

平面ポアズイユ型回転流に対する周期箱の大きさの影響

岡大自然科学研究科 加賀義人 (Yoshito Kaga)

Graduate School of Natural Science and Technology, Okayama University

岡大工機械工学科 柳瀬眞一郎 (Shinichiro Yanase)

Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Okayama University

1 はじめに

回転せん断流は、気象学やターボ機械などへの幅広い応用される流体力学の大変重要な課題の一つである。回転せん断流では、系の回転に関する渦度と流体運動の渦度との相対的な方向がその流れの時間発展に強く影響する。このことは、線形安定性の解析¹や、直接数値計算 (DNS)²によって研究されてきた。Tanaka ら³は、回転系における一様せん断流の DNS で、平均絶対渦度 (系の回転による渦度と流体運動による渦度の和) がゼロに近づく傾向があり、それが回転せん断流と熱対流との類似性に起因するものであることを調べた。回転クエット型流⁴や回転ポアズイユ型流^{5,6}のようなチャンネル流に対しては、3次元の数値計算もよく行われている。Bech and Andersson⁴ は回転クエット型流においてクエット流による回転と逆向きの強いアンチサイクロニック回転を与えたとき平均絶対渦度がゼロに近づくことを示した。Lamballais ら⁵は、DNS やラージエディシミュレーション (LES) を用いて、特徴的な縦渦構造が現れる領域で絶対渦度がゼロに近づくことを示した。Finlay⁶は、回転ポアズイユ型流の線形安定性解析に基づく流れ方向渦を数値的に解析した。この絶対渦度がゼロに近づくことは、Kitoh⁷によって実験的にも確かめられている。近年のミニマルチャンネル流の研究^{8,9}はチャンネル流中の縦渦の再生成に関する新しい分野を開いてきた。また、力学系の視点からもクエット型流¹⁰やポアズイユ型流¹¹ について研究が行われてきた。これらの研究は、チャンネル流の分岐の研究^{12,13}とも密接に関係していることがよく知られている。

ミニマル流や力学系の視点からチャンネル流の渦構造の仕組みについて解明することは大変重要なことである。我々は、回転ポアズイユ型流中に生成される渦構造を調べ、渦構造と絶対渦度ゼロ状態との関係や、周期箱の大きさが渦構造に与える影響について研究を行う。

2 数値計算の方法

図1に示されるような、 $y = \pm h$ に置かれた y 軸に垂直な二枚の平行平板間を流す圧縮粘性流体を考える。基本流は x 軸方向に与えられ、系全体が z 軸まわりに回転 Ω で回っているものとする。流れ場は x 軸方向と z 軸方向に周期的であると仮定して示されるような $[-hL_x/2, hL_x/2] \times [-h, h] \times [-hL_z/2, hL_z/2]$ の計算領域をそして、平板間距離の半分の長さ h 、動粘度 ν 、ポアズイユ型の基本流 $U_0(1 - \text{大値 } U_0)$ を用いて無次元化を行う。

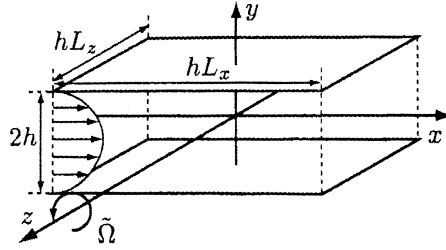


図 1: Rotating coordinate system.

無次元化された回転座標系での Navier-Stokes 方程式と連続の式は,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla P + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \times (\boldsymbol{\omega} + 2\Omega \mathbf{k})), \quad (2)$$

となる。ここで、 $Re = U_0 h / \nu$ はレイノルズ数を表す。変形圧力 P は、 $P = p + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 - \frac{1}{2} (\Omega \mathbf{k} \times \mathbf{x})^2$ である。ただし、 p は圧力、 $\Omega = \tilde{\Omega} h / U_0$ は回転数を表す。以降は、全ての変数は無次元化されているものとする。

速度場と渦度場は、次のように基本流の項とそれ以外の項 (攪乱項) に分解する。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{u}} = (U(y), 0, 0) + (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}), \\ \boldsymbol{\omega} &= \bar{\boldsymbol{\omega}} + \hat{\boldsymbol{\omega}} = (0, 0, -\partial U(y)/\partial y) + (\hat{\omega}_x, \hat{\omega}_y, \hat{\omega}_z), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ただし、 $U(y) = 1 - y^2$ は x 方向の基本流の速度であるから、基本流によるせん断の渦度は z 方向成分にのみ $\bar{\omega}_z = -\partial U(y)/\partial y$ の形で現れる。

壁面境界上 ($y = \pm 1$) では、非すべり条件が適用され、 x, z 方向には周期境界条件が適用される。よって、 x, z 方向にはフーリエ級数、 y 方向にはチェビシエフ多項式を用いて関数展開を行う。

$$\left. \begin{aligned} \hat{v} &= \sum_{m=1-M}^M \sum_{n=1-N}^N v_{mn}(y, t) e^{i(m\alpha x + n\beta z)}, \\ \hat{\omega}_y &= \sum_{m=1-M}^M \sum_{n=1-N}^N \omega_{ymn}(y, t) e^{i(m\alpha x + n\beta z)}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} v_{mn}(y, t) &= \sum_{l=0}^L v_{mnl}(t) T_l(y), \\ \omega_{ymn}(y, t) &= \sum_{l=0}^L \omega_{ymnl}(t) T_l(y), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$T_l = \cos(l \arccos y)$ は l 次チェビシエフ多項式で、 α と β は、それぞれ、 x 方向、 z 方向であり、 $L_x = 2\pi/\alpha$ 、 $L_z = 2\pi/\beta$ の関係が成り立つ。本研究では、これらの波

数については、Finlay⁶の線形安定性計算の結果をもとに不安定性が強く現れると思われる $(\alpha, \beta) = (1, 2)$ ($(L_x, L_z) = (2\pi, \pi)$) を用いて計算を行った。また、流れの構造が周期箱の大きさの違いによって受ける影響を調べるために、 $(\alpha, \beta) = (1, 3/4), (1, 1)$ ($(L_x, L_z) = (2\pi, 1.5\pi), (2\pi, 2\pi)$) のように、 z 方向の長さを変えて行った。 $(\alpha, \beta) = (1, 2)$ に対しては、打ち切り項数は $(M, N, L) = (8, 16, 16)$ を用い、 $(\alpha, \beta) = (1, 3/4), (1, 1)$ に対しては、 $(M, N, L) = (8, 32, 16)$ を用いた。これらの打ち切り項数は、本研究で用いた範囲の変数 $(\alpha, \beta, Re, \Omega)$ に対しては十分大きい値である。時間発展計算を行うために、対流項には2次のアダムス・バッシュフォース法を、粘性項にはクランクニコルソン法を適用した。本稿で示される結果は高速フーリエ変換 (FFT) を用いて行ったものであるが、FFT を用いないフーリエ打ち切りモデルについても同様の計算を行って両者が同様の結果を示すことを確かめている。時間発展計算の初期値として、全ての変数に 10^{-3} 以下の大きさの攪乱を与えて方法を用いた。

3 渦構造の特徴

まず、波数 $(\alpha, \beta) = (1, 2)$ の場合について、低レイノルズ数の回転ポアズイユ型流の渦構造を詳細に調べた。レイノルズ数 Re と回転数 Ω は、 $Re \leq 550, 0 \leq \Omega \leq 5$ の範囲で変化させ、初期微小攪乱の時間発展計算を行った。得られた解を分類し、図2に示す。この図中で、 \times は初期攪乱が減衰し基本流に戻ったことを表す。 \circ は流れ方向に一様な2次元定常解、 \bullet は3次元渦構造を持ち流れ方向に進む進行波解、 \odot は渦構造が不規則に変化するような3次元カオス解、 \square 、 \blacksquare はそれぞれ2次元と3次元の渦構造を持つ周期解 (もしくはほぼ周期的な解) になったことを表す。そして、 ∇ 、 \blacktriangledown はそれぞれ2次元と3次元の渦構造を持つ解で、定常解、進行波解、カオス解、周期解のどれにもあてはまらないものを表す。また、 $Re = 400, \Omega \approx 1/50$ のとき、2次元渦構造と3次元渦構造の状態を周期的に行き来する解も得られた。

Re をゼロから大きくすると、($m = 0$ のフーリエモードに対応する) 2次元攪乱が発達して、2次元定常解が生成される。さらに Re が増加すると、2次元定常解は2次元の周期解を経て3次元渦構造を持つ解になる。一方、 Ω を大きくした場合、基本流は2次元定常解、2次元周期解、進行波解、カオス解と Re を大きくした場合と同様に変化する。しかしながら、 Ω をさらに大きくすると、カオス解は再び2次元解になり、攪乱は減衰し基本流に戻る。図2に示されているように、時間発展計算によって沢山の進行波解を見つけることができた。我々は、これらの時間発展計算の結果をもとに、ニュートン・ラフソン法を用いて厳密な進行波解が存在することを確認した。¹⁴

次に、 $Re = 400$ における、いくつかの特徴的な管状渦構造を図3に示す。ここでは、 $Q = -\nabla \cdot \{(u \cdot \nabla)u\}$ の正の値の等値面が描かれており、黒色は、流れ方向渦度 ω_x が正の渦、灰色は ω_x が負の渦を表す。この Q はコリオリ力 $2\Omega(u \times k)$ の影響を取り除いた圧力ラプラシアンであり、 Q の正の等値面を見ることで、管状渦構造を明確に見ることができる。

図3(a)と3(b)はそれぞれ2次元定常解と進行波解の渦構造である。これらの流れ場には、 ω_x が正と負の一对の流れ方向の渦管を持つ。図3(c)と3(d)は、2次元周期解の2渦

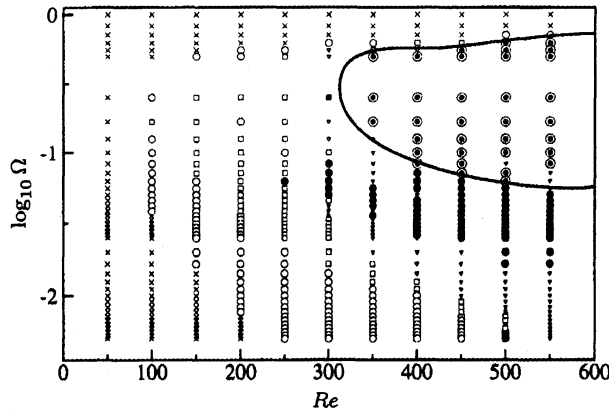


図 2: Distribution of various types of the solutions. (×: basic, ○: steady, ●: traveling wave, ◉: chaotic (region bounded by a solid line), □: 2D periodic, ■: 3D periodic, ▽: 2D, ▼: 3D)

の状態と 4 渦の状態である。この周期解の渦構造は、2 渦から 4 渦になり再び 2 渦に戻り、その間に全体が z 方向に $L_z/4$ だけ移動する。これを 4 回繰り返すと完全にもとの状態に一致するため 4 重周期解であることがわかる。非回転ポアズイユ型流に対して Toh and Itano¹⁵が見つけた周期解は、この周期解と性質がよく似ており大変興味深い。図 3(e) はカオス解の場合で、この渦構造は時間が進行するとともに複雑に変化する。

これらのさまざまな種類の解を識別するために、渦構造と平均運動エネルギーの両方を用いた。図 3 に示した解について平均運動エネルギーの変化を図 4 に示す。この図で、 E_{1D} , E_{2D} , E_{3D} は攪乱の平均運動エネルギー E の一部分を表している。 E_{1D} は $m = n = 0$ 成分に、 E_{2D} は $m = 0, n \neq 0$ 成分に、そして、 E_{3D} は $m \neq 0$ 成分に対応している。よって、 $E_{3D} = 0$ ならば、 x 方向に一様な 2 次元渦構造を示す。

2 次元定常解や進行波解に対しては、運動エネルギーは変化しないので、図 4 では固定点に行き着く。2 次元周期解に対しては、 $E_{3D} = 0$ であり、 E_{1D} - E_{2D} 相空間で閉曲線を描く。カオス解に対しては、図 4(b) にあるように、運動エネルギーの変化も不規則で複雑になる。

図 3(a)-3(d) に示される渦構造はある同じ対称性を持っている。

$$\begin{aligned} & [u, v, w](x, y, (z - z_s)) \\ & = [u, v, -w](x + L_x/2, y, -(z - z_s)), \end{aligned} \quad (6)$$

ただし、 z_s は対称面の z 座標である。本研究で行った非対称計算の結果、式 (6) の対称性を含む解にたどり着いたが、これは、この対称性を持つ解が対称性を持たない解よりも構造的に安定であるからであると考えられる。式 (6) が満たされるとき、以下の関係が成り立っている。

$$\left. \begin{aligned} v_{mn}(y, t) &= (-1)^m v_{m-n}(y, t), \\ \omega_{ymn}(y, t) &= (-1)^{m+1} \omega_{y_{m-n}}(y, t). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

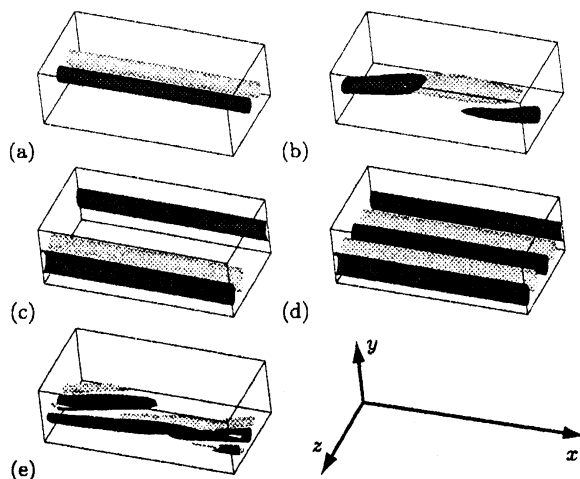


図 3: Some typical vortical structures visualized by the iso-surfaces of the positive value of Q . (a): 2D steady solution ($\Omega=1/160$), (b): TW solution ($\Omega=1/30$), (c) and (d): 2D periodic solution ($\Omega=1/90$), (e): chaotic solution ($\Omega=1/4$).

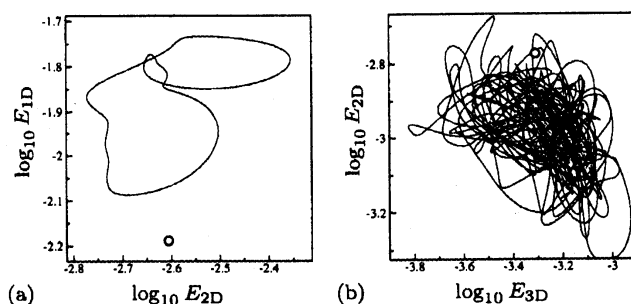


図 4: Correlation diagram of the decomposed mean kinetic energy. (a): 2D steady solution ($\Omega=1/160$) and 2D periodic solution ($\Omega=1/90$), (b): TW solution ($\Omega=1/30$) and chaotic solution ($\Omega=1/4$).

4 平均絶対渦度

図 3 に示される流れの平均速度 $\langle u \rangle$ と平均絶対渦度 $\langle \omega_z + 2\Omega \rangle$ の分布を図 5 に示す。ただし、記号 $\langle \rangle$ は、 $x-z$ 面の空間平均と一定間隔の時間平均との二重の平均を表す。流れが不安定になり、 $y-z$ 面内に二次流れが発生して、流れ方向への流量は減少することが図 5(a) から確認できる。また、このとき、平均絶対渦度は一部の領域にてゼロに近づいている。この絶対渦度ゼロ領域は、主にアンチサイクロニック領域 ($y < 0$) の秩序渦構造が集中しているところに現れている。この図では、平均絶対渦度は二次元周期解のときもともゼロに近づいている。

次に、2次元定常解 (図 3(a)), 2次元周期解の 4 渦状態 (図 3(d)), 進行波解 (図 3(b)) のそれぞれの $y-z$ 断面の流れの特徴を図 6 に示す。この図中で、細い実線 (破線) は流れ方向渦度の正 (負) の等値線、矢印は断面内の速度ベクトル、灰色の線は $u = 0.30$, そして、太

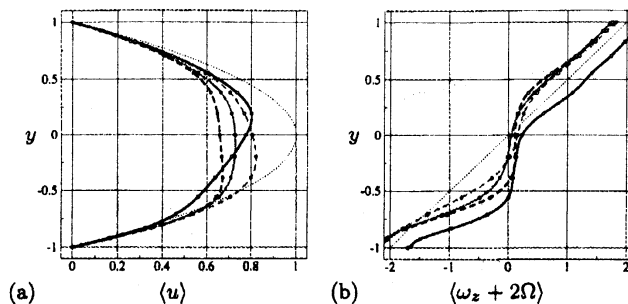
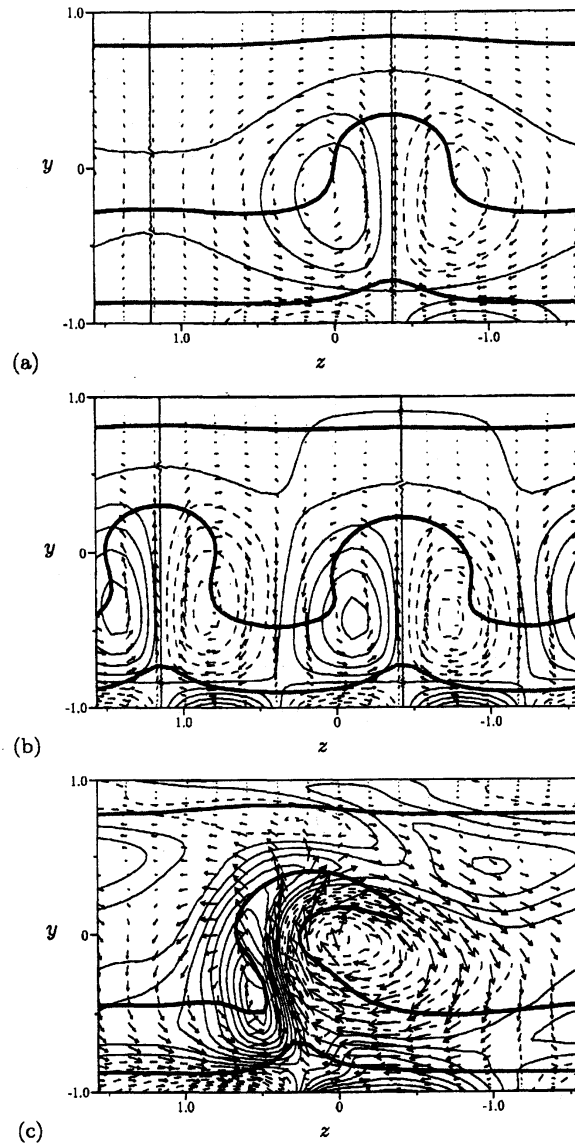


図 5: Mean streamwise velocity (a) and mean-absolute-vorticity (b) of the flows shown in Fig. 3. (thin dotted: basic flow ($\Omega=0$), gray dashed: 2D steady solution ($\Omega=1/160$), gray solid: 2D periodic solution ($\Omega=1/90$), thick dashed: TW solution ($\Omega=1/30$), thick solid: chaotic solution ($\Omega=1/4$))

い黒色の線は局所絶対渦度 $\omega_z + 2\Omega$ がゼロを表している。

図 6(a) では、下壁近傍の低速ストリークからの上昇流によって作られる旋回によって一対の流れ方向渦が生成されている。そして、このとき局所絶対渦度ゼロ面は二次渦によって曲げられていることがわかる。図 6(b) では、二対の流れ方向渦が存在するが、各渦の間で局所絶対渦度ゼロ面が上下に変形している。3次元進行波解の断面図である図 6(c) では、一対の強い流れ方向渦がねじれるように配置しているため、局所絶対渦度ゼロ面も渦に巻き込まれるように変形しているのがわかる。これらのことからわかるように、渦が発生するところでは、絶対渦度が正の領域と負の領域が混合されているので、局所絶対渦度の y 軸に垂直な面内での平均をとったとき、平均絶対渦度ゼロ領域が流れ方向渦が集まるところに現れることが説明できる。Lamballais ら⁵は、本研究の Re の値より大きな値での DNS を行っている。彼らは、 Ω が大きく、沢山の縦渦が集まるとき平均絶対渦度がゼロに近づくことを示した。このことは、レイノルズ数の範囲は我々のものと大きく異なるが、共通する結果である



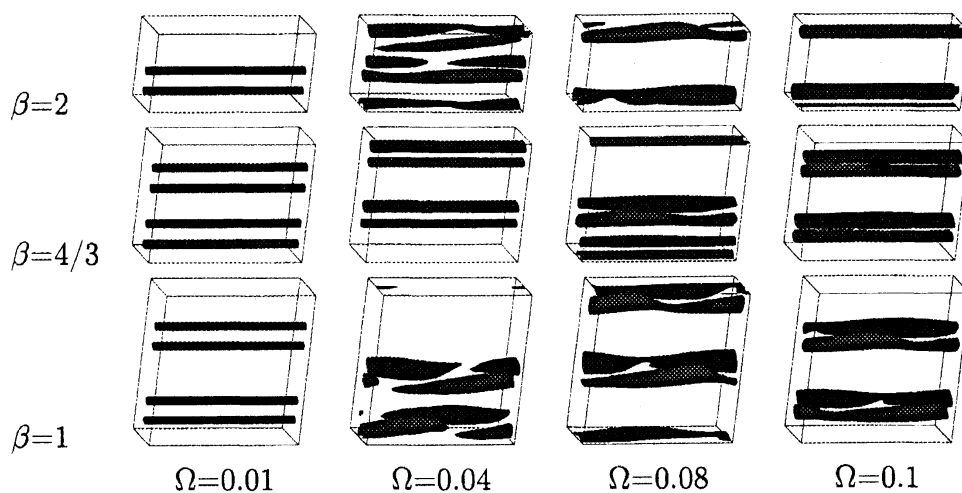
⊠ 6: Vortical structure in the y - z plane. (a): 2D steady solution ($\Omega=1/160$), (b): 2D periodic solution ($\Omega=1/90$), (c): TW solution ($\Omega=1/30$). (thin solid (dashed) line: contour line of ω_x is positive (negative), arrow: velocity vector, thick solid line: $\omega_z + 2\Omega = 0$, thick gray line: $u = 0.30$)

5 箱の大きさを変えた場合

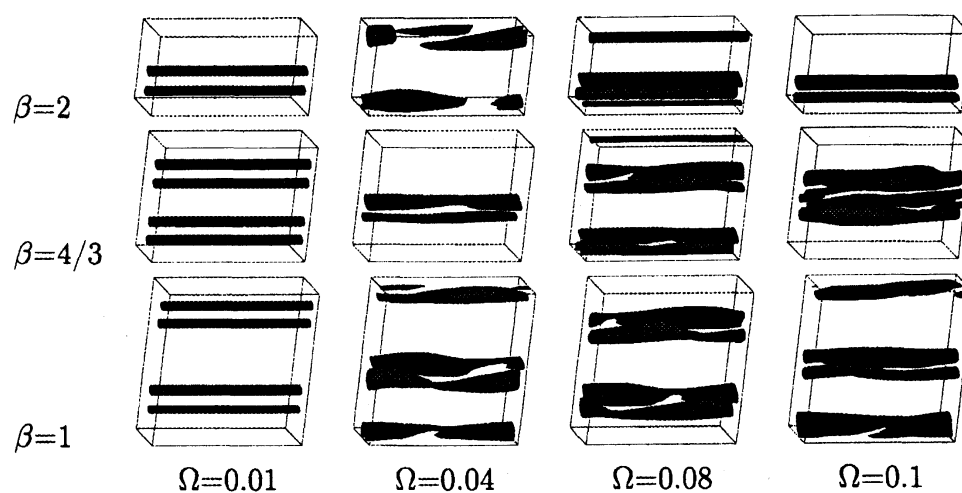
周期箱の大きさを $(L_x, L_z) = (2\pi, \pi), (2\pi, 1.5\pi), (2\pi, 2\pi)$ のように z 方向に変化させ、周期箱の大きさが渦構造に及ぼす影響を調べた。図7, 図8はそれぞれ, $Re = 300, 350$ の場合の $\beta = 2, 4/3, 1$ に対する渦構造の様子を示している。これらの比較からわかるように、周期箱の z 方向の長さを大きくした場合、そこに現れる渦構造は、 $\beta = 2$ の渦構造を z 方向に繰り返し並べた構造とよく似ている。またこのとき、 $\beta = 1$ のときには現れなかったような大きな構造が現れるということはなかった。このことから、本研究で用いたレイノルズ数の範囲では、周期箱の横幅をさらに長くした場合も、その渦構造の特徴は本質的には変わらないということが言える。

6 おわりに

低レイノルズ数での回転ポアズイユ型流の非定常計算を様々な回転数 Ω に対して行った。その結果、低回転数、低レイノルズ数において、対称性(6)を持つような、2次元定常解、周期解、進行波解などが容易に現れるが、 Ω をさらに大きくした場合には、攪乱は減衰し基本流に戻ることがわかった。ここで得られた解は初期条件にはほとんど依存がなく、初期条件を変えても同様の結果になった。また、平均絶対渦度ゼロ状態はアンチサイクロニック領域に現れる縦渦によって引き起こされることがわかった。最後に、Eckhaus不安定性¹⁶を調べるために周期箱の大きさを変えて計算を行った。その結果、 $\beta = 2$ で得られた渦構造は、 $\beta = 4/3, 1$ と変えた場合に対しても安定であることがわかった。



⊠ 7: Vortical structures of some periodic-box sizes for $Re = 300$. (gray : $\omega_x > 0$, black : $\omega_x < 0$)



⊠ 8: Vortical structures of some periodic-box sizes for $Re = 350$. (gray : $\omega_x > 0$, black : $\omega_x < 0$)

参考文献

- [1] S. Yanase, C. Flores, O. Métais and J. J. Riley: *Phys. Fluids, A* **5** (1993) 2725.
- [2] O. Métais, C. Flores, S. Yanase, J. J. Riley and M. Lesieur: *J. Fluid Mech.*, **293** (1995) 47.
- [3] M. Tanaka, S. Kida, S. Yanase and G. Kawahara: *Phys. Fluids*, **12** (2000) 1979.
- [4] K. H. Bech and H. I. Andersson: *J. Fluid Mech.*, **347** (1997) 289.
- [5] E. Lamballais, O. Métais and M. Lesieur: *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, **12** (1998) 149.
- [6] W. H. Finlay: *J. Fluid Mech.*, **215** (1990) 209.
- [7] O. Kitoh: Private communication (1999).
- [8] J. Jiménez and P. Moin: *J. Fluid Mech.*, **225** (1991) 213.
- [9] F. Waleffe: *J. Fluid Mech.*, **435** (2001) 93.
- [10] G. Kawahara and S. Kida: *J. Fluid Mech.*, **449** (2001) 291.
- [11] T. Itano and S. Toh: *J. Phys. Soc. Jpn.*, **70** (2001) 703.
- [12] M. Nagata: *J. Fluid Mech.*, **217** (1990) 519.
- [13] M. Nagata: *J. Fluid Mech.*, **358** (1998) 357.
- [14] U. Ehrenstein and W. Koch: *J. Fluid Mech.*, **228** (1991) 111.
- [15] S. Toh and T. Itano: *J. Fluid Mech.*, **481** (2003) 67.
- [16] Y. Guo and W. H. Finlay: *J. Fluid Mech.*, **228** (1991) 661.
- [17] D. P. Wall and M. Nagata: 2003 Meeting of Japan Society of Fluid Mechanics.