。このテストケースには既知解があり  $t=3$  における誤差を評価する。誤差の評価は準一様な節点と開発した移流モデルの誤差比較を行った。細密化前の節点と準一様な節点は Minimum Energy (ME) 節点を用いた。節点数は 900, 1296, 1849, 2500, 3136, 4096 の 6 つの節点。タイムステップは CFL 条件を満たすおおよそ最大値を用いている。RBF の形状を決めるパラメータ  $\varepsilon$  は準一様な節点を使う場合は 3, 局所的細密化節点における変動する  $\varepsilon$  (3.3 章を参照) は最小値がおおよそ 2.5 になるように  $\varepsilon_0 = 3.6$  と設定している。

##### 4.1 渦の巻き上げ実験

緯度を  $\theta$  としたときに角速度  $\omega(\theta)$  を

$$\omega(\theta) = \frac{3\sqrt{3}}{2\rho(\theta)}(\rho(\theta)) \quad (9)$$

$$\rho(\theta) = \rho_0 \cos(\theta)$$

$\rho_0$ : 渦の大きさを決める任意定数

としたときに風速  $u$  を

$$u = \omega(\theta) \quad (10)$$

とする。実験で解く方程式は

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -u \cdot \nabla h \quad (11)$$

である。

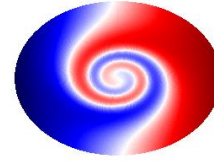


Fig.4 Vortex in the Arctic region at  $t=3$ .

##### 4.2 領域ごとの形状パラメータの決定法

RBF を用いた移流項の計算法では領域ごとに解像度が異なる場合は解像度に合わせて RBF の形状を変化させなければ波の分散が起こる。そこで度依存性を形状パラメータに持たせた (Fig. 5)。解像度が高いほど  $\varepsilon$  が大きく、解像度が低いほど  $\varepsilon$  が小さくなるようになる。マップファクター (拡大率)  $F$  を

$$F = \frac{4c'^2 + 4c'(\mu^2 - 1)\frac{dc'}{d\theta}}{1 + c'^2 + \mu(1 - c'^2)} \quad (12)$$

としたときに変動する  $\varepsilon$  を

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{F}} \quad (13)$$

$\varepsilon_0$ : 任意定数  
とした。

局所的細密化と領域ごとに変動する  $\varepsilon$  を組み合わせると条件数を改善できることが先行研究 [2] で報告されている。そこで本研究においても準一様な節点と開発した手法を用いた場合の内挿行列 A の比較を行った。 $c_0 = 0.5, \varepsilon_0 = 4.8$  としたとき準一様な節点との条件数の比較を Fig. 5 に示した。このとき局所的細密化節点を用いた手法の  $\varepsilon$  の最小値はおおよそ 3.3 となり準一様な節点を用いた場合の  $\varepsilon$  とほぼ同じ値になっている。

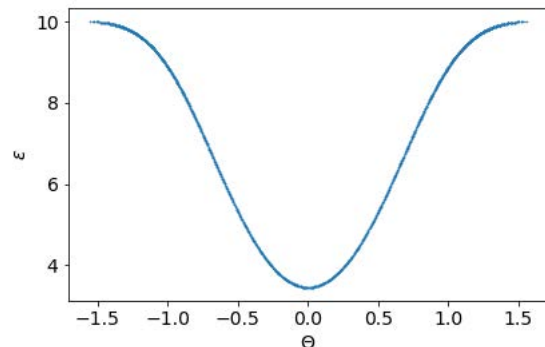


Fig.5 Variation of  $\varepsilon$  as a function of latitude. Vertical and horizontal axis represents  $\varepsilon$  and latitude(rad), respectively.  $\varepsilon_0 = 5, c_0 = 0.5$ .

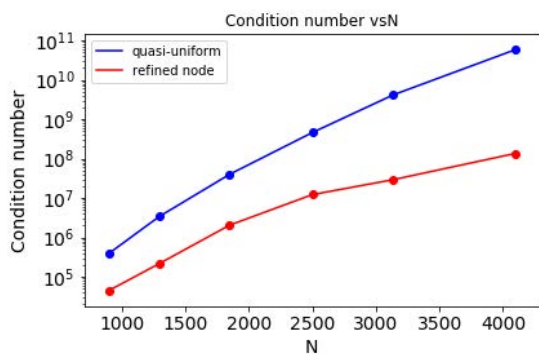


Fig.6 Comparison of condition number of the RBF interpolation matrix A as a function of the total number of nodes N. Blue and red line represents quasi uniform's condition number and refined node's condition number, respectively. Vertical axis is condition number, horizontal axis is number of nodes N.  $\epsilon_0 = 4.8, c = 0.5$ .

## 5 実験結果

準一様な節点との誤差比較を Fig.4 に示した。Fig.4 は  $\epsilon_0 = 3.5, c_0 = 0.5$  で固定して計算させている。RBF を用いた移流項の計算の特徴である節点数の増加に伴い指数関数的に誤差が収束する性質が開発した手法でも見られている。すべての節点数において準一様な節点を用いた場合よりも精度が向上している。  $1 \times 10^{-5}$  のオーダーの精度を得ようとしたときに準一様な節点の場合は 4096 点必要となり、局所的細密化節点の場合には 1296 点の節点が必要である。

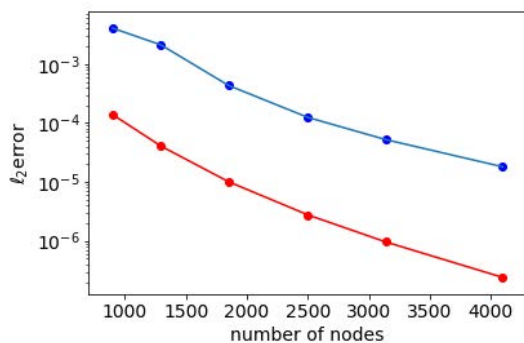


Fig.7 Comparison of  $\ell_2$  error convergence as a function of the total number of nodes. Vertical and horizontal axis represents normalized  $\ell_2$  error and number of nodes.  $c_0 = 0.5, \epsilon_0 = 3.5$ .

## 6 まとめと議論

本論文では決定論的な局所的細密化の手法である Schmidt 変換と Schmidt 変換に合わせた  $\epsilon$  の決定法を組み合わせた移流モデルを開発した。  $\epsilon$  の決定法にはマップファクターを用いることで節点が密な箇所では  $\epsilon$  が大きくなり、逆に疎の箇所では小さくなるように決定できた。開発したモデルの精度を検証するために「両極にある静止した渦の巻き上げ実験」をテストケースとして用いた数値実験を行った。今回の設定では

数値計算の結果は準一様な節点よりも開発した移流モデルのほうが全ての節点数において高精度であった。

本研究ではテストケースにおいて高精度な結果となったが最大で 4096 点での結果である。目的である気象モデルでの運用を考える場合には万を超える節点数を扱うことになるため、節点数の増加に伴い線形システムを解くことが困難になる場合が想定され、今回のように安定して解けるかどうかは定かではない。よって今後の研究では万を超える節点で研究を進めたいと考えている。また今回は ME 節点を用いたが今後の研究では決定論的に求まる節点を用いていきたい。

## 参考文献

- [1] Flyer, N. and Wright, G. B. (2007): Transport schemes on a sphere using radial basis functions, *Jour. Of Comput. Phys.* Vol. 226, No.1, pp.1059–1084.
- [2] Flyer, N. and Lehto, E. (2010): Rotational transport on a sphere: Local node refinement with radial basis functions, *Jour. of Comput. Phys.* Vol. 229, No.6, pp. 1954–1969.
- [3] Schimdt, F. (1977): Variable Fine Mesh in Spectral Global Models, *Beitr. Phys. Atmos.*, Vol50, No1-2, pp. 211–217.

(論文受理日： 2020 年 8 月 31 日)