Integral Zariski decomposition on normal surfaces and its applications（正規曲面上の整ザリスキー分解とその応用）

東京理科大学理工学部数学科　榎園　誠

概要

正規曲面 X 上の擬有効因子 D のザリスキー分解 $D = P + N$ とは，ネフな $\mathbb{Q}$-因子 P と負定値な有効 $\mathbb{Q}$-因子 N への一意的な直交分解のことである．本稿では，これの整数係数版である整ザリスキー分解 $D = P_{\mathbb{Z}} + N_{\mathbb{Z}}$ が成り立つことを証明し，その幾つかの応用（小平型消滅定理，随伴線形系の Reider 型定理，有効因子上の射の拡張定理）を紹介する．

1　ザリスキー分解

本稿では，X は体 k 上定義される正規曲面とし，$f\colon X \to Y$ は断らない限り代数多様体 Y への固有な全射とする（例えば，X は $\mathbb{C}$ 上の非特異射影曲面で $Y = \operatorname{Spec}\mathbb{C}$，$f$ は曲線 Y 上のファイバー空間，f は 2 次元特異点の特異点解消など）．X 上の（ヴェイユ）因子 D が **f-例外的**であるとは，D のサポートに含まれる任意の既約成分が f で点に潰されるときにいう．X は正規曲面より，因子 D と f-例外的因子 C に対し，Mumford の交点形式 [8] により交点数 DC が定まる．因子 D が **f-擬有効**であるとは，任意の f-例外的なネフ因子 C に対し $DC \geq 0$ が成り立つときにいう．これは，$\mathbb{R}$-因子の数値的同値類のなすユークリッド空間 $N^1(X/Y)$ の中で，有効 $\mathbb{R}$-因子の極限でかけることと同値である．

以下の分解定理は 1962 年に Zariski により証明され，ザリスキー分解と呼ばれている（X が非特異射影曲面，Y は点で D は有効の場合がオリジナルの Zariski による結果 [13] である．D が擬有効の場合は藤田 [2] による．以下では応用のため相対的な設定で述べる）．

定理 1.1 (ザリスキー分解) D を X 上の f-擬有効な $\mathbb{R}$-(resp. $\mathbb{Q}$-) 因子とする．このとき，次の条件を満たす分解 $D = P + N$ が一意的に存在する．

(i) P は f-ネフ $\mathbb{R}$-(resp. $\mathbb{Q}$-) 因子．

(ii) N は 0 かまたは負定値な f-例外的有効 $\mathbb{R}$-(resp. $\mathbb{Q}$-) 因子．

(iii) $PN = 0$．

主定理の整ザリスキー分解を述べる前に，X 上の因子に対する性質をいくつか定義する．

定義 1.2 R を $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ または $\mathbb{R}$ とする．X 上の $\mathbb{R}$-因子 D に対し，$\mathcal{N}_R(D)$ を X 上の負定値な f-例外的有効 R-因子 $B>0$ で $B-D$ は B 上ネフなもの全体のなす集合とする．このとき，D は **f-R-正**であるとは，$\mathcal{N}_R(D)$ が空集合であると定義する．言い換えると，任意の負定値な f-例外的有効 R-因子 $B>0$ に対し，B のサポートに含まれるある素因子 C が存在し，$(B-D)C<0$ を満たす．

補題 1.3 D を X 上の f-擬有効な $\mathbb{R}$-因子とする．このとき，次は同値である．

(1) D は f-ネフ．

(2) D は f-$\mathbb{R}$-正．

(3) D は f-$\mathbb{Q}$-正．

証明 $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(D)$ が元 B を持てば，$DB=-(B-D)B+B^2<0$ より，(1) ならば (2) が従う．(2) ならば (3) は明らかなので，(3) ならば (1) を示せばよい．C を任意の f-例外的な既約曲線とする．もし $C^2\geq 0$ ならば，C はネフなので，D は f-擬有効の仮定から $DC\geq 0$．よって $C^2<0$ としてよい．このとき C は負定値であり，$B:=\varepsilon C$，$\varepsilon\in\mathbb{Q}_{>0}$ とおくと，D は f-$\mathbb{Q}$-正なことから $(B-D)C<0$ となり，よって $DC>\varepsilon C^2$ を得る．$\varepsilon>0$ は任意より，$DC\geq 0$ となる．□

これより，f-擬有効の仮定の下では，f-ネフ，f-$\mathbb{R}$-正，f-$\mathbb{Q}$-正の概念は全て同値となる．但し，f-$\mathbb{Z}$-正は本質的に f-ネフより弱い正値性である．f-擬有効の仮定が無くとも，上の証明から，次が成立する．

$$f\text{-ネフ} \implies f\text{-}\mathbb{R}\text{-正} \implies f\text{-}\mathbb{Q}\text{-正} \implies f\text{-}\mathbb{Z}\text{-正}.$$

以下が主定理である整ザリスキー分解である．

定理 1.4 (整ザリスキー分解) D を X 上の f-擬有効な $\mathbb{R}$-因子とする．このとき，次の条件を満たす分解 $D=P_{\mathbb{Z}}+N_{\mathbb{Z}}$ が一意的に存在する．

(i) $P_{\mathbb{Z}}$ は f-$\mathbb{Z}$-正な $\mathbb{R}$-因子．

(ii) $N_{\mathbb{Z}}$ は 0 かまたは負定値な f-例外的有効 $\mathbb{Z}$-因子．

(iii) $-P_{\mathbb{Z}}$ は $N_{\mathbb{Z}}$ 上ネフ．

本稿では，整ザリスキー分解（定理 1.4）の証明を，ザリスキー分解（定理 1.1）の別証明と共に紹介し，そのいくつかの応用を述べる．詳細は筆者の論文 [1] にまとめてある．

1.1 ザリスキー分解の証明

まずは簡単な補題から始める．

補題 1.5 D を X 上の $\mathbb{R}$-因子とする．$D = F + E = A + B$ を 2 つの $\mathbb{R}$-因子としての分解とし，次の条件を満たすと仮定する．

(i) E は有効 $\mathbb{R}$-因子．

(ii) B は負定値な f-例外的有効 $\mathbb{R}$-因子．

(iii) F と $-A$ は B 上ネフ．

このとき，$B \leq E$ が成立する．

証明 $B = \sum_i b_i C_i$，$E = \sum_i e_i C_i$ を素因子分解とし，$G := \sum_i \min\{b_i, e_i\} C_i$ とおく．$G = B$ を示せばよい．今 $G < B$ と仮定する．このとき，B は負定値より $(B-G)^2 < 0$ が成立する．また，G の取り方より $(E-G)(B-G) \geq 0$ であり，$-A$ は B 上ネフより $A(B-G) \leq 0$ が成立する．よって，

$$F(B-G) = (A+B-E)(B-G) = A(B-G) + (B-G)^2 - (E-G)(B-G) < 0$$

となり，F が B 上ネフなことに矛盾する． □

補題 1.6 D を X 上の $\mathbb{R}$-因子とする．$\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(D)$ は空集合でないならば，極大元を持つ．

証明 ツォルンの補題より，$\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(D)$ は包含関係に関して帰納的であることを示せばよい．$\mathcal{T} \subset \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(D)$ を任意の全順序部分集合とする．まず $\mathcal{P}$ を $\mathcal{T}$ の元のサポートに含まれる素因子全体の集合とし，これは有限集合であることを示そう．もしこのような素因子が無限個あるとすると，$\mathcal{T}$ の全順序性より，$\mathcal{T}$ の元でサポートの既約成分の個数がいくらでも大きなものが取れる．しかし，$\mathcal{T}$ の元は負定値であり，よってそのサポートに含まれる素因子は，f-例外的な $\mathbb{R}$-因子の数値的同値類のなすベクトル空間 $N_1(X/Y)$ の中で一次独立であるから，$N_1(X/Y)$ が有限次元である（cf. [3]）ことに矛盾する．次に，$C \in \mathcal{P}$ に対し，$b_C := \sup\{\mathrm{mult}_C(B) \mid B \in \mathcal{T}\}$ とおくとき，$b_C < \infty$ を示そう．もし $b_C = \infty$ ならば，$\mathcal{T}$ の元の無限列 $\{B_n\}_n$ で $\lim_{n\to\infty} \mathrm{mult}_C(B_n) = \infty$ なものが取れる．各 B_n は負定値であり，そのサポートは $\mathcal{P}$ に含まれる素因子のみからなるので，特に $\lim_{n\to\infty} B_n^2 = -\infty$ となる．一方，$B_n - D$ は B_n 上ネフより，$(B_n - D)B_n \geq 0$ となり，よって $\lim_{n\to\infty} D(B_n/\sqrt{-B_n^2}) = -\infty$ が成立する．しかし，各 $B_n/\sqrt{-B_n^2}$ は $N_1(X/Y)$ のコンパクト部分集合 $K := \{B \in \bigoplus_{C\in\mathcal{P}} \mathbb{R}C \mid B^2 = -1\}$ に属し，D と交点を取る写像 $D- \colon N_1(X/Y) \to \mathbb{R}$ は連続なので K 上最小値を取るため矛盾．以上より，$B_{\mathcal{T}} := \sum_{C\in\mathcal{P}} b_C C$ は well-defined であり，負定値な有効 $\mathbb{R}$-因子である．任意の $C \in \mathcal{P}$ と $\varepsilon > 0$ に対し，$B_\varepsilon \in \mathcal{T}$ を $\mathrm{mult}_C(B_\varepsilon) > 0$ かつ $0 \leq b_C - \mathrm{mult}_C(B_\varepsilon) < \varepsilon$ と取ると，

$$(B_{\mathcal{T}} - D)C = (B_\varepsilon - D)C + (B_{\mathcal{T}} - B_\varepsilon)C \geq (b_C - \mathrm{mult}_C(B_\varepsilon))C^2 > \varepsilon C^2$$

が成立する．$\varepsilon > 0$ は任意より，$(B_{\mathcal{T}} - D)C \geq 0$ となり，よって $B_{\mathcal{T}}$ は $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(D)$ の元であり，$\mathcal{T}$ の一つの上界である． □

補題 1.7 D を X 上の f-擬有効な $\mathbb{R}$-因子とする．このとき，任意の $B \in \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(D)$ に対し，$D - B$ は f-擬有効である．

証明　有効 $\mathbb{R}$-因子 D_n で $D_n \to D$ $(n \to \infty)$ なものを一つ取る．$D_n - B = G_n^+ - G_n^-$ と分解しておく．ここで，G_n^+，G_n^- は有効 $\mathbb{R}$-因子で共通の素因子を持たないとする．$D - B$ が f-擬有効であることを示すためには，$G_n^- \to 0$ $(n \to \infty)$ を示せばよい．$G_n^- \leq B$ より，G_n^- は負定値で f-例外的である．よって，

$$(B - D_n)G_n^- = (G_n^- - G_n^+)G_n^- \leq (G_n^-)^2 \leq 0$$

が成り立つ．$B - D_n$ と交点を取る写像の列 $\{(B - D_n)-\colon N_1(X/Y) \to \mathbb{R}\}_n$ はコンパクト部分集合 $K := \{E \mid 0 \leq E \leq B\}$ 上非負値関数 $(B - D)-$ に一様収束するので，$(B - D_n)G_n^- \to 0$ $(n \to \infty)$ が成立．特に $(G_n^-)^2 \to 0$ となり，G_n^- は負定値より，$G_n^- \to 0$ となる． □

X 上の f-擬有効 $\mathbb{R}$-因子 D に対し，$\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(D) \neq \emptyset$ ならば極大元を一つ取り，$N_{\mathbb{R}}$ と表す．$\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(D) = \emptyset$ のとき，$N_{\mathbb{R}} := 0$ とする．$P_{\mathbb{R}} := D - N_{\mathbb{R}}$ とおくと，これは補題 1.7 より f-擬有効である．

補題 1.8 $P_{\mathbb{R}}$ は f-ネフである．

証明　$N_{\mathbb{R}} = 0$ のとき，補題 1.3 より主張が従う．よって $N_{\mathbb{R}} > 0$ としてよい．ある f-例外的な既約曲線 C が存在して，$P_{\mathbb{R}}C < 0$ を満たすと仮定する．$P_{\mathbb{R}}$ は f-擬有効より，$C^2 < 0$ である．$\varepsilon > 0$ を $(P_{\mathbb{R}} - \varepsilon C)C < 0$ と取ると，$-P_{\mathbb{R}} = N_{\mathbb{R}} - D$ は $N_{\mathbb{R}}$ 上ネフより，$\varepsilon C + N_{\mathbb{R}} - D$ は $\varepsilon C + N_{\mathbb{R}}$ 上ネフとなる．今，$P_{\mathbb{R}}$ と交点を取る写像 $P_{\mathbb{R}}-\colon N_1(X/Y) \to \mathbb{R}$ は，$\varepsilon C + N_{\mathbb{R}}$ のサポートに含まれる素因子が生成する錐 $\mathcal{C}$ の上で非正値関数であり，$P_{\mathbb{R}}C < 0$ であるので，$P_{\mathbb{R}}$ の f-擬有効性から $\varepsilon C + N_{\mathbb{R}}$ は負定値であることが分かる（実際，負定値でないならば線形代数の議論で $\mathcal{C}$ の内部にネフなものが構成できる．cf. [1] Lemma A.12）．よって $\varepsilon C + N_{\mathbb{R}}$ は $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(D)$ の元であり，$N_{\mathbb{R}}$ の極大性に矛盾する． □

定理 1.1 の証明　補題 1.8 と $N_{\mathbb{R}}$ の定義より，$D = P_{\mathbb{R}} + N_{\mathbb{R}}$ は定理 1.1 の (i), (ii), (iii) を満たす．分解の唯一性は補題 1.5 から従う（$\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(D)$ が空でないならば最大元を持つことも分かる）．D が $\mathbb{Q}$-因子の場合は，$N_{\mathbb{R}} = \sum_i a_i C_i$ と表すと，$DC_j = \sum_i a_i(C_iC_j) \in \mathbb{Q}$ かつ $(C_iC_j)_{i,j}$ は負定値 $\mathbb{Q}$-係数行列より，$N_{\mathbb{R}}$，$P_{\mathbb{R}}$ は $\mathbb{Q}$-因子となる． □

次に定理 1.4 を示す．これも定理 1.1 と同じ証明方針で証明できる．D を X 上の f-擬有効な $\mathbb{R}$-因子とし，$D = P_{\mathbb{R}} + N_{\mathbb{R}}$ を定理 1.1 で得られたザリスキー分解とする．

補題 1.9 $\mathcal{N}_{\mathbb{Z}}(D)$ は空でないならば，最大元を持つ．

証明　$\mathcal{N}_{\mathbb{Z}}(D)$ の元は全て整数係数で $N_{\mathbb{R}}$ に含まれるので，$\mathcal{N}_{\mathbb{Z}}(D)$ は有限集合であることが分かる．$\mathcal{N}_{\mathbb{Z}}(D)$ の 2 つの元 $B = \sum_i b_iC_i$，$B' = \sum_i b'_iC_i$ を任意に取り，$B'' := \sum_i \max\{b_i, b'_i\}C_i$ とおく．各素因子 $C_i \leq B''$ に対し，もし $b'_i \leq b_i$ であれば，

$$(B'' - D)C_i = (B - D)C_i + (B'' - B)C_i \geq 0$$

となり，$b_i \leq b'_i$ の場合も同様に $(B'' - D)C_i \geq 0$ がいえる．よって B'' は $\mathcal{N}_{\mathbb{Z}}(D)$ の元である．これを 2 つの極大元 B，B' に適用して，主張が従う． □

$\mathcal{N}_{\mathbb{Z}}(D) \neq \emptyset$ のとき，$\mathcal{N}_{\mathbb{Z}}(D)$ の最大元を $N_{\mathbb{Z}}$ と表し，$\mathcal{N}_{\mathbb{Z}}(D) = \emptyset$ のとき，$N_{\mathbb{Z}} := 0$ と表す．$P_{\mathbb{Z}} := D - N_{\mathbb{Z}}$ とおく．分解 $P_{\mathbb{Z}} = P_{\mathbb{R}} + (N_{\mathbb{R}} - N_{\mathbb{Z}})$ は $P_{\mathbb{Z}}$ のザリスキー分解を与えることに注意する．

補題 1.10 $P_{\mathbb{Z}}$ は f-$\mathbb{Z}$-正である．

証明 $N_{\mathbb{R}} > 0$ と仮定してよい．もし $\mathcal{N}_{\mathbb{Z}}(P_{\mathbb{Z}})$ が元 B を持つならば，2 つの $P_{\mathbb{Z}}$ の分解 $P_{\mathbb{Z}} = P_{\mathbb{R}} + (N_{\mathbb{R}} - N_{\mathbb{Z}}) = (P_{\mathbb{Z}} - B) + B$ を考えると，$P_{\mathbb{R}}$ と $B - P_{\mathbb{Z}}$ は B 上ネフより，補題 1.5 から $B \leq N_{\mathbb{R}} - N_{\mathbb{Z}}$ となる．特に $B + N_{\mathbb{Z}}$ は負定値である．任意の素因子 $C \leq B + N_{\mathbb{Z}}$ に対し，$C \leq B$ のとき，$B - P_{\mathbb{Z}} = B + N_{\mathbb{Z}} - D$ は B 上ネフより，$(B + N_{\mathbb{Z}} - D)C \geq 0$ が成立する．C は B に含まれないとき，$C \leq N_{\mathbb{Z}}$ であり，$N_{\mathbb{Z}} - D$ は $N_{\mathbb{Z}}$ 上ネフより

$$(B + N_{\mathbb{Z}} - D)C = BC + (N_{\mathbb{Z}} - D)C \geq 0$$

が成立する．よって $B + N_{\mathbb{Z}}$ は $\mathcal{N}_{\mathbb{Z}}(D)$ の元であり，$N_{\mathbb{Z}}$ の最大性に矛盾する． □

定理 1.4 の証明 補題 1.10 より，分解 $D = P_{\mathbb{Z}} + N_{\mathbb{Z}}$ は定理 1.4 の条件 (i), (ii), (iii) を満たす．$D = P'_{\mathbb{Z}} + N'_{\mathbb{Z}}$ を (i), (ii), (iii) を満たす別の分解とする．$N'_{\mathbb{Z}} = 0$ ならば，$D = P'_{\mathbb{Z}}$ は f-$\mathbb{Z}$-正より $N_{\mathbb{Z}} = 0$ となるので，$N'_{\mathbb{Z}} > 0$ としてよい．このとき条件 (iii) より，$N'_{\mathbb{Z}}$ は $\mathcal{N}_{\mathbb{Z}}(D)$ の元であり，従って $N'_{\mathbb{Z}} \leq N_{\mathbb{Z}}$ となる．もし $N'_{\mathbb{Z}} < N_{\mathbb{Z}}$ とすると，$N_{\mathbb{Z}} - N'_{\mathbb{Z}}$ は $\mathcal{N}_{\mathbb{Z}}(P'_{\mathbb{Z}})$ の元となり，$P'_{\mathbb{Z}}$ は f-$\mathbb{Z}$-正であることに矛盾．よって $N_{\mathbb{Z}} = N'_{\mathbb{Z}}$，$P_{\mathbb{Z}} = P'_{\mathbb{Z}}$ が成立する． □

1.2 $\mathbb{Z}$-正因子について

X 上の $\mathbb{R}$-因子 A, B で $A - B$ は f-例外的な有効因子なものに対し，$\mathbb{R}$-因子の列 $B = D_0 < D_1 < \cdots < D_m = A$ が B **から** A **への連結鎖**であるとは，任意の $i = 1, \ldots, m$ に対し，$C_i := D_i - D_{i-1}$ は素因子であり $D_{i-1}C_i > 0$ を満たすときにいう．便宜上 $m = 0$ の場合も，$B = A$ を B から A への連結鎖と呼ぶ．次の命題は f-擬有効 $\mathbb{R}$-因子が f-$\mathbb{Z}$-正であることの特徴付けである．証明は簡単であるが，省略する．

命題 1.11 D を X 上の f-擬有効 $\mathbb{R}$-因子とし，$D = P + N$ をザリスキー分解とする．このとき，次は同値である．

(1) D は f-$\mathbb{Z}$-正である．

(2) 任意の $D - \llcorner N \lrcorner \leq D_0 \leq D$ で $D - D_0$ は $\mathbb{Z}$-因子なものに対し，ある D_0 から D への連結鎖が存在する．

(3) $D - \llcorner N \lrcorner$ から D への連結鎖が存在する．

注意 1.12 命題 1.11 から，通常のザリスキー分解 $D = P + N$ から整ザリスキー分解 $D = P_{\mathbb{Z}} + N_{\mathbb{Z}}$ が次のように構成されることが分かる．まず $D_0 := D - \llcorner N \lrcorner$ とおく．もし $-D_0$ は $N_0 := \llcorner N \lrcorner$ 上ネフならば，分解 $D = D_0 + N_0$ は整ザリスキー分解となる．$-D_0$ は

N_0 上ネフでないとき，ある素因子 $C_1 \leq N_0$ が存在し，$D_0C_1 > 0$ が成立する．このとき，$D_1 := D_0 + C_1$ とおく．$-D_1$ は $N_1 := N_0 - C_1$ 上ネフのとき，$D = D_1 + N_1$ は整ザリスキー分解となる．$-D_1$ は N_1 上ネフでないとき，ある素因子 $C_2 \leq N_1$ が存在し，$D_1C_2 > 0$ が成立する．この操作を繰り返して，連結鎖 $D_0 < D_1 < \cdots < D_m$ と整ザリスキー分解 $D = D_m + N_m$ を得る．

系 1.13 M を X 上の f-ネフ $\mathbb{R}$-因子とする．このとき，$D = \ulcorner M \urcorner$ は f-$\mathbb{Z}$-正である．

証明 f-擬有効な $\mathbb{Z}$-因子 D に対し，D はある f-ネフ $\mathbb{R}$-因子 M の切り上げで書けることと，D のザリスキー分解 $D = P + N$ の負部分 N は $\llcorner N \lrcorner = 0$ となることは同値である．実際，$D = \ulcorner M \urcorner$ のとき，2 つの分解 $D = M + Z = P + N$ に補題 1.5 を用いて，$N \leq Z$ を得る．従って $\llcorner N \lrcorner = 0$．よって，主張は命題 1.11 より分かる． □

$\mathbb{Z}$-正性の重要な性質として，双有理射での（Mumford の意味の）引き戻しの切り上げで保たれるというものがある．証明は初等的であるが，省略する．

命題 1.14 $\pi\colon X' \to X$ を正規曲面の間の双有理射とする．このとき，f-$\mathbb{Z}$-正な f-擬有効 $\mathbb{Z}$-因子 D に対し，$\ulcorner \pi^* D \urcorner$ は $(f \circ \pi)$-$\mathbb{Z}$-正である．

2 応用

この節では，整ザリスキー分解のいくつかの応用を述べる．$f\colon X \to Y$ は引き続き正規曲面 X から代数多様体 Y への固有な全射とする．さらに $\dim(Y) = 0$ のとき，基礎体 k は標数 0 と仮定する（但し，代数閉体とは仮定しない）．

2.1 小平型消滅定理

ザリスキー分解 $D = P + N$ は，mD, $m \gg 0$ に関するコホモロジーの漸近的な振る舞いと関係している．実際，非特異射影曲面 X 上の巨大な因子 D に対し，D の切断環 $R(X, D) = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} H^0(X, \mathcal{O}_X(mD))$ は有限生成であることと，P は半豊富であることは同値であることが知られている（cf. [6] Corollary 2.3.23）．また，宮岡消滅定理 [7] より，任意の $m > 0$ に対し，$K_X + \ulcorner mP \urcorner$ の高次コホモロジーは全て消滅する．一方で，整ザリスキー分解 $D = P_{\mathbb{Z}} + P_{\mathbb{Z}}$ は，D そのものに関するコホモロジーと密接に関係している．実際に，以下の消滅定理を示すことが出来る（証明は [1] を見よ）．

定理 2.1 (消滅定理) D を X 上の f-巨大な因子とし，$D = P_{\mathbb{Z}} + N_{\mathbb{Z}}$ を定理 1.4 の整ザリスキー分解とする．$N_{\mathbb{Z}}$ 上の層 $\mathcal{L}_D$ を自然な単射 $\mathcal{O}_X(K_X + P_{\mathbb{Z}}) \to \mathcal{O}_X(K_X + D)$ の余核と定義すると，次の同型が成立する：

$$R^1 f_* \mathcal{O}_X(K_X + D) \cong R^1 f_* \mathcal{L}_D.$$

注意 2.2 (1) D は f-巨大より，$i \geq 2$ のとき $R^i f_* \mathcal{O}_X(K_X + D) = 0$ はいつでも成り立つことに注意する．特に，D は f-巨大で f-$\mathbb{Z}$-正な因子のとき，$K_X + D$ の高次コホモロジー（順像）は全て消滅することが分かる．系 1.13 より，これは曲面の場合の川又-Viehweg 消滅定理の一般化である．

(2) $\dim(Y) = 0$ で X は非特異の場合は，本質的に宮岡消滅定理 [7] と同じである．また X は $\mathbb{C}$ 上の射影曲面の場合は，Langer の消滅定理（[5] Theorem 3.2 とその Remark）と本質的に同じである．但し，Langer の証明（階数 2 のベクトル束を使う Reider の手法を反射的層の場合に拡張する）と比べると，我々の証明（川又-Viehweg 消滅定理と命題 1.14 を用いる）の方がはるかに初等的である．

(3) $\dim(Y) \geq 1$ のときは，基礎体 k は正標数でもよいことに注意する．このときは，上の消滅定理は酒井 [11] や Kollár-Kovács [4] の局所消滅定理の一般化になっている．但し，証明の方針（形式的函数定理を用いる）は全く同じである．

2.2 Reider 型定理

Reider の定理 [10] は，非特異射影曲面 X 上のネフかつ巨大な因子 D に対し，その随伴線形系 $|K_X + D|$ が点 $x \in X$ を基底点に持てば，その点を通る曲線 B である数値的な条件を満たすものが存在する，という形の定理であった．この定理は多くの方々により（X が特異点を持つ場合，D がネフとは限らない場合，一般の 0 次元部分スキームを分離しない場合に）一般化されている．ここで述べる結果もこの形の一般化である．主結果を述べる前に，いくつかの定義をしておく．

定義 2.3 $\zeta \subset X$ を 0 次元部分スキームとする．$\pi\colon X' \to X$ を ζ に含まれる X の特異点の解消，$Z > 0$ を π-例外的な有効因子で $\pi_* \mathcal{O}_{X'}(-Z)$ は ζ の定義イデアル $\mathcal{I}_\zeta$ に含まれると仮定する．このような組 (π, Z) に対し，$\delta_\zeta(\pi, Z) \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ を

$$\delta_\zeta(\pi, Z) := \begin{cases} -(\Delta - Z)^2 & (\Delta - Z \text{ は有効でない}), \\ 0 & (\Delta - Z \text{ は有効}), \end{cases}$$

と定義する．ここで，$\Delta := \pi^* K_X - K_{X'}$ は π-例外的な $\mathbb{Q}$-因子であり，反標準サイクルと呼ばれる．$\delta_\zeta := \min_{(\pi,Z)} \delta_\zeta(\pi, Z)$ とおく．但し，(π, Z) は上記のような組を全て渡る．

注意 2.4 δ_ζ を計算するのは，一般に難しい．但し，以下で述べる定理のためには，δ_ζ を上から評価して使えば十分であり，一つの (π, Z) でのみ計算が出来ればよい．例えば，$\zeta = x$ は X の非特異点のとき，π を x でのブローアップ，Z をその例外曲線とすると，$\delta_x(\pi, Z) = 4[k(x) : k]$ となる．もっと一般に，(X, x) は対数的端末特異点のとき，$\delta_\zeta \leq 2[k(x) : k]$ であり，それ以外の特異点のとき，$\delta_\zeta = 0$ である．また，ζ は X の特異点を含まず，$\dim_k H^0(\mathcal{O}_\zeta) \leq 2$ のとき，$\delta_\zeta \leq 8$ も簡単に計算できる．

定理 2.5 (Reider 型定理 I) D を X 上の f-巨大な因子とし，$D = P + N$ （resp. $D = P_{\mathbb{Z}} + N_{\mathbb{Z}}$）を（resp. 整）ザリスキー分解とする．$\zeta \subset X$ を 0 次元部分スキームで $K_X + D$ は ζ の近傍上カルティエなものとする．$\dim(Y) = 0$ のとき，さらに $P^2 > \delta_\zeta$（resp. $P_{\mathbb{Z}}^2 > \delta_\zeta$）と仮定する．このとき，制限写像 $f_*\mathcal{O}_X(K_X + D) \to f_*(\mathcal{O}_X(K_X + D)|_\zeta)$ は全射でないならば，ある f-例外的な有効因子 $B > 0$ で ζ と交わるものが存在して，$(D - B)B \leq \delta_\zeta/4$（resp. かつ $D + N_{\mathbb{Z}} - 2B$ は巨大）を満たす．

注意 2.6 定理 2.5 は一般的に述べてあるので，分かり辛い形をしているが，例えば $k = \mathbb{C}$，X は非特異，$Y = \operatorname{Spec}\mathbb{C}$，$D$ はネフ，$\dim_k H^0(\mathcal{O}_\zeta) \leq 2$ とすると，オリジナルの Reider の定理となる．Reider 型定理の中で，最も一般化されている Langer による結果 [5]（X は $Y = \operatorname{Spec}\mathbb{C}$ 上の正規射影曲面，D, ζ は定理 2.5 と同じ）と比べると，基礎体 k は代数閉体でなくてもよい，$\dim(Y) \geq 1$ でもよい，$\dim(Y) = 0$ のときも X は射影的である必要はない，という所が一般化されている（但し，[5] で定義されている δ_ζ は我々のものとは微妙に異なり，我々の δ_ζ の方が見かけ上評価が悪い．どちらも一般には計算可能な形ではなく，本当に違いがあるのかは良く分かっていない）．

定理 2.5 の証明の概略　証明は定理 2.1 を用いて非常に簡単に示せる．簡単のため，Y は 0 次元とし，D はネフと仮定する．$\delta_\zeta = \delta_\zeta(\pi, Z)$ となるような双有理射 $\pi\colon X' \to X$ と π-例外的因子 $Z > 0$ を取る．$H^0(\mathcal{O}_X(K_X + D)) \to H^0(\mathcal{O}_X(K_X + D)|_\zeta)$ は全射でないと仮定すると，$H^1(\mathcal{I}_\zeta(K_X + D)) \neq 0$ である．すると，Leray スペクトル系列を用いて，$H^1(\mathcal{O}_{X'}(K_{X'} + D')) \neq 0$ となる．但し，$D' := \pi^*D + \Delta - Z$ と定義する．仮定 $D^2 > \delta_\zeta$ より，D' は巨大となる．よって定理 2.1 より，D' は $\mathbb{Z}$-正でないことが分かる．$N_{\mathbb{Z}} > 0$ を D' の整ザリスキー分解の $\mathbb{Z}$-負部分とし，$B := \pi_*N_{\mathbb{Z}}$ とおく．これが定理 2.5 を満たす有効因子であることが確かめられる．□

定理 2.5 の系として，Reider の基底点自由定理の相対版が得られる．

系 2.7 $f\colon X \to Y$ を代数閉体 k 上定義される非特異曲面 X から代数多様体 Y への固有な全射とし，D を X 上の f-ネフな因子とする．$\dim(Y) = 0$ のときは，基礎体 k は標数 0 とし，$D^2 > 4$ と仮定する．このとき，$f_*\mathcal{O}_X(K_X + D)$ の任意の基底点 $x \in X$ に対し，x を通る f-例外的な有効因子 B が存在し，次のどちらかを満たす．

(i) $DB = 0$ かつ $B^2 = -1$.

(ii) $DB = 1$ かつ $B^2 = 0$（$\dim(Y) \leq 1$ のとき）.

特に，f は相対極小（つまり K_X は f-ネフ）で $\dim(Y) \geq 1$ または $K_X^2 > 4$ のとき，$f^*f_*\mathcal{O}_X(mK_X) \to \mathcal{O}_X(mK_X)$ は $m \geq 2$ で全射である．

定理 2.5 で得られる有効因子 B は f-例外的なので，$\dim(Y) \geq 1$ の場合は自動的に半負定値となるが，絶対的な場合では，一般には半負定値になるとは限らない．しかし，次に述べるように，D^2 が適当に大きければ，B は半負定値になってしまうことが示せる．以下では $\dim(Y) = 0$ とし，X は標数 0 の体 k 上固有な正規曲面とする．

定義 2.8 関数 $\mu\colon \mathbb{R}^2_{>0} \to \mathbb{R}$ を，

$$\mu(x,d) := \min\{x,d\}\left(\frac{d}{\min\{x,d\}}+1\right)^2$$

とおく．これは x に関し非増加関数であり，d に関し単調増加関数である．

0 次元部分スキーム $\zeta \subset X$ に対し，

$$q_\zeta := \min\{E^2 \mid E \text{ は } X \text{ 上の有効 } \mathbb{Z}\text{-因子で } \zeta \text{ と交わり，} E^2 > 0\}$$

とおき，$\delta'_\zeta := \mu(q_\zeta, \delta_\zeta/4)$ と定義する．$\delta'_\zeta \geq \delta_\zeta$ であり，等号成立することは $q_\zeta \geq \delta_\zeta/4$ と同値である．

例 2.9 X は非特異とする．このとき，$\dim_k H^0(\mathcal{O}_\zeta) = 1$ ならば $\delta'_\zeta = \delta_\zeta = 4$ であり，$\dim_k H^0(\mathcal{O}_\zeta) = 2$ ならば $(\delta_\zeta, \delta'_\zeta) = (8,8)$ または $(8,9)$ である．

定理 2.10 (Reider 型定理 II) D を X 上のネフかつ巨大な因子とし，ζ を X の 0 次元部分スキームで K_X+D は ζ の近傍でカルティエとなるものする．$D^2 > \delta'_\zeta$（resp. $D^2 = \delta'_\zeta > \delta_\zeta$）と仮定する．このとき，$H^0(\mathcal{O}_X(K_X+D)) \to H^0(\mathcal{O}_X(K_X+D)|_\zeta)$ は全射でなければ，ある半負定値な有効因子 B で ζ と交わるものが存在し，$0 < (D-B)B \leq \delta_\zeta/4$ かつ $D-2B$ は巨大となる（resp. または，$B^2 = q_\zeta$ かつ $D \equiv (\delta_\zeta/4q_\zeta + 1)B$ を満たす）．

注意 2.11 定理 2.10 は，後に述べる拡張定理の証明で必要となる．定理 2.10 の証明は，定理 2.5 と Hodge 指数定理を組み合わせるだけであるが，Reider 型定理で B の半負定値性まで込めた主張は，これまであまり言及されていなかった．

2.3 射の拡張定理

固有な正規曲面 X に対し，

$$q_X := \min\{E^2 \mid E \text{ は } X \text{ 上の有効 } \mathbb{Z}\text{-因子で } E^2 > 0 \text{ を満たす}\}$$

とおく．定理 2.10 の応用として，次の拡張定理が示せる．

定理 2.12 (拡張定理) X を標数 0 の体 k 上固有な正規曲面とし，$D > 0$ を X 上の有効因子で，任意の既約成分は正の自己交点数を持つとする．$\varphi\colon D \to \mathbb{P}^1$ を次数 d の有限射とする．このとき，$D^2 > \mu(q_X, d)$ ならば，ある射 $\psi\colon X \to \mathbb{P}^1$ で $\psi|_D = \varphi$ なものが存在する．

注意 2.13 (1) 定理 2.12 は，Serrano-Paoletti の拡張定理 [12], [9]（X は $k = \overline{k}$ 上滑らかで D は素因子の場合）の一般化である．Serrano の証明（宮岡消滅定理を使う方法）と Paoletti の証明（Bogomolov 不等式を使う Reider の手法）は全く異なる．定理 2.12 の証明は Serrano の手法の一般化にあたる．

(2) 定理 2.12 は，φ が任意の k-スキームへの射の場合に一般化できる．また，$D^2 = \mu(q_X, d)$ かつ $q_X < d$ のとき，$\varphi\colon D \to \mathbb{P}^1$ は，基底点の少ない有理写像 $\psi\colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ に拡張できることも示せる．

定理 2.12 の証明の概略　X, D, $\varphi\colon D \to \mathbb{P}^1$ を定理 2.12 のものとする．このとき，任意の $\lambda \in \mathbb{P}^1$ に対し，$\dim_k H^0(\mathcal{O}_D(\varphi^{-1}(\lambda))) \geq 2$ より，$H^0(\mathcal{O}_X(K_X + D)) \to H^0(\mathcal{O}_X(K_X + D)|_{\varphi^{-1}(\lambda)})$ は全射でないことが分かる．また，一般の k-有理点 $\lambda \in \mathbb{P}^1$ に対し，$\delta_{\varphi^{-1}(\lambda)} \leq 4d$ であることが計算できる．すると D^2 の仮定より，定理 2.10 を $\zeta = \varphi^{-1}(\lambda)$ として適用でき，半負定値な有効因子 B_λ で定理 2.10 の条件を満たすものが存在する．さらに D の既約成分が正の自己交点数を持つので，簡単な計算により，$B_\lambda^2 = 0$ が分かり，$D \cap B_\lambda$ が部分スキームとして $\varphi^{-1}(\lambda)$ に含まれることが示せる．よって，無限個の k-有理点 $\lambda \in \mathbb{P}^1$ に対し得られた B_λ は X 上の互いに交わらない曲線の族をなし，ヒルベルトスキームの議論から，ある曲線族 $f\colon X \to Y$ で B_λ の既約成分たちが f のファイバーとなるものを構成できる．このとき，自然な射 $\gamma\colon Y \to \mathbb{P}^1$ が存在し，$\psi := \gamma \circ f$ が φ の拡張になることが確かめられる．　$\square$

定理 2.12（やその基底点付きの拡張定理）の応用として，曲面上の（非特異や既約，被約とも限らないような）曲線の（擬）ゴナリティーの下限を色々な状況で求めることが出来る．ここで，曲線（体 k 上固有な 1 次元スキーム）C に対し，**擬ゴナリティー** $\mathrm{pgon}(C)$ を，

$$\mathrm{pgon}(C) := \min\{s \mid \text{ある次数 } s \text{ の有限射 } C \to \mathbb{P}^1 \text{ が存在する}\}$$

と定義する．例えば，次のようなことを示すことが出来る．

命題 2.14　$D \subset \mathbb{P}^2$ を m 次の平面曲線とする．このとき，$\mathrm{pgon}(D)$ は $m-1$ または m であり，$\mathrm{pgon}(D) = m-1$ であることと，非特異な D の k-有理点で D に含まれる直線上にないものが存在することは同値である．

命題 2.15　$D = \{F(x_0, x_1, x_2) = 0\} \subset \mathbb{P}(a_0, a_1, a_2)$ を次数 m の重み付き平面曲線とする．ここで，各 x_i の重み a_i は，どの 2 組も互いに素であるとしておく．$m_{(a_0,a_1,a_2)}$ を，有理式 $(1-t^{a_0})^{-1}(1-t^{a_1})^{-1}(1-t^{a_2})^{-1}$ の t^l の係数が 2 以上となるような最小の l と定義する．D は $a_i < m_{(a_0,a_1,a_2)}$ となる直線 $\{x_i = 0\}$ を含まないと仮定する．このとき，次のどちらかが成立する．

(i) $m^2/4a_0a_1a_2 \leq \mathrm{pgon}(D) \leq m_{(a_0,a_1,a_2)}^2/a_0a_1a_2$.

(ii) $\mathrm{pgon}(D) \geq m_{(a_0,a_1,a_2)}(m - m_{(a_0,a_1,a_2)})/a_0a_1a_2$ かつ $\mathrm{pgon}(D) > m_{(a_0,a_1,a_2)}^2/a_0a_1a_2$.

これらの結果は，古典的な結果である “ $\mathbb{C}$ 上滑らかな m 次平面曲線のゴナリティーは $m-1$ である” ことの一般化である．他の応用に関しては，論文 [1] を参照されたい．

謝辞　城崎代数幾何シンポジウムで講演の機会を与えて下さった世話人の伊藤敦先生，佐藤拓先生，那須弘和先生にお礼を申し上げます．私は JSPS Grant-in-Aid for Research Activity Start-up: 19K23407 から援助を受けています．

参考文献

[1] M. Enokizono, An integral version of Zariski decompositions on normal surfaces, arXiv:2007.06519.

[2] T. Fujita, On Zariski problem, Proc. Japan Acad. Ser. A **55** (1979), 106–110.

[3] S. L. Kleiman, Toward a numerical theory of ampleness, Ann. of Math. **84** (1966), 293–344.

[4] J. Kollár and S. Kovács, Birational geometry of log surfaces, Preprint.

[5] A. Langer, Adjoint linear systems on normal log surfaces, Compositio Math. **129** (2001), 47–66.

[6] R. Lazarsfeld, *Positivity in algebraic geometry. I. Classical setting: line bundles and linear series*, Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics, **48**. Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[7] Y. Miyaoka, On the Mumford-Ramanujam vanishing theorem on a surface, Journées de Géometrie Algébrique d'Angers, Juilet 1979/Algebraic Geometry, Angers, 1979, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn,1980, pp. 239–247.

[8] D. Mumford, The topology of normal surface singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity, Publ. Math. IHES. **9** (1961), 5–22.

[9] R. Paoletti, Free pencils on divisors, Math. Ann. **303** (1995), 109–123.

[10] I. Reider, Vector bundles of rank 2 and linear systems on algebraic surfaces, Ann. of Math. **127** (1988), 309–316.

[11] F. Sakai, Weil divisors on normal surfaces, Duke. Math. J. **51** (1984), 877–887.

[12] F. Serrano, Extension of morphisms defined on divisors, Math. Ann. **277** (1987), 395–413.

[13] O. Zariski, The theorem of Riemann-Roch for high multiples of an effective divisor on an algebraic surface, Ann. of Math. (2) **76** (1962), 560–615.