Quasi-F-splitting and two dimensional singularities

呼子　笛太郎 (名古屋大学)

1　序文

本稿は F-特異点と呼ばれる正標数の特異点に関する報告である．F-特異点とは Frobenius 写像を用いて定義される，特異点 (局所環) の総称である．これらは，その正標数特有の定義にもかかわらず，標数 0 の極小モデル理論に現れる特異点と密接な関係を持つ．F-特異点の重要なクラスのひとつに，F-pure(もしくは F-split) と呼ばれるものがある．これは lc 特異点に対応するものであり，RDP(ここでは 2 次元の有理二重点の意味) は標数が $p > 5$ ならば F-split であることが知られている．

本稿では，$p \leq 5$ のとき RDP は quasi-F-split となることを報告する．正確には定理 4.1 とその後の注意参照いただきたい．Quasi-F-split スキームとは [Y1] において導入された F-split を拡張する概念であり，その動機付けは正標数のカラビヤウ多様体に対する Artin-Mazur height と呼ばれる，大域的な多様体の，幾分，数論的な不変量に由来する．

Artin-Mazur height とは，正標数の楕円曲線が ordinary と supersingular の二つに大別されることの一つの拡張になっている．ほとんどの楕円曲線は ordinary であり，標数 $p > 0$ を固定したとき supersingular 楕円曲線の同型類は有限個であることが知られている．この二つは数論的な違いを持っている．例えば，古典的な虚数乗法論によると，虚二次体 K に虚数乗法を持つ，ある代数体上の楕円曲線が素数 p の上で supersingular 還元を持つかどうかは，p の K における分解の様子で決定される．

以下 k を標数 $p > 0$ の代数的閉体とする．X を k 上の n 次元カラビヤウ多様体とし，そのクリスタリンコホモロジーの Hodge-Witt 分解

$$H^n_{\mathrm{cris}}(X/K) \simeq \bigoplus_{i+j=n} H^i(X, W\Omega^j_X) \otimes_{W(k)} K$$

を考える．ただし $W(k)$ は k の Witt 環で K はその商体である．この分解は複素多様体の de Rham コホモロジーに対する Hodge 分解の正標数類似であると言える．この分解の $(i,j) = (n,0)$ 部分 $H^n(X, W\mathcal{O}_X)$ は歴史的に古くから研究されており，特に X の Artin-Mazur height $\mathrm{ht}(X)$ が

$$\mathrm{ht}(X) = \begin{cases} \dim_K H^n(X, W\mathcal{O}_X) \otimes_W K & \text{if } H^n(X, W\mathcal{O}_X) \otimes_W K \text{ is not zero,} \\ \infty & \text{if } H^n(X, W\mathcal{O}_X) \otimes_W K \text{ is zero.} \end{cases}$$

によって定義される．Ordinary 楕円曲線の Artin-Mazur height は 1 であり，supersingular 楕円曲線のそれは 2 である．また K3 曲面の Artin-Mazur height は $\{1, 2, 3, \ldots, 10\} \cup \{\infty\}$ に値をとり，特に 1 のとき ordinary，∞ のとき (Artin の意味で)supersingular と呼ばれる．K3 曲面に対する Tate 予想によると，supersingular K3 曲面の Picard rank は 22 であるが，height 有限の K3 曲面 (そして標数 0 の K3 曲面) のそれは 20 以下である．また Liedtke [L] によると，$p \geq 5$ のとき supersingular K3 曲面は unirational である．逆が成り立つことはすぐわかり，また標数 0 の K3 曲面は uniriational とならないことは注目に値する．さらに正標数の 3 次元のカラビヤウ多様体に目を向けると，標数 0 に持ち上げ不可能なものが知られているが，これまでに知られている持ち上げ不可能なカラビヤウ多様体の Artin-Mazur height はすべて無限大である．この現象は，Bogomolov-Tian-Todorov の定理により，標数 0 のカラビヤウ多様体の変形空間が滑らかであることと対照的である．このように Artin-Mazur height が無限であるか有限であるかによって，その幾何学的性質に大きな違いがあることが観察できる．

Quasi-F-split の研究は，カラビヤウ多様体に対して

$$\text{F-split} = \text{Artin-Mazur height が } 1$$

となることに着目し，Artin-Mazur height が有限の多様体も，なんらかの splitting の言葉で捉えようとする試みを出発点とするものであった．そして本研究は quasi-F-split が“ファノ側”においても興味深い情報を持っていることを示唆していると言える．

2　Quasi-F-split の定義と性質

まず F-split の定義から始める．

定義 2.1 ([MR])**.** X を $\mathbb{F}_p$ 上のスキーム，$F\colon X \to X$ を absolute Frobenius とする．X が *F-split* であるとは，Frobenius $F\colon \mathcal{O}_X \to F_*\mathcal{O}_X$ が $\mathcal{O}_X$-加群の射として分裂するときのことをいう．

次は簡単にわかる．

命題 2.2. *(1)* 射影空間は *F-split* である．

(2) 標準束 ω_X が自明である n-次元 *smooth projective* スキーム X が *F-split* であることと，$H^n(X, \mathcal{O}_X)$ への *Frobenius* 作用が全単射であることは同値である．

(3) 正則 *affine* スキームは *F-split* である．

この命題より，カラビヤウ多様体に対して F-split は oridnarity と密接に関係することがわかる．また (3) より affine スキームの F-split 性の研究は特異点の研究と関連することが示唆される．実際この観点は現在では F-特異点の理論として発達している [T].

次に F-split を Witt 環 (の層) を使って拡張することを考える．$\mathbb{F}_p$-スキーム X に対して，長さ m の Witt 環の層 $W_m\mathcal{O}_X$ を考える．これは集合の層としては構造層 $\mathcal{O}_X$ の m 個の直積になっているが，非自明な環構造を持つものである．これらは次の作用素を持つ：

$$\begin{aligned}
&F\colon W_m\mathcal{O}_X \to W_m\mathcal{O}_X \quad ; (f_0, \ldots, f_{m-1}) \mapsto (f_0^p, \ldots, f_{m-1}^p),\\
&V\colon W_m\mathcal{O}_X \to W_{m+1}\mathcal{O}_X \quad ; (f_0, \ldots, f_{m-1}) \mapsto (0, f_0, \ldots, f_{m-1}),\\
&R\colon W_{m+1}\mathcal{O}_X \to W_m\mathcal{O}_X \quad ; (f_0, \ldots, f_m) \mapsto (f_0, \ldots, f_{m-1}).\\
&[-]\colon \mathcal{O}_X \to W_m\mathcal{O}_X \quad ; f \mapsto (f, 0, \ldots, 0).
\end{aligned}$$

F と R は環準同型であり，V は加法的，$[-]$ は乗法的である．以下 $m \geq n$ のとき，常に $W_m\mathcal{O}_X$ は R^{n-m} により $W_n\mathcal{O}_X$-加群と見做すことにする．

以下は [Y1] において導入された：

定義 2.3. X を $\mathbb{F}_p$ 上のスキームとする．スキーム X の *quasi-F-split height* $\mathrm{ht}^{\mathrm{s}}(X)$ を，図式

$$\begin{tikzcd}
W_m\mathcal{O}_X \arrow[r, "F"] \arrow[d, "R^{m-1}"'] & F_*W_m\mathcal{O}_X \arrow[dl, "\phi"] \\
\mathcal{O}_X &
\end{tikzcd}$$

を可換とするような $W_m\mathcal{O}_X$-加群の準同型 $\phi\colon F_*W_m\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$ が存在する最小の正整数 m として定める．もし全ての $m \geq 1$ に対して，そのような ϕ が存在しないとき，$\mathrm{ht}^{\mathrm{s}}(X) = \infty$ と定める．さらに $\mathrm{ht}^{\mathrm{s}}(X) < \infty$ のとき，X は *quasi-F-split* であるという．

さて $W_1\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X$ であることを思い出すと，定義より，$\mathrm{ht}^{\mathrm{s}}(X) = 1$ であることと，X が F-split であることは同値である．

X を reduced$\mathbb{F}_p$-スキームとする．このとき正整数 m に対し，X 上の環の層 $\overline{W}_m\mathcal{O}_X$ を

$$\overline{W}_m\mathcal{O}_X := W_m\mathcal{O}_X/(p)$$

で定める．Witt 環における $FV = p$ という関係式より，これは次の $W_m\mathcal{O}_X$-加群の可換図式の一部となる:

$$\begin{CD} 0 @>>> W_m\mathcal{O}_X @>F>> F_*W_m\mathcal{O}_X @>>> B_m\Omega_X @>>> 0 \\ @. @V{R^{m-1}}VV @VVV @| \\ 0 @>>> \mathcal{O}_X @>F>> F_*\overline{W}_m\mathcal{O}_X @>>> B_m\Omega_X @>>> 0. \end{CD}$$

ただし $B_m\Omega_X$ は $F\colon W_m\mathcal{O}_X \to F_*W_m\mathcal{O}_X$ の cokernel として定義される．また下段の F は

$$F\colon \mathcal{O}_X \to \overline{W}_m\mathcal{O}_X; f \mapsto [f^p] \text{ modulo } p$$

で定まる環準同型である．定義より，

$$\mathrm{ht}^{\mathrm{s}}(X) = \min\{m > 0; \mathcal{O}_X \xrightarrow{F} F_*\overline{W}_m\mathcal{O}_X \text{が } \mathcal{O}_X\text{-加群として分裂する}\}$$

となることがわかる．

Quasi-F-split height が計算されている多様体の例をあげる．

定理 2.4 ([Y1], [Y2]). *(1) k 上のカラビヤウ多様体に対して，quasi-F-split height と Artin-Mazur height は一致する．*

(2) 標数 $p > 2$，X を k 上のエンリケス曲面，$\tilde{X}$ を X の K3 被覆とするとき，$\mathrm{ht}^{\mathrm{s}}(X)$ と $\mathrm{ht}^{\mathrm{s}}(\tilde{X})$ は一致する．

(3) 標数 $p = 2$, X を k 上のエンリケス曲面とするとき，

$$\mathrm{ht}^{\mathrm{s}}(X) = \begin{cases} \infty & \textit{if } X \textit{ is classical}, \\ 1 & \textit{if } X \textit{ is singular}, \\ \infty & \textit{if } X \textit{ is supersingular}. \end{cases}$$

ここで k 上のカラビヤウ多様体とは，k 上の connected smooth proper スキーム X で $\omega_X \simeq \mathcal{O}_X$ かつ $0 < i < \dim(X)$ に対し $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ を満たすもののことをいう．特に 1 次元のカラビヤウ多様体は楕円曲線のことであり，2 次元のカラビヤウ多様体は K3 曲面のことである．また楕円曲線の Artin-Mazur height は 1 (ordinary) または 2 (supersingular) であるので，全ての楕円曲線は quasi-F-split であることがわかる．標数 2 のエンリケス曲面が classical, singular または supersingular であることの定義は [BM] を参照．

Quasi-F-split 性が F-split 性を拡張すると言っても，一般型の多様体が扱えるようにはならない．実際次が成り立つ．

定理 2.5. スキーム X が k 上 *smooth* で $\mathrm{ht}^{\mathrm{s}}(X) = n < \infty$ であるとき，

$$H^0(X, (1 - p^n)K) \neq 0$$

が成り立つ．

Proof. $n = 1$ のとき，すなわち F-split のときはよく知られており，証明は次の通りである: 定義より F-split section は層 $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(F_*\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ のゼロでない大域切断であるが，この層は Frobenius 射に対する Grothendieck 双対より $F_*\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, F^!\mathcal{O}_X) = F_*\omega_X^{1-p}$ と同型である．よって $(1 - p)K$ にはゼロではない大域切断が存在する．

以下 $n > 2$ とする．完全列

$$0 \to F_*^{n-1}\mathcal{O}_X \xrightarrow{V^{n-1}} W_n\mathcal{O}_X \to W_{n-1}\mathcal{O}_X \to 0$$

は $\overline{W}_n\mathcal{O}_X$-加群の完全列

$$0 \to F_*^{n-2}B_1\Omega_X^1 \to \overline{W}_n\mathcal{O}_X \to \overline{W}_{n-1}\mathcal{O}_X \to 0$$

を誘導する．ここで

$$B_1\Omega_X^1 = \mathrm{Coker}(F\colon \mathcal{O}_X \to F_*\mathcal{O}_X) \simeq \mathrm{Im}(d\colon F_*\mathcal{O}_X \to F_*\Omega_X^1)$$

である．この完全列に F_* を作用させて $F\colon \mathcal{O}_X \to F_*\overline{W}_n\mathcal{O}_X$ により係数制限すると，これは (局所自由)$\mathcal{O}_X$-加群の完全列になることに注意する．さらに双対をとることで

$$0 \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(F_*\overline{W}_{n-1}\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(F_*\overline{W}_n\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(F_*^{n-1}B_1\Omega_X^1, \mathcal{O}_X) \to 0$$

を得る．仮定より $\mathrm{ht}^{\mathrm{s}}(X) = n$ なので，split 切断は右端の層 $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(F_*^{n-1}B_1\Omega_X^1, \mathcal{O}_X)$ のゼロではない大域切断を定める．$n = 1$ の場合と同様に Grothendieck 双対を使ってこの層と標準因子が関係していることを見れば良い．実際 F^{n-1} に対する Grothendieck 双対より

$$\begin{aligned}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(F_*^{n-1}B_1\Omega_X^1, \mathcal{O}_X) &\simeq F_*^{n-1}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(B_1\Omega_X^1, (F^{n-1})^!\mathcal{O}_X)\\ &\simeq F_*^{n-1}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(B_1\Omega_X^1, \omega_X^{\otimes 1-p^{n-1}})\\ &\simeq F_*^{n-1}(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(B_1\Omega_X^1, \omega_X) \otimes \omega_X^{-p^{n-1}})\end{aligned}$$

とかける．さて完全ペアリング

$$F_*\Omega_X^i \otimes F_*\Omega_X^{N-i} \to \omega_X; \alpha \otimes \beta \mapsto C(\alpha \wedge \beta)$$

は複体の同型

$$F_*\Omega_X^\bullet \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(F_*\Omega_X^\bullet, \omega_X)[-N].$$

を誘導する．ただし N は X の次元で $C\colon F_*\omega_X \to \omega_X$ は Cartier 作用素である．これより

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(B_1\Omega_X^1, \omega_X) \simeq B_1\Omega_X^N := \mathrm{Im}(d\colon F_*\Omega_X^{N-1} \to F_*\omega_X),$$

を得る．これを代入することで

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(F_*^{n-1}B_1\Omega_X^1, \mathcal{O}_X) \simeq F_*^{n-1}(B_1\Omega_X^N \otimes \omega_X^{-p^{n-1}})$$

となり，定義よりこれは

$$F_*^{n-1}(F_*\omega_X \otimes \omega_X^{-p^{n-1}}) = F_*^n\omega_X^{1-p^n}$$

の部分層である． □

Quasi-F-split スキームが持つ良い性質の例をあげる．

定理 2.6. X を k 上の *quasi-F-split* スキームとする．このとき次が成り立つ：

(1) X は $W_2(k) = W(k)/(p^2)$ 上に持ち上がる．すなわち $W_2(k)$ 上の *flat* スキーム $\mathcal{X}$ と k 上の同型 $\mathcal{X} \otimes_{W_2(k)} k \simeq X$ が存在する．

(2) X はさらに *Cohen-Macaulay* 射影的スキームであるとする．$\mathcal{L}$ を X 上の豊富可逆層とする．このとき $i < \dim X$ に対し，$H^i(X, \mathcal{L}^{-1}) = 0$ が成り立つ．

注意 2.7. (1) は [Y1] において，smooth 性の仮定のもと示された．その後 [AZ] において，この仮定が必要ないことがわかった．(2) は [NY] で示された．この形の主張はいわゆる小平消滅定理と呼ばれるものである．もちろん $\mathbb{C}$ 上では成り立つ定理であるが，正標数においては反例があることが古くから知られている．

3 Quasi-F-split の局所的研究への動機

前節まで，主に射影的スキームを対象にした研究を述べてきた．今節以降では quasi-F-split の局所的な研究について説明する．もともと F-pure 性が可換環論や特異点論において研究されてきたことを鑑みると，quasi-F-split の局所的研究を行うことは，“ 自明に動機付けられている ” かも知れないが，講演者がこの研究に至った個人的な動機を二つ紹介する．

一つ目は次の結果である．

定理 3.1 (Y. [Y3])**.** 射影的スキームの *quasi-F-split height* は，そのアファイン錐の *quasi-F-split height* と一致する．すなわち，X を k 上の射影的スキーム，$\mathcal{L}$ を X 上の豊富可逆層とする．さらに $S_{\mathcal{L}} := \oplus_{n\geq 0}H^0(X,\mathcal{L}^n)$ を *section ring* とする．このとき

$$\mathrm{ht}^{\mathrm{s}}(X) = \mathrm{ht}^{\mathrm{s}}(S_{\mathcal{L}})$$

が成り立つ．

例 **3.2.** 標数 $p>2$ とする．各 $\lambda \in k\setminus\{0,1\}$ に対して，

$$Y^2Z = X(X-Z)(X-\lambda Z)$$

で定義される $\mathbb{P}^2_k = \mathrm{Proj}(k[X,Y,Z])$ 内の楕円曲線 E_λ を考える．$\Phi(x) := \sum_{i=0}^{(p-1)/2}\binom{(p-1)/2}{i}^2 x^i$ に対して，$\Phi(\lambda)\neq 0$ のとき E_λ は ordinary (i.e., $\mathrm{ht}(E_\lambda)=1$) であり，$\Phi(\lambda)=0$ の時 E_λ は supersingular (i.e., $\mathrm{ht}(E_\lambda)=2$) であることが知られている．さらに可換環 $A_\lambda := k[X,Y,Z]/(Y^2Z - X(X-Z)(X-\lambda Z))$ を考えると，これは原点 $(X,Y,Z)=(0,0,0)$ で特異点を持つ．定理 2.4(1) と定理 3.1 より，λ が $\Phi(x)$ の根でないとき $\mathrm{ht}^{\mathrm{s}}(A_\lambda)=1$ であり，根のとき $\mathrm{ht}^{\mathrm{s}}(A_\lambda)=2$ となることがわかる．

次に二つ目の動機となった松本雄也氏による RDP K3 曲面についての最近の研究の一部について述べる．RDP(本稿では 2 次元の有理二重点の意味) に対して，その双対グラフは $A_n(n\geq 1), D_n(n\geq 4), E_6, E_7, E_8$ のいずれかになる．さらに定義体 $k=\mathbb{C}$ のとき，双対グラフが RDP を完全に分類することが知られている．このようにある特異点のクラスが，その双対グラフによって同型類が決定されるとき *taut* と呼ばれる．次の表は $\mathbb{C}$ 上の RDP の定義方程式の標準形を与えるものである．

Table 1: $\mathbb{C}$ 上の Rational double points

$A_n(n\geq 1)$	$z^2+x^2+y^{n+1}$
$D_n(n\geq 4)$	$z^2+x^2y+y^{n-1}$
E_6	$z^2+x^3+y^4$
E_7	$z^2+x^3+xy^3$
E_8	$z^2+x^3+y^5$

さて正標数のときも，$p>5$ ならば RDP は taut で，各 Dynkin 図形に対応する特異点は，上の表の方程式で与えられることがわかる．しかし $p\leq 5$ のときは taut ではなく，例えば $p=2$ でその双対グラフが E_8 となる RDP は以下のように分類される [A2].

$$\begin{aligned}
E_8^0 &: z^2+x^3+y^5=0,\\
E_8^1 &: z^2+x^3+y^5+xy^3z=0,\\
E_8^2 &: z^2+x^3+y^5+xy^2z=0,\\
E_8^3 &: z^2+x^3+y^5+y^3z=0,\\
E_8^4 &: z^2+x^3+y^5+xyz=0.
\end{aligned}$$

記号 E_8 の右肩に乗っている整数は，分類を与えた Michael Artin にちなんで *Artin's coindex* と呼ばれる．

定義 3.3. 体 k 上の *RDP K3* 曲面とは，k 上の proper 曲面 X でその特異点は高々RDP で，その最小特異点解消が K3 曲面となるもののことである．

最近の松本雄也氏による研究 [M] により，大雑把に言って，標数 $p \leq 5$ の代数的閉体 k 上の RDP K3 曲面 X とその RDP $x \in X$ に対して，X の Artin-Mazur height(:=その最小特異点解消の Artin-Mazur height) と，RDP (X, x) の Artin's coindex の間には密接な関係があることが知られている．例えば，特異点 (X, x) の Dynkin diagram が分かっているとき，X の Artin-Mazur height により Artin's coindex が決定されることがわかる．

4 RDP の quasi-F-split height

前節を踏まえると，小さな標数での RDP の quasi-F-split height は非自明 (すなわち 1 と ∞ 以外の意味) なものが現れることが期待される．実際次が成り立つ．

定理 4.1. 標数 $p = 2$ のとき E_8-特異点の *quasi-F-split height* は次で与えられる．

		quasi-F-split height
E_8^0	$z^2 + x^3 + y^5$	4
E_8^1	$z^2 + x^3 + y^5 + xy^3z$	4
E_8^2	$z^2 + x^3 + y^5 + xy^2z$	3
E_8^3	$z^2 + x^3 + y^5 + y^3z$	2
E_8^4	$z^2 + x^3 + y^5 + xyz$	1

注意 4.2. 以下に述べる手法で，$p = 3, 5$ のすべての RDP と $p = 2$ の D_n 型以外の RDP の quasi-F-split height が計算できる．特にこれらはすべて quasi-F-split である．またいずれの場合にも Artin's coindex が小さいほど，quasi-F-split height は大きくなることが観察される．さらに $p = 2$ の D_n-特異点が quasi-F-split でないと判明したわけではなく，筆者は証明をうまく訂正して，この場合も quasi-F-split であることが証明できるであろうと期待しています．

注意 4.3. F-split 性を判定する Fedder の判定法というものが知られている [F]．これによると，F-finite 正則局所環 $(A, \mathfrak{m})$ と $f \in \mathfrak{m}$ に対して，$A/(f)$ が F-split であることの必要十分条件は $f^{p-1} \notin \mathfrak{m}^{[p]}$ となることである．ただし $\mathfrak{m}^{[p]}$ は $\mathfrak{m}$ の元の p 乗たちが生成するイデアルである．このような判定法が (現在のところ)quasi-F-split height に対して知られていない原因の一つは，A が正則であってもその Witt 環 $W_n(A)$ は一般に Gorenstein にならないからである．

定理の証明は可換環論の標準的な知識と，定義方程式からの計算の組み合わせである:

命題 4.4. $(A, \mathfrak{m}, k)$ を完備 *Noether* 局所環，M を A-加群とする．$E = E_A(k)$ を剰余体 k の A-加群としての *injective hull* とする．このとき A-加群の準同型 $f \colon A \to M$ が分裂することの必要十分条件は $f \otimes id_E \colon E \to M \otimes E$ が単射であることである．

Proof. Matlis 双対性より従う． □

命題 4.5. $(A, \mathfrak{m}, k)$ を n-次元 *Gorenstein* 局所環とするとき，*injective hull* と *local cohomology* の間の同型 $E_R(k) \simeq H^n_{\mathfrak{m}}(A)$ が存在する．

注意 4.6. 我々が問題にしている RDP は complete intersection なので Gorenstein である．

さて $f(x, y, z) = z^2 + \ldots$ を定理 4.1 に現れる多項式の一つとし，$A := k[[x, y, z]]/(f)$ とする．このとき $\mathrm{ht}^{\mathrm{s}}(A) \leq n$ であることと，A-加群の準同型

$$F \colon A \to F_*\overline{W}_n(A)$$

が分裂することは同値である．さらに命題 4.4 と命題 4.5 より，これは local cohomology の間の Frobenius 写像

$$F \colon H^2_{\mathfrak{m}}(A) \to H^2_{\mathfrak{m}}(\overline{W}_n(A)) \tag{1}$$

が単射であることと同値である．ここで $\mathfrak{m}=(x,y,z)$ は A の極大イデアルであり，$H^2_{\mathfrak{m}}(\overline{W}_n(A))$ は局所環 $\overline{W}_n(A)$ の極大イデアルに関する local cohomology を (記号の濫用であるが) 表している．Local cohomology はイデアルをその根基で取り替える操作で不変なので，ここに現れる local cohomology は次のような Čech cohomology で計算できる．

$$
\begin{aligned}
H^2_{\mathfrak{m}}(A) &= \operatorname{Coker}\left(A\left[\frac{1}{x}\right]\oplus A\left[\frac{1}{y}\right]\to A\left[\frac{1}{xy}\right]\right),\\
H^2_{\mathfrak{m}}(W_n(A)) &= \operatorname{Coker}\left(W_n(A)\left[\frac{1}{[x]}\right]\oplus W_n(A)\left[\frac{1}{[y]}\right]\to W_n(A)\left[\frac{1}{[xy]}\right]\right),\\
H^2_{\mathfrak{m}}(\overline{W}_n(A)) &= \operatorname{Coker}(H^2_{\mathfrak{m}}(W_n(A))\xrightarrow{p} H^2_{\mathfrak{m}}(W_n(A))).
\end{aligned}
$$

定義より injective hull E は剰余体 k を標準的に含むが，同型 $E\simeq H^2_{\mathfrak{m}}(A)$ を通して，$k\subset E$ は Čech class$\{\frac{z}{xy}\}$ で生成されることがわかる．このことより (1) が単射であることと，

$$
F\left(\left\{\frac{z}{xy}\right\}\right)=\left\{\frac{[z^p]}{[x^py^p]}\right\}
$$

が $H^2_{\mathfrak{m}}(\overline{W}_n(A))$ で nonzero になることが同値であることがわかる．よって定理はそのような最小の n を見つけることに帰着し，これは定義方程式から，Witt 環における計算を直接行うことで完了する．

謝辞

城崎代数幾何学シンポジウム 2020(オンライン) での講演の機会をいただきました世話人の方々に感謝申し上げます．また，コロナウイルスの大流行にもかかわらずシンポジウムを開催してくださったことに対しても，関係者の皆様に感謝いたします．本研究は科研費 (19K14501) の助成を受けています．

References

[AZ] Piotr Achinger and Maciej Zdanowicz, *Serre-Tate theory for Calabi-Yau varieties*, arXiv:1807.11295v2.

[A1] Michael Artin, *Some Numerical Criteria for Contractability of Curves on Algebraic Surfaces*, Amer. J. Math., **84** (3), (1962), 485-496.

[A2] Michael Artin, *Coverings of the Rational Double Points in Characteristic p*, Complex analysis and algebraic geometry, Iwanami Shoten, Tokyo, (1977), 11-22.

[BM] Enrico Bombieri and David Mumford, *Enriques' classification of surfaces in char.p, III*, Invent. math., **35**, (1976), 197-232.

[F] Richard Fedder, *F-purity and rational singularity*, Trans. Amer. Math. Soc., **278** (2), (1983), 461-480.

[L] Christian Liedtke, *Supersingular K3 surfaces are unirational*, Invent. math., **200**, (2015), 979-1014.

[M] Yuya Matsumoto, *Inseparable maps on W_n-valued Ext groups of non-taut rational double point singularities and the height of K3 surfaces*, arXiv:1907.04686v2.

[MR] V. B. Mehta and A. Ramanathan, *Frobenius splitting and cohomology vanishing for schubert varieties*, Ann. Math. **122**, (1985), 27-40.

[NY] Yukiyoshi Nakkajima and Fuetaro Yobuko, *Degenerations of log Hodge de Rham spectral sequences, log Kodaira vanishing thoerem in characteristic $p > 0$ and log weak Lefschetz conjecture for log crystalline cohomologies*, arXiv:1902.09110.

[T] Shunsuke Takagi, F特異点論の最近の発展について, 第59回代数学シンポジウム報告集.

[Y1] Fuetaro Yobuko, *Quasi-Frobenius-splitting and lifting of Calabi-Yau varieties in characteristic p*, Mathematische Zeitschrift, **292** (2019), 307-316.

[Y2] Fuetaro Yobuko, *On the Frobenius-splitting height of varieties in positive characteristic*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu Algebraic Number Theory and Related Topics 2016, **B77**, (2020), 159-176.

[Y3] Fuetaro Yobuko, *Quasi-F-splitting and surface singularities*, in preparation.

Fuetaro Yobuko
Graduate School of Mathematics, Nagoya University,
`soratobumusasabidesu@gmail.com`