Tropical geometry and its application to scheduling problem

東京都立大学理学研究科数理科学専攻　小林正典

本論説では，トロピカル幾何，その工程計画問題への応用（小田切真輔氏との共同研究）について述べ，補足として $\boldsymbol{F}_1$ 代数幾何の基礎的な導入を記す．

1　序：トロピカル幾何を研究する理由

代数多様体の一種の極限として，トロピカル（熱帯）多様体が現れたのは今世紀のことである．しかし起源は前世紀半ばに遡り，例えば局所構造は Bergman による漸近線の一般化を受け継いだ「Bergman 扇」であり，これは $\boldsymbol{R}^n$ 内の（法）有理有限多面複体で，釣合条件を満たし余次元 1 を通じて連結なものの，重み付き台である（超曲面のときは同値でもある）．区分的に線形で組合せ論的に調べやすい．

トロピカル幾何学を研究する理由として，まず，代数多様体等の深い問題をトロピカル幾何学で解決していることがある．普通の代数多様体や解析多様体より単純な構造をもちながら，深い結果を出し得るというわけである．代数幾何に関係する例を挙げよう．

（１）ミラー多様体の幾何的構造原理．

ミラー対称性は例えば複素多様体とシンプレクティック多様体の間の極めて非自明な対応関係を予言する．SYZ 予想によると，この対応は半分次元の実多様体上の 2 つの双対なトーラスファイブレーションとして実現できるはずである．Kontsevich と Soibelman はその実多様体がトロピカル多様体であるとし，Gross と Siebert はその処方箋に沿って具体例の構成を行った．トロピカル退化と運動量写像という全く異なる 2 つのデータを共通のトロピカル多様体の上で扱うことができると主張する．

（２）Gromov–Witten 不変量の計算

複素射影平面内の一般の $(3d-1)$ 点を通る d 次有理曲線の本数を数える問題は，Kontsevich により量子コホモロジーと関係した解答が与えられていた．Mikhalkin はトロピカル類似を考えればはるかに易しく計算できるという示唆を実行し，初項と漸化式が元の問題と等しい数列（つまり同じ不変量）を得ることに成功した．具体的には「床図式」と呼ばれる折れ線図形の数を数えることで求められる．

（３）Brill–Noether の定理の別証明

代数曲線の研究において，Brill–Noether 理論は基本的であり，特殊因子がどれだけ存在するかを記述する一群の問題である．．種数 g の十分一般のコンパクト Riemann 面において，因子の階数（H^0 の次元引く１）r と次数 d を指定したとき，Picard 概型の中でそのような因子がなす部分概型 W_d^r に期待される次元 $\rho = g-(r+1)(g-d+r)$ を Brill–Noether 数という．ρ が負ならば W_d^r は空で，ρ が非負ならば W_d^r は $\min\{\rho, g\}$ 次元である，という定理は Griffiths–Harris により曲線の退化を用いて示されていた．Cools–Draisma–Payne–Roveba は，トロピカル退化を用いれば，特別な退化ファイバー（団子状のトロピカル曲線）に条件を満たす因子を簡単に構成できることを示し，「Baker の補題」により因子は一般ファイバー（Riemann 面）に延ばすことで，古典・トロピカルの場合の同時証明を与えた．

そのほか，予想に反して $H^{4g-6}(M_g, \boldsymbol{Q})$ に 0 でない類が存在することを示した Chan–Galatius–Payne の結果，モジュライのトロピカルコンパクト化に用いた尾高の結果などが知られている．

以上に加えて近年ではトロピカル幾何学の対象そのものへの興味からも研究されている．端緒は特に 1 次元（曲線）の場合にグラフ上でラプラシアンや調和関数が考えられること（浦川，Baker–Faber）にあるが，まず Bézout の定理（Sturmfels，梶原）に始まる交点理論が整備され，トロピカル曲線（計量グラ

フ）上に因子や有理関数が定義され，Riemann–Roch の定理が成り立つことが示される（Baker–Norine，Gathmann–Kerber，Mikhalkin–Zharkov）に至り，深い幾何的内容が期待されるようになった．有理写像が定式化され（Haase–Musiker–Yu），因子や射影埋込との関係が調べられている（景山，Li，宋）．一般型代数曲線のトロピカル的に忠実な埋め込み（川口–山木），（安定）ゴナリティの Brill–Noether 限界が古典的場合と等しいこと（Cools–Draisma），Hurwitz 数が古典的な場合と等しくなるような分岐被覆の定式化（Cavalieri–Johnson–Markwig）など，様々な研究がなされている．なお上記は網羅的でも重要度によるものでもないことをお断りしておく．文献のリストについては，例えば Maclagan–Sturmfels の教科書 [1] などを参照されたい．

2　トロピカル幾何の工程計画問題への応用

この節は，小田切真輔氏（秀明大学）との共同研究に基づく．

トロピカル幾何が礎とするトロピカル代数は，超離散化などで現れていたが，純粋数学以外でも，情報科学のアルゴリズム理論（Simon など），工学（制御理論）の離散事象システム（Cohen など）で独立に発展してきた．後者が本研究の内容に関わる．制御理論は，ごく単純化して言えば，系で求める出力 y を得るためには入力 u をどう定めたらよいかの理論であり，古典的には例えば y を u に関する高階の線形微分方程式の解として定式化していた．これは y の高次導関数を未知変数 x たちにすることで連立一階の線形微分方程式に直すことができる．これを拡張して，現代制御理論では y, u を時間依存とし x を系の外から見えない内部変数に一般化して，$D(x, y) = (Ax + Bu, Cx)$ の形（D は時間微分，A, B, C は線形変換）で扱う．ここに現れる連続時間による微分を，差分（一定の時間が経つと次のステップに進む）に変えるにとどまらず，さらに事象駆動（何かが起こると次のステップに進む）にまで変えたものが離散事象システムであり，1980 年代には特集雑誌が出版されたほど流行し，現在も研究が続けられている [2]．そこで用いられたのが，Max-Plus 代数（トロピカル代数）であった．次でさらに説明する．

2.1　プロジェクトネットワークと Max-Plus 代数

いくつかの作業からなる工程を考える．各作業 i には着手から完了までの作業時間 t_i が定められている．作業には前後関係があり，各作業に着手できるのはその作業の先行作業がすべて完了してからである．工程は，作業を頂点とし，作業時間を重みとして付け，直前直後の作業を矢印で結んだ，非負の重み付き有向グラフ，「プロジェクトネットワーク」で表せる．

ある作業の最短完了時間は，着手可能時間すなわち直前のすべての作業の最短完了時間の最大値に，その作業の作業時間を加えたものである．したがって帰納的に，工程全体の最短完了時間は，各作業の作業時間から最大値と和をとる操作を組み合わせて得られる．

最大値 max と加法 $+$ による代数が Max-Plus 代数であり，max と $+$ をそれぞれ加法と乗法の対応物とみる．実数全体に負の無限大を添加した $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R} \cup \{-\infty\}$ が代表例である．max と $+$ に関してともに可換モノイドであり，零元（＝最小元）は吸収的であり，分配法則が成り立つ．また max はべき等である．ここまでの性質は「加法に関してべき等な可換半環」とまとめられる．$\boldsymbol{T}$ はさらに，零元 $-\infty$ と単位元 0 が異なり，零元以外の元 a はトロピカル乗法 $+$ についての逆元 $-a$ をもつため，トロピカル半体と呼ばれる．

最大値と加法が可換半環を作ることから，不定元と定数からトロピカル演算を有限回施して作られる式を多項式とみなすことができ，トロピカル多項式と呼ぶ．トロピカル演算を普通の加法・乗法として書くことも多

い．紛らわしいので，トロピカル演算であることを表すため全体を二重引用符で囲ったり，$\varepsilon := -\infty$，$e := 0$ と書くことがある．係数の 0 は（普通の 1 倍のように）省略することが多い．

以上から，次の基本原理が得られた．

命題 1 行程の最短完了時間は，各作業時間のトロピカル多項式で表される．

各項はある極大経路に沿った作業時間の和である．変数に具体的な値を代入すると，多項式の値は，各項の値の最大値なので，いずれかの項の値に一致する，この項に対応する極大経路はそのときの「クリティカルパス」と呼ばれる．

トロピカル多項式は，ある工程の最短完了時間となるときに R 多項式（実現可能多項式）と呼ぶことにする．R 多項式は次を満たす．

(1) 各項は互いに他を割り切らない．

(2) 各変数に関して 1 次式．

(3) 各項の係数は 0（か $-\infty$）．

逆にこの 3 性質を満たす多項式を P 多項式（前実現可能多項式）と呼ぶことにすると，R 多項式の満たす代数的性質はほぼ P 多項式で同様に成立する．R 多項式でない P 多項式の例として $t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3$ がある．P 多項式や R 多項式のグラフや複体による特徴付けが伊藤孝明 [8] によりなされている．

トロピカル多項式の全体は加法に関してべき等な可換半環をなすが，代数的性質が悪い．関数として扱うほうがよく，例えば 1 変数トロピカル多項式関数は 1 次関数の積に分解される．ただし異なる多項式が同じ関数を定めることがあり，例えば "$0 + ax + x^2$"（$a \leq 0$）は $\boldsymbol{T}$ 上の関数として a の値によらず等しい．ここでは多項式関数を簡約表現（関数の値に影響しない項を削った式，上の例では "$0 + x^2$"）で表すことにする．なお，多項式環のイデアルとの対応を追求するときは最大表現（関数として等しい範囲で係数が最大の式，上の例では "$0 + x + x^2$"）の方が有利なこともある．

定理 2（[4]） P 多項式を多項式関数として因数分解すると，因子の簡約表現は P 多項式である．もとが R 多項式であれば，因子も R 多項式で表される．

この定理により，工程の最短完了時間を計算機などで因数分解できれば，小さな工程の組合せとして最短完了時間もクリティカルパスも求まることになる．式として求めているので作業時間の値が変わっても影響を受けない．行程から多項式に移ると，積が可換なので作業の順序が前か後かという情報が失われることが効いている．

このように，大きな問題を小さな問題に帰着させることは実用上重要である．複数の作業をひとつの作業とみなして商ネットワークを作る「クラスター化」（経路空間のファイブレーション）や，一部分の作業だけで経路の情報を保持する部分ネットワークを作る「余クラスター化」（コファイブレーション）も考察した [5] が，時節柄，今回は述べない．

2.2 クリティカルパスとトロピカル超曲面

行程のどこかで，事故による遅延が発生したり，改善による高速化ができたとしよう．作業時間が変化すると最短完了時間やクリティカルパスは変化することがある．これを最初から計算し直さなくても，定性的に絞ることができるようにする．鍵となるのは多項式の Newton 多面体を利用して，経路の空間に幾何構造を入れることで，経路の変化を相転移とみなすことである．

まずトロピカル超曲面について一般論を述べておこう．零元でない n 変数トロピカル Laurent 多項式 $F(t_1,\dots,t_n)$ を考えて，$\boldsymbol{R}^n$ 上の関数とみなす．トロピカル Laurent 多項式関数は次のように特徴づけられる：区分的にアフィンな凸関数で，1 次の係数は整数であり，区分は有限個である．我々の応用では定義域を制限して，非負象限（正象限の閉包）$t_1 \geq 0,\dots,t_n \geq 0$ 上の関数と見れば十分である．

F が複数の項で最大値をとる（あるいは値が $-\infty$ になる）点の集合 $V(F)$ を，折点集合という．これは Kapranov の定理により通常の多項式の零点集合をトロピカル化したものとみなせるため，トロピカル超曲面とも呼ばれる．$V(F)$ には重複度付き多面複体の構造が標準的に入り，関数として等しい多項式は同じ複体を与える．

F から $V(F)$ を求めるには，双対原理（GKZ，Mikhalkin）が有用である：F の Newton 多面体 $N(F)$ の格子点上に，各項の係数を関数の値とみてグラフをとり，その下面凸包を作る．この上面たちを $N(F)$ に射影すると，$N(F)$ の細分となる多面複体 $SD(F)$ が得られる．二つの複体 $V(F)$（正確には補集合の部分も含めて台を $\boldsymbol{R}^n$ 全体にした複体）と $SD(F)$ は，直交双対の関係になる．

我々の場合に戻ろう．P 多項式 F の Newton 多面体 $N(F)$ はいわゆる 0/1 多面体である．0/1 多面体とは，$\boldsymbol{R}^n$ 内の（有界な）凸多面体で頂点の座標が 0 か 1 だけからなるものである．これは，有限集合のある条件を満たす部分集合の族を記述する際に，各部分集合を含まれる元の特性ベクトルで表し，部分集合族にそれら特性ベクトルの凸包を対応させるという形で，組合せ最適化でよく用いられる．0/1 多面体内の格子点は多面体の頂点と一致する．

対応の鍵となる基本結果は以下の通りである．

定理 3（[3]）　行程 P の最短完了時間を F とするとき，次の間に自然な一対一対応がある：

P の極大経路，F の項，N_F の頂点，非負象限における $V(F)^c$ の連結成分．

特に，任意の極大経路は唯一のクリティカルパスになり得る．それは対応する連結成分に作業時間が属するときである．

超曲面の補集合の連結成分は，共通の壁面を境界とするとき，隣接するとみなす．作業時間がこの壁面を超えるとき，その 2 つの成分に対応する極大経路の間で，クリティカルパスの遷移が起こる．これにより，極大経路の空間に幾何構造が入り，極大経路を頂点とし隣接するとき辺で結ぶことで，極大経路の隣接グラフを定義する．これは Newton 多面体の 1 骨格の部分グラフになる（非負象限で隣接するという制限があり，これも判定できる）．これによって，作業時間が突然変化したときの，新しいクリティカルパスの可能性を予め絞っておくことができる．最短完了時間の Newton 多面体の 1 骨格，および隣接グラフは，頂点数が 6 以下の場合に分類を与えた．

工学に関わる研究であるので，有用であるかの議論が必要である．凸多面体に対し，2 つの頂点が辺で結ばれるか判定することは，たとえ 0/1 多面体の場合に限っても一般には NP 完全である（つまり計算機でも判定に時間がかかりすぎると期待される）ことが古くから知られている（例えば，巡回セールスマン問題 [9]，ナップザック問題 [10]）．しかし我々の問題に対しては具体的な計算アルゴリズムを構成することで次を示した．

定理 4（[4]）　行程の最短完了時間の Newton 多面体に対しては，頂点の隣接判定は頂点数に関する多項式時間で可能である．

よって，クリティカルパスの遷移は現実的に計算可能であると言ってよかろう．また，Newton 多面体の形状を調べることで，工程についての情報を得るということに意味がある．

次の定理では，多面体の形状からプロジェクトネットワークの局所構造が得られる．

定理 5（[7]） 行程 P の最短完了時間 F に対し，Newton 多面体を $N(F)$，隣接グラフを $G(F)$ とする．このとき，次が成り立つ．

(1) $N(F)$ に隣接しない 2 頂点がある $\iff$ P は交叉構造をもつ．

(2) $G(F)$ に隣接しない 2 頂点がある $\iff$ P は広義交叉構造をもつ．

(3) いくつかの頂点が $N(F)$ の面を張らない $\iff$ P は王冠構造をもつ．

(4) いくつかの頂点が $G(F)$ の面を張らない $\iff$ P は広義王冠構造をもつ．

ここで，交叉構造とは，2 つの作業 $1, 2$ に対し，共通に 2 つの直後の作業 $3, 4$ があることをいう．ただし $1, 2$ と $3, 4$ の両方の間に作業があっていてもよい．王冠構造はこれを一般化したもので，作業 $1, \ldots, i, \ldots, n$ に対し，i の直後の作業に $n+i, n+i+1$（ただし $2n+1$ は $n+1$ とみなす）があることをいう（図を参照）．広義がつくものは直後の作業であるという条件を緩和したものであるがここでは省略する．

2.3 道の従属関係と Newton 多面体

次に，Newton 多面体の形状からプロジェクトネットワークのより大域的な構造を読み取ることについて述べる．

多面体の 2 頂点の隣接判定が NP 困難となるほぼすべての場合に，「二重被覆多面体」と呼ばれる多面体が面として現れており，判定の複雑さは多面体の局所的問題に起因するのではないか，ということが Maksimenko により観察されている [11][12]．我々の問題では隣接判定は P なので，Newton 多面体に現れる面に大きな制約があることが予想できる．したがって現れる面や切片を分類し前小節のようにネットワークの形状の情報を得ることを考える．Newton 多面体のいくつかの頂点の凸包をとると，たいていは単体であり，対応する極大経路は独立の自由度をもつ．

以下で「点」とは考えている 0/1 多面体に含まれる格子点（＝頂点）を指すものとする．

補題 6 N を 0/1 多面体とするとき，次が成り立つ．

(1) どの 3 点も同一直線上にない． (2) 平面上の 4 点は矩形をなす．

(3) どの 5 点も同一平面上にない．

補題 7（小口） N を R 多項式の Newton 多面体とする．5 つの頂点が 3 次元部分空間内にあり，それらのどの 4 点も同一平面上にないとする．このとき N は平行六面体を含み，5 点はその 8 頂点の一部になる．

これを用いて次の分類が得られる．

定理 8（[6][7]） R 多項式の Newton 多面体 N に対し，N の 3 次元以下の切片は次のいずれかである：d 単体（$d \leq 4$），矩形，四角錐，三角柱，平行六面体．

N の切片で頂点数が 6 以下のものは次のいずれかである：d 単体（$d \leq 5$），矩形，四角錐，三角柱，矩形と線分の結，1 点のみを内部に共有する 2 つの三角形の凸包（最後の 2 つは 4 次元空間に実現できる図形である）．

さらにこれらに対応するプロジェクトネットワークの概型について述べることができる．これは順序を保つホモトピー分類のようなものである．なお頂点数 7 かつ次元 4 のものは，最近 Sleiman により分類が行われた．以上の結果の論文は準備中である．

3　$\boldsymbol{F}_1$ 代数幾何の基礎

トロピカル幾何は（単位的）可換環を基礎としていないため従来の標準的な代数幾何のテキストの範囲から逸脱しているように見える．しかし近年，より単純な代数構造を用いれば概型理論が構築できて，トロピカル幾何を含めた広い代数幾何の基礎付けができることが認識された．ここではその礎の部分について簡単に説明する（[13] [14] [15]）．

可換環から引き算を忘れると可換半環（第 1 節を参照）になる．さらに足し算も忘れると乗法に関する可換モノイドになるのだが，ここで零元を残すことがあとで空間を構成するときに重要になる．これを付点可換モノイドという．すなわち，可換で結合的な積が定義され，単位元 1 があり（$1a = a = a1$），吸収的零 0 をもつ（$0a = 0 = a0$）集合である．積と $1, 0$ を保つ射を考えてできる付点可換モノイドの圏は，始対象として $\boldsymbol{F}_1 := \{0, 1\}$ をもつ．よって付点可換モノイドを $\boldsymbol{F}_1$（可換）代数ともいう．

$\boldsymbol{F}_1$ が作用する集合が $\boldsymbol{F}_1$ 加群である．これは集合 M に零元 $\varepsilon \in M$ を指定したもの（付点集合）にすぎない．$\boldsymbol{F}_1$ の作用は，$m \in M$ に対し $1m = m$，$0m = \varepsilon$ と定める．

任意のモノイドは外から吸収的零を添加することで付点モノイドにできる．自明なモノイド $\{1\}$ からこのようにしてできたものが $\boldsymbol{F}_1$ である．半環として Borel 代数にできるが今は加法は考えない．足し算がなく，0 でない係数は 1 のみなので，$\boldsymbol{F}_1$ 係数の多項式は単項式のみである：$\boldsymbol{F}_1[t] = \{t^n \mid n \in \boldsymbol{N}\} \cup \{0\}$．これは $\boldsymbol{N} \cup \{-\infty\}$（小平次元のとる値の全体）と同型である．

通常の代数的概念が自然に定義される．A を $\boldsymbol{F}_1$ 代数，(M, ε) などを $\boldsymbol{F}_1$ 加群とする．M が A 加群であるとは A の作用があることである．A 代数も同様に定める．

(M_1, ε_1) と (M_2, ε_2) の集合としての直積 $M_1 \times M_2$ は，$(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ を零元として $\boldsymbol{F}_1$ 加群としての直積になる．直和 $M_1 \oplus M_2$ は一点和 $M_1 \vee M_2$ すなわち M_1 と M_2 の非交和において二つの零元を同一視したものである．これは通常の加群と同様に直積の部分加群 $\{(m_1, \varepsilon_2), (\varepsilon_1, m_2) \mid m_1 \in M_1, m_2 \in M_2\}$ として構成できる．テンソル積 $M_1 \otimes M_2$ は $M_1 \wedge M_2 = (M_1 \times M_2)/(M_1 \vee M_2)$ である．すなわち組 (m_1, m_2) の全体で，零元を含む元を同一視して零元とする．

A を $\boldsymbol{F}_1$ 代数とし S をその積閉集合とすると，局所化 $S^{-1}A$ が通常通り $(s, a) \in S \times A$ の同値類として定まり，A 代数になる．ここで同値関係は $(s, a) \sim (s', a') \iff \exists t \in S, tsa' = ts'a$ であり，引き算を使わず定義されることに留意されたい．A 加群 M に対し $S^{-1}M$ が $S^{-1}A$ 加群として定まる．

$\boldsymbol{F}_1$ 代数 A の A 部分加群をイデアルという．イデアルの和と積は，それぞれ $I_1 + I_2 := I_1 \cup I_2$，$I_1 I_2 := \{a_1 a_2 \mid a_1 \in I_1, a_2 \in I_2\}$ で定まる．加法を使っていないことに留意されたい．通常の環のイデアルは，加法のある圏からの極限（つまり忘却関手に対する左随伴関手の像，加法を含めた閉包）をとったものである．素イデアル，極大イデアルは通常と同じように定義され，素イデアルの全体として $\operatorname{Spec} A$ が定まる．局所化とテンソル積があるので，この上に Zariski 位相や構造層が定まり通常のように概型の理論が構築できる．ここに加法は不要であり，証明は簡明になる．ただし加法があると世界はさまざまなスペクトラムに溢れ色鮮やかになる．

この枠組みでは，射影トーリック多様体から多面体（角付き多様体）への古典的な写像（小田）も一つの $\boldsymbol{F}_1$ 概型の $\boldsymbol{C}$ 値点から $\boldsymbol{T}$ 値点への射として自然に理解される．

注意すべきことがある．可換環では，イデアルは剰余環を定めるものであるが，引き算のない半環や $\boldsymbol{F}_1$ 代数ではそれより広く，合同が商対象を与える．合同とは，演算を保つ同値関係のことであり，$\boldsymbol{F}_1$ 代数の場合は $a \equiv b, c \equiv d \Rightarrow ac \equiv bd$ を満たす同値関係 $\equiv$ である．合同を用いることで商代数ひいては部分概型を与える

ことができると期待される．基本的な結果として超曲面の場合に次が Giansiracusa 兄弟により得られている．

定理 9（[15]） $A := \boldsymbol{T}[X_1^{\pm1}, \ldots, X_n^{\pm1}]$ をトロピカルローラン多項式半環とし，$F \in A$ は零でないとする．このとき R^n 内のトロピカル超曲面 $V(F)$ は集合として $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{T}}(\mathrm{Spec}\,\boldsymbol{T}, \mathrm{Spec}\,A/\,\mathrm{bend}\,F)$ と一致する．

ただしローラン多項式 F に対し，$\mathrm{bend}\,F$ とは，一つの項 m を取り除いた $F_{\hat{m}}$ が F と同値であるとして生成される同値関係であり，合同関係になる．

この剰余半環 $\mathrm{Spec}\,A/\,\mathrm{bend}\,F$ は，トロピカル多項式半環から構成されているが，ちゃんと $V(F)$ 上のトロピカル多項式「関数」の全体を表す．また $\boldsymbol{T}$ 値点を考えるところも重要で，$\boldsymbol{F}_1$ 概型自体は点に乏しい．代数に零元を付け加えたことがここに効いていて，豊かな空間を構成できるのである．

参考文献

[1] Diane Maclagan and Bernd Sturmfels, Introduction to Tropical Geometry, Graduate Studies in Mathematics 161, AMS, 2015.

[2] B. F. Heidergott, G. J. Olsder, J. van der Woude, Max Plus at Work, Modeling and Analysis of Synchronized Systems: a Course on Max-Plus Algebra and Its Applications, Princeton, 2005.

[3] Masanori Kobayashi and Shunsuke Odagiri, Tropical geometry of PERT, Journal of Math-for-Industry, Vol. 5 (2013B-8), 145–149.

[4] 小林正典，小田切真輔，トロピカル多項式を変形してプロジェクトネットワークを簡約する手法について，第 54 回離散事象システム研究会資料，2013.

[5] 小林正典，小田切真輔，プロジェクトネットワークのクラスタ化アルゴリズムとその実装について，第 55 回離散事象システム研究会資料，2014.

[6] 小口理也，小田切真輔，小林正典，退化した 0/1 多面体と工程計画問題，第 56 回離散事象システム研究会資料，2014.

[7] 小林正典，小田切真輔，工程計画問題におけるクロス構造の解析，第 58 回離散事象システム研究会資料，2015.

[8] Takaaki Ito, A characterization for tropical polynomials being the minimum finishing time of project networks, Hokkaido Math. J. Vol. 47 (2018), 531–544.

[9] Christon H. Papadimitriou, The Euclidean Traveling Salesman Problem is NP-complete, Theoretical Computer Science **4** (1977), 237–244.

[10] Tomomi Matsui, NP-completeness of non-adjacency relations on some 0-1-polytopes, Lect. Notes Oper. Res., **1** (1995), 249–258.

[11] A.N. Maksimenko, The common face of some 0/1-polytopes with NP-complete nonadjacency relation, J. Math. Sci. **203**:6 (2014), 823–832.

[12] A.N. Maksimenko, On a family of 0/1-polytopes with an NP-complete criterion for vertex nonadjacency relation, Discrete Math. Appl. 2019; 29(1):7–14.

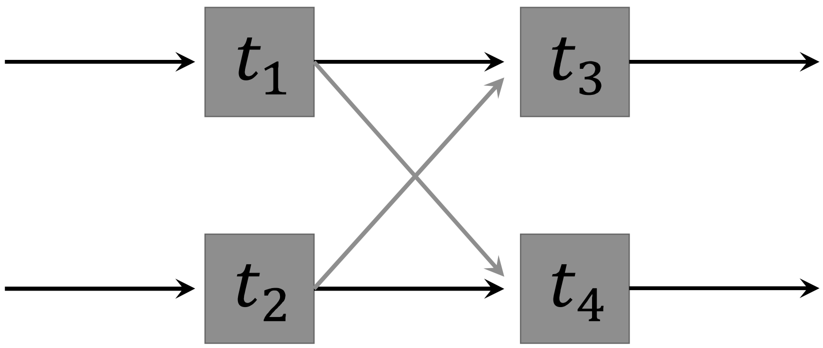
[13] Jonathan S. Golan, Semirings and their Applications, Springer, 1999.

[14] Oliver Lorsheid, A blueprinted view on $\mathbb{F}_1$-geometry, arXiv:1301.0083.

[15] Jeffrey Giansiracusa and Noah Giansiracusa, Equations of tropical varieties, Duke Math. J. Vol. 165 (2016), 3379–3433.

Adjacency and local structure

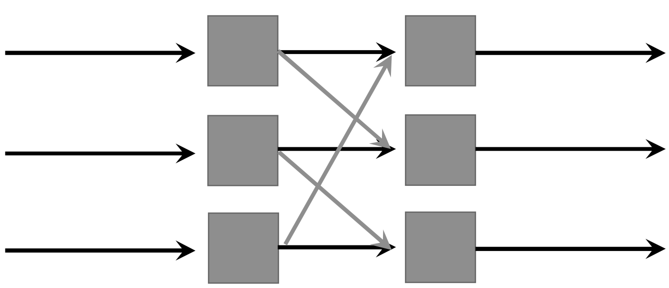
Theorem [KO] For a set of vertices ⇔ a set of maximal paths,
Nonadjacent vertices of N_F ⇔ a **cross structure** in P
Nonadjacent vertices of G_F ⇔ a **generalized cross structure** in P



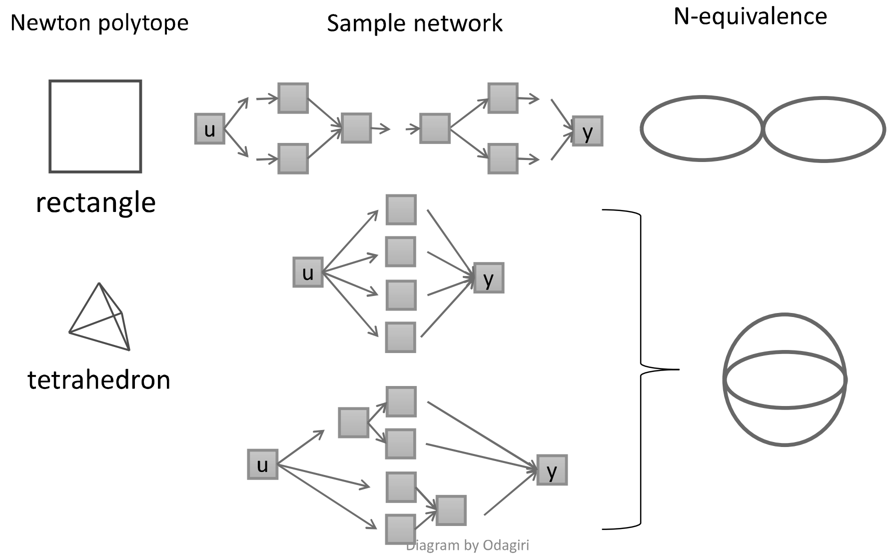
Adjacency and local structure

Theorem[KO] For a set of vertices ⇔ a set of maximal paths,

- They does not make a face of N_F ⇔ they form a **crown structure**.
- They does not make a face of G_F ⇔ they form a **wide crown structure**.



Newton polytopes and N-equivalence



Slice and N-equivalence (#path$\leq$ 6)