STABILITY CONDITIONS AND MORPHISMS IN A CATEGORY

川谷康太郎

1. 導入

城崎代数幾何シンポジウム 2020 での講演の機会をいただき, 世話人の方々に感謝いたします. 本稿では, 著者の最近の研究テーマである「射の圏」に関する研究を紹介します. ここで「射の圏」は, ある三角圏の射を対象とする三角圏を意味します. なぜ「射の圏」を考えるに至ったか, その経緯に重点を置き解説します. 細かい部分は, 参考文献をご覧ください.

2. 安定性条件

以下, 本稿では $\mathbf{D}$ を三角圏で, $\mathbf{D}$ の K_0 群 $K_0(\mathbf{D})$ は $\mathbb{Z}$ 上有限生成とする[1]. また $\sigma = (\mathcal{A}, Z)$ で, $\mathcal{A}$ を $\mathbf{D}$ の有界な t-構造の核とし, 加法群準同型 $Z\colon K_0(\mathbf{D}) \to \mathbb{C}$ は次を満たすとする:

$$\forall E \in \mathcal{A} \setminus \{0\}, 0 < \frac{1}{\pi} \arg Z(E) \leq 1. \tag{2.1}$$

$E \in \mathbf{D}$ の時, E の定める類 $[E] \in K_0(\mathbf{D})$ に対し $Z([E])$ を単に $Z(E)$ と書く. また代数多様体 X の連接層の有界導来圏を $\mathbf{D}^b(X)$ とする.

注意 2.1. 本稿執筆中に, 発表当日のスライドで (2.1) において $\frac{1}{\pi} \arg Z(E)$ と書くべきを誤って $\arg Z(E)$ と書いていたことに気がついた. この場を借りてお詫びしたい.

定義 2.2 ([Bri07])**.** $\sigma = (\mathcal{A}, Z)$ に対し,

(1) $E \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ が **σ-半安定** (σ-semistable) であるとは, 任意の非自明な E の部分対象 $F \subset E$ に対し $\arg Z(F) \leq \arg Z(E)$ が成り立つことである. 特に真に小さい不等号 $\arg Z(F) < \arg Z(E)$ が成立する時 **σ-安定** (σ-stable) と呼ぶ.

(2) $E \in \mathbf{D}$ が **σ-(半) 安定** (σ-*(semi)stable*) であるとは, ある $k \in \mathbf{Z}$ により $E[k] \in \mathcal{A}$ かつ $E[k]$ は σ-(半) 安定となることである.

(3) σ が次の条件を満たすときに, $\mathbf{D}$ 上の安定性条件と呼ぶ:
   - $\forall E \in \mathcal{A}, \exists$ a filtration $0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_{n-1} \subset E_n$ s.t. $A_i := E_i/E_{i+1}$ is σ-semistable with $\arg Z(A_i) > \arg Z(A_{i+1})$.

[1] $\operatorname{rank} K_0(\mathbf{D}) = \infty$ の時は, $K_0(\mathbf{D})$ の代わりにオイラー標数に関する同値類による商である数値的 K_0 群 $\mathcal{N}(\mathbf{D})$ に取り替えれば良い.

注意 2.3. 安定性条件の公理は, $E \in \mathbf{D}$ の σ-半安定対象達の拡大 (extension) への (一意的な) 分解を保証している. しかし, 実際には半安定対象への分解だけでは不都合なことが多いので, 半安定対象の安定対象への分解を保証する「局所有限性 (locally finiteness)」が必要である[2].

加えて局所有限性だけでは「安定性条件の族」を扱う際に連続性を論じることが困難なので, 安定性条件に「台条件 (support property)」(cf. 定義 2.4) を課すことが多い. 当初, 台条件は補助的な条件であったが, 最近の文献では安定性条件の定義に含める場合がある. 文献を読む際に注意が必要である.

定義 2.4. $K_0(\mathbf{D}) \otimes \mathbb{R}$ 上のノルム $\| * \|\colon K_0(\mathbf{D}) \otimes \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を一つ固定する. $\mathbf{D}$ 上の安定性条件 σ が**台条件を満たす**とは次が成り立つことである:

$$\sup \left\{ \frac{\|[E]\|}{|Z(E)|} \middle| E \text{ は } \sigma\text{-半安定} \right\} < \infty.$$

注意 2.5. 安定性条件 σ が台条件を満たせば局所有限となる. また $\operatorname{rank} K_0(\mathbf{D})$ は有限と仮定していたので, 台条件は $K_0(\mathbf{D}) \otimes \mathbb{R}$ のノルムの選び方にはよらない.

定理 2.6 ([Bri07])**.** *$\mathsf{Stab}\,\mathbf{D}$ を $\mathbf{D}$ 上の局所有限な安定性条件のなす集合とする.*

(1) $\mathsf{Stab}\,\mathbf{D}$ *は位相空間である.*

(2) $\mathsf{Stab}\,\mathbf{D}$ *の各連結成分は, 空でなければ*[3]*複素多様体である.*

注意 2.7. 複素構造について簡単に解説したい. Bridgeland [Bri07] は次を示した.

- $\forall \sigma \in \mathsf{Stab}\,\mathbf{D}$, $\exists V_\sigma \subset \operatorname{Hom}(K_0(\mathbf{D}), \mathbb{C})$ s.t. $\pi|_{\pi^{-1}V_\sigma}$ は局所同型.

特に $V_\sigma = \operatorname{Hom}(K_0(\mathbf{D}), \mathbb{C})$ となるとき, σ を **full** と呼ぶ. Bayer-Macri により $\sigma \in \mathsf{Stab}\,\mathbf{D}$ が full であることと, $\sigma \in \mathsf{Stab}\,\mathbf{D}$ が台条件を満たすことは同値である ([BM11, Appendix B.2]).

安定性条件の集合 $\mathsf{Stab}\,\mathbf{D}$ が空でない, という仮定は重要である. というのも, 安定性条件を持たない三角圏の例は非常にたくさん存在する. その一例として次が成り立つ:

定理 2.8 ([Kaw20, Corollary 3.9])**.** *R をネター環とする. この時 $\operatorname{Spec} R$ の連接層の有界導来圏 $\mathbf{D}^b(\operatorname{Spec} R)$ について次が成り立つ:*

$$\mathsf{Stab}\,\mathbf{D}^b(\operatorname{Spec} R) \neq \emptyset \iff \dim R = 0.$$

ただし, 滑らかで射影的な代数多様体 X の導来圏 $\mathbf{D}^b(X)$ では安定性条件の存在が期待されている. 実際, $\dim X \leq 2$ ならば正しく, $\dim X = 3$ の場合は部分的に正しいことが知られている. 例えば Li [Li19] は, ミラー対称性予想において重要な $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ の 5 次超曲面の場合に安定性条件の存在を示した.

[2]局所有限性の定義は [Bri07] に譲る.

[3]空集合を複素多様体に含めることもあるが, ここでは含めないものとする.

他方, 安定性条件の存在と代数多様体の幾何学的性質の関係は, ほとんど研究されていない. この方向性を表す問題として次が考えられる.

問題 2.9. 体 $\mathbf{k}$ 上の代数多様体 X の導来圏 $\mathbf{D}^b(X)$ について $\mathsf{Stab}\,\mathbf{D}^b(X)$ が空でなければ, X は $\mathbf{k}$ 上完備か？

定理 2.8 は, 安定性条件の存在と代数多様体に関するある種の有限性の関係の暗示であろう. 極めて安易ではあるが, 安定性条件が存在するような代数多様体は射影的や完備性のような有限性に関する性質を満たすことを期待している.

ここで, 最も容易な安定性条件の例を紹介する.

例 2.10. $(R, \mathfrak{m})$ を剰余体 $\mathbf{k}$ を持つアルティン局所環とし, $\mathbf{D}_0 = \mathbf{D}^b(\operatorname{Spec} R)$ とする. ここで $\sigma = (\mathcal{A}, Z)$ を次の様に定める: $\mathcal{A}$ を有限生成 R 加群のなすアーベル圏 $\operatorname{mod} R$ とし, $Z\colon K(\mathbf{D}_0) \to \mathbb{C}$ を $0 < \arg Z(\mathbf{k}) \leq \pi$ を満たす様に一つ固定する. ここで任意の対象 $M \in \operatorname{mod} R$ は $\mathbf{k}$ の拡大を繰り返すことで得られるので, $\mathbf{k}$ の値 $Z(\mathbf{k})$ を決めれば $Z(M) = \ell \cdot Z(\mathbf{k})$ なので $Z(M)$ は一意的に決まることに注意する. ただし ℓ は M の長さである.

すると組 σ_0 は, 条件 (2.1) を満たす. また任意の $M \in \operatorname{mod} R$ について $Z(M) = \ell \cdot Z(\mathbf{k})$ から, $\arg Z(M) = \arg Z(\mathbf{k})$ となる. 従って全ての非零対象は σ-半安定となり, 定義 2.2 の条件 (3) を満たすので σ は安定性条件となる. 従って $\mathsf{Stab}\,\mathbf{D}_0 \neq \emptyset$ である. より詳しく $\mathsf{Stab}\,(\mathbf{D}_0) \cong \mathbb{C}$ である ([Kaw20, Proposition 3.7]).

注意 2.11. 例 2.10 の様に, 安定性条件の空間の大域的な記述を与えることは基本的に困難である. 困難さの要因として以下の 2 点が考えられる:

(1) 安定性条件の空間の非関手性
(2) モジュライ解釈の非存在

まず, 三角圏 $\mathbf{D}$ に対して安定性条件の空間 $\mathsf{Stab}\,\mathbf{D}$ を対応させる操作は関手的ではない. つまり三角圏の間の完全関手は, 一般には安定性条件の空間の間の写像を導かない. またベクトル束などのモジュライのように, 然るべき関手を安定性条件の空間が表現しているか否かも不明である. この様に, 三角圏 $\mathbf{D}$ の安定性条件の空間 $\mathsf{Stab}\,\mathbf{D}$ と, 別の空間 (例えば代数多様体や複素多様体, より一般に位相空間など) との間に連続写像を構成する系統的な手法が知られていない. そのため通常の代数幾何学のように, $\mathsf{Stab}\,\mathbf{D}$ を相対的に研究する手法を適応出来ないので, 大域的な解析に困難が生じる.

3. 射の圏への動機付け

安定性条件の空間の大域的な記述は困難ではあるが, 指針となる作業仮説が知られている. 本節ではその紹介を通して, 三角圏 $\mathbf{D}$ の射を対象とする三角圏を考える動機について述べる. まず, 作業仮説の主張は以下である.

作業仮説 3.1. 任意の三角圏 $\mathbf{D}$ について $\mathsf{Stab}\,\mathbf{D}$ は空でなければ可縮である.

3.1. **作業仮説の背景.** Bridgeland は K3 曲面 S の導来圏 $\mathbf{D}^b(S)$ に対し, $\mathsf{Stab}\,\mathbf{D}^b(S)$ の明示的な連結成分 $\mathsf{Stab}^\dagger\mathbf{D}^b(S)$ を構成し, 次を示した:

定理 3.2. 明示的な領域 $\mathcal{P}_0^+(S) \subset \bigoplus_{i=0}^2 H^{2i}(S,\mathbb{C})$ と被覆写像 $\pi\colon \mathsf{Stab}^\dagger\mathbf{D}^b(S) \to \mathcal{P}_0^+(S)$ が存在する.

加えて以下の予想を提示した.

予想 3.3 ([Bri08, Conjecture 1.2])**.** S を K3 曲面とする.

(1) 任意の圏同値 $\Phi\colon \mathbf{D}^b(S) \to \mathbf{D}^b(S)$ は連結成分 $\mathsf{Stab}^\dagger\mathbf{D}^b(S)$ を保つ.
(2) $\mathsf{Stab}\,\mathbf{D}^b(S)$ は単連結である.

予想が正しければ, π の被覆変換群 $\mathrm{Cov}(\pi)$ は底空間の基本群 $\pi_1(\mathcal{P}_0^+(S))$ と一致する. $\mathsf{Aut}\,\mathbf{D}^b(S)$ は $\mathsf{Stab}\,\mathbf{D}^b(S)$ に作用するので, 同型 $\mathrm{Cov}(\pi) \cong \pi_1(\mathcal{P}_0^+(S))$ を用いて, $\mathsf{Aut}\,\mathbf{D}^b(S)$ を幾何学的に解析することが可能となる (詳細は原論文 [Bri08] を参照).

また $\mathsf{Stab}\,\mathbf{D}^b(S)$ が連結であれば予想 3.3 (1) は正しい. そのため予想の提示以降, 様々な三角圏 $\mathbf{D}$ に対して $\mathsf{Stab}\,\mathbf{D}$ の連結性や単連結性が研究された. 予想 3.3 と関わりが深い場合に, Klein 特異点から定まる三角圏がある. 例えば Klein 特異点が A_n 型の場合に, $\mathsf{Stab}\,\mathbf{D}(A_n)$ は連結かつ単連結であることが石井-上原-植田氏により分かっている ([IUU10]).

一方で [All13, Chapter 7] により, $\mathcal{P}_0^+(S)$ の普遍被覆は可縮と予想されている. これの予想を組み合わせることで $\mathsf{Stab}\,\mathbf{D}(S)$ の可縮性が期待できる. その自然な拡張が作業仮説 3.1 である.

3.2. **ホモトピー群 $\pi_n(\mathsf{Stab}\,\mathbf{D})$ と三角圏 $\mathbf{D}$ の関係.** $\mathsf{Stab}\,\mathbf{D}$ は複素多様体なので, 作業仮説は全てのホモトピー群 $\pi_n(\mathsf{Stab}\,\mathbf{D})$ が自明になることと同値である. 故に, ホモトピー群を三角圏の関係解明を通じ, $\pi_n(\mathsf{Stab}\,\mathbf{D})$ の自明性が示せると良い. 残念ながらホモトピー群と圏の明示的な関係は知られておらず, 経験則として認識されているのみである. ここでは, K3 曲面の導来圏 $\mathbf{D}^b(S)$ の場合に, ホモトピー群と圏の関係について言及する.

$\pi_0(\mathsf{Stab}\,\mathbf{D}^b(S))$, すなわち連結成分の決定は, $\mathbf{D}^b(S)$ の球面対象と呼ばれる特殊な対象の分類問題と密接に関わっている. K3 曲面の場合に Bridgeland 予想の解決は, Picard 数 1 の場合を除いて困難であるが (cf. [BB17]), 予想に対すトイモデルが Klein 特異点から定まる三角圏である. A_n 型特異点に対応する三角圏 $\mathbf{D}(A_n)$ の場合に, 石井-上原氏は $\mathbf{D}(A_n)$ の球面対象を完全に分類した ([IU05]). この帰結として, 先に述べた $\mathsf{Stab}\,\mathbf{D}(A_n)$ の連結性が従っている. また 1 次ホモトピー群 $\pi_1(\mathsf{Stab}\,\mathbf{D}^b(S))$ は, 圏の自己同値群 $\mathsf{Aut}\,\mathbf{D}^b(S)$ と関わりが深い.

この様に, 安定性条件の空間の 1 次以下のホモトピー群は, 圏の対象や自己同値と関わっていることが経験則から類推できる[4]. 作業仮説 3.1 を念頭に, 2 次以上のホモトピー群と三角

[4] しかし, これらの関係についての一般論が構築できない点が, 非常に悩ましい.

圏の関係について考察したい．$\mathsf{Stab}\,\mathbf{D}^b(S)$ のループである単位円 S^1 から $\mathsf{Stab}\,\mathbf{D}^b(S)$ への写像は自己同値に対応すべきなので, 2 次ホモトピー群は恒等関手 $\mathrm{id} \in \mathsf{Aut}\,\mathbf{D}^b(S)$ の自己同型 $\mathsf{Aut}\,\mathrm{id}$ に対応すべきである．ここで id の自己同型は, 関手の自然変換 $\tau\colon \mathrm{id} \to \mathrm{id}$ に他ならない．そこでループ ℓ に対応する自己同値 Φ_ℓ が $\mathsf{Stab}\,\mathbf{D}^b(S)$ に作用するのと同様に, 自然変換 τ の $\mathsf{Stab}\,\mathbf{D}^b(S)$ への作用について研究したい.

3.3. **射の圏と無限圏.** 上記の動機における問題点は, 自然変換 τ は $\mathbf{D}^b(S)$ への自然な作用を持たない点である．そのため $\mathsf{Stab}\,\mathbf{D}^b(S)$ への自然な作用を構成することは (現時点では) 難しい．この問題を解消するために, 自然変換 τ が自然に作用する三角圏の安定性条件について研究することを考える．そこで素朴に思いつく圏が, $\mathbf{D}^b(S)$ の射を対象とする圏である.

ただし三角圏の射を対象とする圏は三角圏構造を持たないので以下では, 安定無限圏 $\mathcal{C}$ のホモトピー圏 $\mathrm{h}(\mathcal{C})$ として得られる三角圏のみを考えることにする[5]．無限圏や安定無限圏に関する定義などの詳細は [Lur09, Definition 1.1.2.4] や [Lur17, Definition 1.1.1.9] に譲る．極めてインフォーマルには, 空間の様な振る舞いをする “圏” が無限圏である．この観点で見ると, 無限圏 $\mathcal{C}$ からホモトピー圏 $\mathrm{h}(\mathcal{C})$ をとる操作は, 位相空間 X に対しその基本亜群 $\pi_{\leq 1}(X)$ を対応させる操作の類似である．$\mathcal{C}$ では二つの射 $f\colon x \to y$ と $g\colon x \to y$ が “ホモトープ” という概念が無限圏 $\mathcal{C}$ では意味を持つ．$\mathcal{C}$ のホモトピー圏 $\mathrm{h}(\mathcal{C})$ は, $\mathcal{C}$ における射のホモトピー類をとることで得られる通常の意味での圏である.

ここで最も重要な点は, 次である.

命題 3.4 ([Lur17, Chapter 1])**.** *$\mathcal{C}$ を安定無限圏とし, $\mathcal{C}^{\Delta^1} := \mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathcal{C})$ を $\mathcal{C}$ の射のなす無限圏とする．このとき, $\mathcal{C}^{\Delta^1}$ は安定無限圏であり, そのホモトピー圏 $\mathrm{h}(\mathcal{C}^{\Delta^1})$ は三角圏である.*

注意 3.5. (1) 代数多様体 X の連接層のなす有界導来圏 $\mathbf{D}^b(X)$ は, 有界な連接層のなす安定無限圏 $\mathcal{D}^b_{\mathrm{coh}}(X)$ のホモトピー圏と同値である: $\mathrm{h}(\mathcal{D}^b_{\mathrm{coh}}(X)) \sim \mathbf{D}^b(X)$[6].

(2) $\mathcal{C}^{\Delta^1}$ の対象 f は $\mathcal{C}$ の射なので $x, y \in \mathcal{C}$ を用いて, $f = [f\colon x \to y]$ と表せる．また $\mathcal{C}^{\Delta^1}$ での射 $\tau\colon f \to g$ は, 大雑把には次の図式である:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\tau_1"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "\psi"] & z \arrow[d, "g"] \\ y \arrow[r, "\tau_0"'] & w. \end{tikzcd}$$

ここで $\psi\colon x \to w$ と $g\tau_1\colon x \to w$, $\tau_0 f\colon x \to w$ は一致する必要はなく, $\mathcal{C}$ の中でホモトープであれば良い．$\mathcal{C}^{\Delta^1}$ における射 $\tau\colon f \to g$ の正確な定義は [Lur09] に譲るが, 大

[5]つまり $\mathbf{D} = \mathrm{h}(\mathcal{C})$ とし $\mathrm{rank}\,K_0(\mathrm{h}(\mathcal{C})) < \infty$ を仮定する.
[6]これらの記号については [Kaw19](本質的には [Lur17]) に譲る.

雑把には τ_1, τ_0, ψ にホモトピー $h_1\colon g\tau_1 \to \psi$ と $h_0\colon \tau_0 f \to \psi$ のデータを加えた五つ組 $(\tau_1, \tau_0, \psi, h_1, h_0)$ である[7].

(3) 代数多様体 X が体 $\mathbf{k}$ のアフィンスキーム $\operatorname{Spec}\mathbf{k}$ の時, 射の圏 $\mathrm{h}(\mathcal{D}^b_{\mathrm{coh}}(\operatorname{Spec}\mathbf{k})^{\Delta^1})$ は, A_2 型クイバー $\bullet \to \bullet$ の有限次元表現の導来圏 $\mathbf{D}^b(\bullet \to \bullet)$ と圏同値である ([Kaw19, Corollary 6.2]). 射の圏は A_2 型クイバーの表現の導来圏の拡張ともみなせる.

以上の背景のもとで, $\mathsf{Stab}\,\mathrm{h}(\mathcal{C})$ と $\mathsf{Stab}\,\mathrm{h}(\mathcal{C}^{\Delta^1})$ の関係について研究したい. 問うべき基本的な問いは以下である:

問題 3.6. (1) $\mathsf{Stab}\,\mathrm{h}(\mathcal{C}^{\Delta^1})$ は存在するか？

(2) 位相空間として $\mathsf{Stab}\,\mathrm{h}(\mathcal{C})$ と $\mathsf{Stab}\,\mathrm{h}(\mathcal{C}^{\Delta^1})$ はホモトピー同値か？

定理 2.8 にあるように, 安定性条件の存在は自明ではない. また作業仮説 3.1 により安定性条件の空間の可縮性が期待されているので, (2) は自然である.

4. 射の圏

以下, 安定無限圏 $\mathcal{C}$ の射を対象とする無限圏 $\mathcal{C}^{\Delta^1}$ のホモトピー圏 $\mathrm{h}(\mathcal{C}^{\Delta^1})$ を $\mathrm{h}(\mathcal{C})$ **の射の圏** (または単に射の圏) と呼ぶ. 射の圏に関する基本事項を復習する.

はじめに $\mathrm{h}(\mathcal{C})$ と $\mathrm{h}(\mathcal{C}^{\Delta^1})$ の間には三つの自然な関手が存在することに注意する.

定義 4.1. $d_0, d_1\colon \mathrm{h}(\mathcal{C}^{\Delta^1}) \rightrightarrows \mathrm{h}(\mathcal{C})$ を

$$d_0([x \to y]) = y, d_1([x \to y]) = x$$

と定める. また $s\colon \mathrm{h}(\mathcal{C}) \to \mathrm{h}(\mathcal{C}^{\Delta^1})$ を $s(z) = \mathrm{id}_z$ と定める.

これらの三つの関手 d_0, d_1, s は随伴対となっている. つまり次が成り立つ:

補題 4.2 ([Lur09, Chapter 4])**.** *$\mathcal{C}$ を安定無限圏とする. d_0 は s の左随伴であり, s は d_1 の左随伴関手である.*

$$\mathrm{h}(\mathcal{C}) \underset{\xleftarrow{d_1}}{\overset{\xleftarrow{d_0}}{\xrightarrow{s}}} \mathrm{h}(\mathcal{C}^{\Delta^1}) \ ; d_0 \dashv s \dashv d_1.$$

$\mathrm{h}(\mathcal{C})$ は, $s\colon \mathrm{h}(\mathcal{C}) \to \mathrm{h}(\mathcal{C}^{\Delta^1})$ により $\mathrm{h}(\mathcal{C}^{\Delta^1})$ の充満部分圏とみなせる. これと補題 4.2 の随伴対から $\mathrm{h}(\mathcal{C}^{\Delta^1})$ は二つの自然な半直交分解を持つ. これを述べるために, 三角圏の半直交分解を復習する.

定義 4.3. $\mathbf{D}$ を三角圏とし $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ を $\mathbf{D}$ の部分三角圏とする. 組 $(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2)$ が次の二つの性質を満たすとき, $\mathbf{D}$ は $\mathbf{D}_1$ **と** $\mathbf{D}_2$ **による半直交分解を持つ**と呼び, $\mathbf{D} = \langle \mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2 \rangle$ などと書く.

(a) 任意の $E_i \in \mathbf{D}_i$ について $\operatorname{Hom}_{\mathbf{D}}(E_2, E_1) = 0$ である.

[7] $\mathrm{h}(\mathcal{C}^{\Delta^1})$ の射は五つ組のデータ $(\tau_1, \tau_0, \psi, h_1, h_0)$ のホモトピー類 $[(\tau_1, \tau_0, \psi, h_1, h_0)]$ である.

(b) 任意の $E \in \mathbf{D}$ について次を満たす $\mathbf{D}$ の完全三角が存在する:

$$p_2(E) \longrightarrow E \longrightarrow p_1(E) \longrightarrow p_2(E)[1] \tag{4.1}$$

ただし $p_i(E) \in \mathbf{D}_i$ である.

注意 4.4. (a) から E に対して $p_i(E)$ $(i \in \{1,2\})$ は関手的に決まる. つまり, 半直交分解 $\mathbf{D} = \langle \mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2 \rangle$ に対して次の "射影" 関手が定まる:

$$p_i \colon \mathbf{D} \to \mathbf{D}_i. \tag{4.2}$$

自然な包含関手を $\iota_i \colon \mathbf{D}_i \to \mathbf{D}$ とすると, ι_i と p_i は次の随伴の関係にある:

$$\iota_2 \dashv p_2 \text{ and } p_1 \dashv \iota_1.$$

補題 4.5. $\mathcal{C}$ を安定無限圏とする. また $\mathrm{h}(\mathcal{C}^{\Delta^1})$ の部分圏を次のように定める.

$$\begin{aligned}
\mathrm{h}(\mathcal{C}_{/0}) &:= \{[x \to 0] \in \mathrm{h}(\mathcal{C}^{\Delta^1}) \mid x \in \mathcal{C}\}, \\
\mathrm{h}(\mathcal{C}_{0/}) &:= \{[0 \to y] \in \mathrm{h}(\mathcal{C}^{\Delta^1}) \mid y \in \mathcal{C}\}, \\
\mathrm{h}(\mathcal{C}_{s}) &:= \{[\mathrm{id} \colon z \to z] \in \mathrm{h}(\mathcal{C}^{\Delta^1}) \mid z \in \mathcal{C}\}.
\end{aligned}$$

このとき $\mathrm{h}(\mathcal{C}^{\Delta^1})$ は, 随伴対 (d_0, s) と (s, d_1) に応じた半直交分解を持つ*:*

(1) $\mathrm{h}(\mathcal{C}^{\Delta^1}) = \langle \mathrm{h}(\mathcal{C}_s), \mathrm{h}(\mathcal{C}_{/0}) \rangle$,
(2) $\mathrm{h}(\mathcal{C}_{\Delta^1}) = \langle \mathrm{h}(\mathcal{C}_{0/}), \mathrm{h}(\mathcal{C}_s) \rangle$.

$\mathrm{h}(\mathcal{C}_{/0}), \mathrm{h}(\mathcal{C}_{0/}), \mathrm{h}(\mathcal{C}_s)$ は自然に $\mathrm{h}(\mathcal{C})$ と圏同値なので, 以下では $\mathrm{h}(\mathcal{C})$ と同一視する.

注意 4.6. 半直交分解 $\mathrm{h}(\mathcal{C}^{\Delta^1}) = \langle \mathrm{h}(\mathcal{C}_s), \mathrm{h}(\mathcal{C}_{/0}) \rangle$ に対する対象の分解 (4.1) は次の図式で与えられる:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{fib}\, f \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & x \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "f"] & y \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[dr] & \mathsf{fib}(f)[1] \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & y \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & y \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{4.3}$$

ただし $\mathsf{fib}\, f$ は $[f \colon x \to y]$ の写像錐 $\mathrm{cone}(f)$ に対し $\mathsf{fib}\, f = \mathrm{cone}(f)[-1]$ である. 図式における $\mathrm{h}(\mathcal{C}^{\Delta^1})$ での射 $f \to \mathrm{id}_y$ は, 随伴対 $d_0 \dashv s$ から定まる自然な射 $f \to s \cdot d_0(f)$ である.

(2) での対象の分解に対応する図式は (4.3) の矢印を全て反転することで得られる.

5. 半直交分解と安定性条件

射の圏 $\mathrm{h}(\mathcal{C}^{\Delta^1})$ での安定性条件の存在について言及する．そのために Collins-Plishchuk による三角圏の半直交分解を用いた安定性条件の構成を復習する．そこで鍵になるのが “reasonable” な安定性条件である．

定義 5.1 ([CP10])**.** $\sigma \in \mathsf{Stab}\,\mathbf{D}$ が次を満たすとき, reasonable であると呼ぶ.

- $\inf\{|Z(E)| \mid E \text{ is } \sigma\text{-semistable}\} > 0$.

また reasonable な安定性条件のなす集合を $\mathsf{Stab}^{\mathsf{r}}\,\mathbf{D}$ とする．

注意 5.2. σ が台条件を満たせば reasonable である．また reasonable な安定性条件は局所有限なので $\mathsf{Stab}^{\mathsf{r}}\,\mathbf{D}$ は $\mathsf{Stab}\,\mathbf{D}$ の部分集合である (cf. [CP10, Lemma 1.1]).

命題 5.3 ([CP10])**.** $\mathbf{D}$ を三角圏, $\mathbf{D} = \langle \mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2 \rangle$ を $\mathbf{D}$ の半直交分解, $\sigma_i = (\mathcal{A}_i, Z_i) \in \mathsf{Stab}^{\mathsf{r}}\,\mathbf{D}_i$ $(i \in \{1,2\})$ とする．$\mathbf{D}$ の部分圏 $\mathcal{A}$ と $Z\colon K_0(\mathbf{D}) \to \mathbb{C}$ を次で定める*:*

$$\begin{cases} \mathcal{A} = \{E \in \mathbf{D} \mid p_i(E) \in \mathcal{A}\} \\ Z(E) := Z_1\left(p_1(E)\right) + Z_2\left(p_2(E)\right). \end{cases}$$

また σ_1 と σ_2 は次を満たすとする*:*

$$\begin{cases} \exists a \in (0,1) \ \ s.t. \ \ \mathrm{Hom}^{\leq 0}_{\mathbf{D}}\left(\mathcal{P}_1(a, a+1], \mathcal{P}_2(a, a+1]\right) \\ \mathrm{Hom}^{\leq 0}_{\mathbf{D}}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 0 \end{cases}$$

ただし $\mathcal{P}_i$ は σ_i の *slicing* である．

この時 $\sigma = (\mathcal{A}, Z)$ は $\mathbf{D}$ の *reasonable* な安定性条件となる．

定義 5.4. 命題5.3で定まる安定性条件 σ を, σ_1 と σ_2 による**張り合わせ構成** (gluing construction) と呼び $\mathsf{gl}\,(\sigma_1, \sigma_2)$ で定める．

定理 5.5 ([Kaw19, Theorem 1.2])**.** 関手 $d_0, d_1\colon \mathrm{h}(\mathcal{C}^{\Delta^1}) \rightrightarrows \mathrm{h}(\mathcal{C})$ は, 連続写像

$$d_0^*, d_1^*\colon \mathsf{Stab}^{\mathsf{r}}\,\mathrm{h}(\mathcal{C}) \rightrightarrows \mathsf{Stab}^{\mathsf{r}}\,\mathrm{h}(\mathcal{C}^{\Delta^1})$$

を導く．d_0^* と d_1^* は閉埋め込みで二つの像は交わらない．さらに σ が *full,* $d_0^*\sigma$ が *full,* $d_1^*\sigma$ が *full* であることは同値である．

d_0^* の構成の概略を述べる．随伴対 $d_0 \dashv s$ に付随した $\mathrm{h}(\mathcal{C}^{\Delta^1})$ の半直交分解を $\langle \mathrm{h}(\mathcal{C}_{/0}), \mathrm{h}(\mathcal{C}_s) \rangle$ とする．自然な同一視 $\mathrm{h}(\mathcal{C}) \cong \mathrm{h}(\mathcal{C}_s) \cong \mathrm{h}(\mathcal{C}_{/0})$ のもとで

$$d_0^*\sigma := \mathsf{gl}\,(\sigma, [-1]\sigma) \tag{5.1}$$

と定める．ただし $[-1]\sigma$ は自己同値 $[-1] \in \mathsf{Aut}\,\mathrm{h}(\mathcal{C})$ の安定性条件への自然な作用である．

$d_1^*\sigma$ では, 半直交分解 $\mathrm{h}(\mathcal{C}^{\Delta^1}) = \langle \mathrm{h}(\mathcal{C}_{0/}), \mathrm{h}(\mathcal{C}_s) \rangle$ に対し次で定める:

$$d_1^*\sigma := \mathsf{gl}\,([1]\sigma, \sigma). \tag{5.2}$$

注意 5.6. 定理 5.5 から, $\mathrm{h}(\mathcal{C})$ に full な安定性条件が存在すれば, $\mathrm{h}(\mathcal{C}^{\Delta^1})$ も full な安定性条件を持つ. これにより問題 3.6 の (1) に対する答えを得る.

6. 安定性条件の空間の位相型について

本節では問題 3.6 (2) 対する部分的な解答を紹介する.

6.1. **アフィンスキームの場合.** $\mathrm{h}(\mathcal{C})$ がネター環 R のアフィンスキーム $\operatorname{Spec} R$ の導来圏 $\mathbf{D}^b(\operatorname{Spec} R)$ の場合に問題 3.6 (2) が正しいことを紹介する. つまり次が成り立つ:

定理 6.1 ([Kaw20, Corollary 4.11])**.** $\mathcal{C} = \mathcal{D}^b_{\mathrm{coh}}(\operatorname{Spec} R)$ の時, $\mathsf{Stab}\,\mathrm{h}(\mathcal{C}^{\Delta^1})$ と $\mathsf{Stab}\,\mathrm{h}(\mathcal{C})$ はホモトピー同値である.

証明の概略を述べる. $\dim R > 0$ の時, 定理 2.8 から $\mathsf{Stab}\,\mathrm{h}(\mathcal{C}) = \emptyset$ である. 定理 2.8 と同じ手法を用いることで射の圏 $\mathrm{h}(\mathcal{C}^{\Delta^1})$ について $\mathsf{Stab}\,\mathrm{h}(\mathcal{C}^{\Delta^1})$ の存在と $\dim R = 0$ が同値であることが示せる.

また $\dim R = 0$ の時 $\mathsf{Stab}\,\mathrm{h}(\mathcal{C}) \cong \mathbb{C}$ なので, 安定性条件の空間は可縮である (cf. 例 2.10). 加えて射の圏 $\mathrm{h}(\mathcal{C}^{\Delta^1})$ について, $\mathsf{Stab}\,\mathrm{h}(\mathcal{C}^{\Delta^1})$ は A_2 型クイバーの表現の導来圏 $\mathbf{D}^b(\bullet \to \bullet)$ の安定性条件 $\mathsf{Stab}\,\mathbf{D}^b(\bullet \to \bullet)$ と同型であることが分かる ([Kaw20, Theorem 4.8]). [Qiu11] により $\mathsf{Stab}\,\mathbf{D}^b(\bullet \to \bullet)$ は可縮なので, 問題 3.6 (2) が成立することが分かる.

6.2. **射影的な場合.** 次に射影的な場合に問題 3.6 (2) を論じる. 残念ながらアフィンスキームの場合のような完全な解答は得られておらず, 限定的な解答のみである.

定理 5.5 から $\sigma \in \mathsf{Stab}\,\mathrm{h}(\mathcal{C})$ が full であれば $d_0^*\sigma$ と $d_1^*\sigma$ も full である. full な安定性条件の集合で非連結な例は知られていないので, d_0^* と d_1^* は連結成分レベルで同じ写像だと自然に期待できる. この期待に対する根拠を与えるのが次の定理である:

定理 6.2 ([Kaw19, Theorem 1.4])**.** $\mathcal{C} = \mathcal{D}^b_{\mathrm{coh}}(\mathbb{P}^1)$ の時, $\operatorname{Im} d_0^*$ と $\operatorname{Im} d_1^*$ は道で繋がる.

証明の概略. $\mathsf{Stab}\,\mathbf{D}^b(\mathbb{P}^1)$ は [Oka06], [Mac07] により連結である. $\sigma_0 \in \mathsf{Stab}\,\mathbf{D}^b(\mathbb{P}^1)$ として $Z_0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) = Z_0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)[1]) = -1$ を満たす安定性条件が一意的に存在する. この $\sigma_0 \in \mathsf{Stab}\,\mathbf{D}^b(\mathbb{P}^1)$ について $d_0^*\sigma_0$ と $d_1^*\sigma_0$ を道でつなげば良い.

注意 6.3. 証明の概略での σ_0 は種数 1 以上の曲線の安定性条件の空間には存在しない. 故に定理 6.2 の証明は種数 1 以上では適応できない.

参考文献

[All13] Daniel Allcock. Completions, branched covers, Artin groups, and singularity theory. *Duke Math. J.*, 162(14):2645–2689, 2013.

[BB17] Arend Bayer and Tom Bridgeland. Derived automorphism groups of K3 surfaces of Picard rank 1. *Duke Math. J.*, 166(1):75–124, 2017.

[BM11] Arend Bayer and Emanuele Macrì. The space of stability conditions on the local projective plane. *Duke Math. J.*, 160(2):263–322, 2011.

[Bri07] Tom Bridgeland. Stability conditions on triangulated categories. *Ann. of Math. (2)*, 166(2):317–345, 2007.

[Bri08] Tom Bridgeland. Stability conditions on $K3$ surfaces. *Duke Math. J.*, 141(2):241–291, 2008.

[CP10] John Collins and Alexander Polishchuk. Gluing stability conditions. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 14(2):563–607, 2010.

[IU05] Akira Ishii and Hokuto Uehara. Autoequivalences of derived categories on the minimal resolutions of A_n-singularities on surfaces. *J. Differential Geom.*, 71(3):385–435, 2005.

[IUU10] Akira Ishii, Kazushi Ueda, and Hokuto Uehara. Stability conditions on A_n-singularities. *J. Differential Geom.*, 84(1):87–126, 2010.

[Kaw19] Kotaro Kawatani. Stability conditions on morphisms in a category. *arXiv e-prints*, pages arXiv:1905.05470, to appear in Kyoto Journal of Math., May 2019.

[Kaw20] Kotaro Kawatani. Stability conditions on affine noetherian schemes and applications, 2020.

[Li19] Chunyi Li. On stability conditions for the quintic threefold. *Invent. Math.*, 218(1):301–340, 2019.

[Lur09] Jacob Lurie. *Higher topos theory*, volume 170 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009.

[Lur17] Jacob Lurie. *Higher Algebra*. available on `https://www.math.ias.edu/~lurie/`, 2017.

[Mac07] Emanuele Macrì. Stability conditions on curves. *Math. Res. Lett.*, 14(4):657–672, 2007.

[Oka06] So Okada. Stability manifold of $\mathbb{P}^1$. *J. Algebraic Geom.*, 15(3):487–505, 2006.

[Qiu11] Yu Qiu. *Exchange graphs and stability conditions for quivers*. PhD thesis, University of Bath, https://core.ac.uk/download/pdf/40017478.pdf, September 2011.

Email address: `kawatanikotaro@gmail.com`