

レーリー・ベナール対流における乱流粘性

崇城大学工学部総合教育物理 柴田 博史(Hiroshi Shibata)  
 Department of General Education, Faculty of Engineering,  
 Sojo University

1. はじめに

乱流粘性を評価することが、長年にわたり行われている[1]。一方でカオス性の強い系においては、揺動散逸定理が成立することが近年確かめられてきた。その様な状況の中で、レーリー・ベナール対流を記述する柳田・金子モデルが1993年に提案された[2]。そこで、柳田・金子モデルを使って乱流における粘性係数を求めることを試みる[3]。

まず、揺動散逸定理と粘性係数との関係を述べておく[4,5]。ある意味のある物理量  $G$  に対して輸送係数  $\alpha$  が、

$$\alpha \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle (G_t - G_0)^2 - \bar{G}^2 \rangle}{2t} \quad (1)$$

の様に定義される。ここで、 $G_t$  は時刻  $t$  における  $G$  の値、 $\langle \dots \rangle$  は統計平均を表す。また、

$$\bar{G} \equiv \langle G_t - G_0 \rangle \quad (2)$$

である。この輸送係数  $\alpha$  が

$$J_t \equiv \frac{d}{dt} G_t \quad (3)$$

で定義されるフラックス  $J_t$  を使って

$$\alpha = \int_0^\infty d\tau (\langle J_\tau J_0 \rangle - \langle J_\tau \rangle \langle J_0 \rangle) \quad (4)$$

の様に表されることを揺動散逸定理という[6]。

特に

$$G_t = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{i=1}^N x_i(t) p_{iy}(t) \quad (5)$$

のとき  $\alpha$  を粘性係数という[7]。ここで  $V$  は対象としている系の体積、 $x_i(t)$  は  $i$  番目の粒子の時刻  $t$  における  $x$  座標、 $p_{iy}(t)$  は  $i$  番目の粒子が時刻  $t$  で持つ運動量の  $y$  成分を表す。こ

こで注目すべき点は、分子粘性と乱流粘性の粘性係数に対する表式は等しいことである。両者の違いは、対象とする系の長さのスケールである。

文献[7]にもあるように、ナビエ・ストークス方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu_0 \nabla^2 \vec{u} + \vec{f} \quad (6)$$

の様に記述されるが、これから導かれる粘性方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} u_y = \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_y \quad (7)$$

の粘性係数 $\nu$ は、ある種の統計性の仮定のもとで(4)式の様に表される。

#### References

- [1] 木田重雄, 柳瀬眞一郎, 乱流力学, 朝倉書店, 東京, 1999.
- [2] T.Yanagita, K.Kaneko, Phys. Lett. A 175(1993)415.
- [3] H.Shibata, Physica A 333C(2004)71.
- [4] P.Gaspard, Chaos, Scattering, and Statistical Mechanics, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [5] 川崎恭治, 非平衡と相転移, 朝倉書店, 東京, 2000.
- [6] R.Kubo, M.Toda, N.Hashitsume, Statistical Physics II, Springer, Berlin, Heidelberg, 1985.
- [7] E.Helfand, Phys. Rev. 119(1960)1.

#### 2. 柳田 - 金子モデルによって記述されるレーリー・ベナール対流

レーリー・ベナール対流は、上下2つのプレートに流体がはさまれており、下のプレートの温度が上のプレートの温度より温度が高い時起きる対流をいう。上下プレートの温度差が小さければ、熱伝導により下から上に熱が伝わり対流は起きない。しかし、上下プレートの温度差が大きくなると、熱伝導だけでは系の状態を保てなくなり、対流が起き下から上へと熱が運ばれるようになる[8]。この系のコントロールパラメータはプラントル数 $Pr$ とレーリー数 $Ra$ である。それぞれは、

$$Pr \equiv \frac{\nu}{\kappa}, \quad (8)$$

$$Ra \equiv \frac{\rho_0 g \chi d^3}{\nu \kappa} \delta T \quad (9)$$

の様に表される。ここで、 $\nu$ ,  $\kappa$ ,  $\rho_0$ ,  $g$ ,  $\chi$ ,  $d$ はそれぞれ、動粘性係数、熱拡散係数、流体の平均密度、重力加速度、熱膨張率、上下プレート間距離、そして $\delta T$ は上下プレート間の温度差である[9]。

柳田 - 金子モデルはカップルドマップラティスで、(a)浮力による効果、(b)熱拡散、(c)分子粘性と圧力効果、(d)流れにのって(a), (b), (c)が現れることを考慮したものである。(a),

(b), (c)を具体的に書き表すと次の様になる。速度場 $\vec{v}^t(x, y)$ と内部エネルギー場 $E^t(x, y)$ を各格子点上に設定し,

(a)

$$v_y^*(x, y) = v_y^t(x, y) + \frac{C}{2}[2E^t(x, y) - E^t(x+1, y) - E^t(x-1, y)].$$

$$v_x^*(x, y) = v_x^t(x, y).$$

(b)

$$E^t(x, y) = E^t(x, y) + \lambda \Delta E^t(x, y).$$

(c)

$$v_x^{t+1}(x, y) = v_x^*(x, y) + \nu \Delta v_x^*(x, y) + \eta \left\{ \frac{1}{2} [v_x^*(x+1, y) + v_x^*(x-1, y)] - v_x^*(x, y) \right. \\ \left. + \frac{1}{4} [v_y^*(x+1, y+1) + v_y^*(x-1, y-1) - v_y^*(x-1, y+1) - v_y^*(x+1, y-1)] \right\}$$

そして

$x$  と  $y$  を交換した方程式.

ただし,

$$\Delta A(x, y) = \frac{1}{4} [A(x-1, y) + A(x+1, y) + A(x, y+1) + A(x, y-1) - 4A(x, y)].$$

時間 1 は,

$$\{\vec{v}^t(x, y), E^t(x, y)\} \rightarrow \{\vec{v}^*(x, y), E^t(x, y)\} \rightarrow \{\vec{v}^*(x, y), E^t(x, y)\} \rightarrow \{\vec{v}^t(x, y), E^t(x, y)\} \rightarrow \\ \{\vec{v}^{t+1}(x, y), E^{t+1}(x, y)\} \text{ の手続きで進む。}$$

いま, 内部エネルギー場を温度場と読みかえて,

$$E(x, 0) = \Delta T = -E(x, N_y)$$

と設定する。パラメータの値は柳田 - 金子に従い,  $C = 0.5$ ,  $\lambda = 0.4$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $\eta = 0.2$  とする。システムサイズは  $N = N_x \times N_y = 30 \times 30$  である。 $\Delta T$  は 1.0 から 11.0 まで値をとる。また, 水平方向には周期境界条件を使う。

適当なトランジェントを経た後の温度の空間分布を Fig.1 に, 速度の空間分布を Fig.2 に示す。Fig.1 では, 色が白いほど温度が高い領域を示す。また, Fig.2 では矢の向きが速度の向き, 矢の長さが速度の大きさを示す。Fig.1 では, 温度差  $\Delta T$  が大きくなるほど温度の空間分布が乱れている。この温度の空間分布は速度の空間分布ときれいな対応がついてお

り、下から上に向かって温度の高い領域がひろがっている部分は、速度が上向きの領域と対応がつく。また、上から下に向かって温度の低い領域がひろがっている部分は、速度が下向きの領域と対応がつく。Fig.2でもFig.1と同様に、温度差 $\Delta T$ が大きくなっていくと速度の空間分布の乱れは大きくなる。ここで、各 $\Delta T$ に対して、次の様に定義される速度の大きさの平均 $\bar{v}$ を計算する。

$$\bar{v} \equiv \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \overline{v^m} \quad (10)$$

ここで、

$$\overline{v^m} \equiv \frac{1}{N} \sum_{(x,y)} \sqrt{(v_x^m(x,y))^2 + (v_y^m(x,y))^2} \quad (11)$$

である。 $n$ は $10^5$ 、 $N = N_x \times N_y = 30 \times 30$ であり、 $v_x^m(x,y)$ は時刻 $m$ 、位置 $(x,y)$ における速度の $x$ 成分、 $v_y^m(x,y)$ はその $y$ 成分を表す。結果はFig.3に示されており、 $\Delta T$ が4.0から6.0にかけて2つのブランチが重なっているように見える。この温度差領域は、柳田・金子によって示された様に、レーリー・ベナール対流がソフト乱流からハード乱流に転移する領域である。また、速度の大きさの分散

$$\langle (v - \bar{v})^2 \rangle \equiv \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n (\overline{v^m} - \bar{v})^2 \quad (12)$$

を計算するとFig.4の様になるが、ソフト乱流からハード乱流への転移領域で大きな値をとることがわかる。

## References

- [8] A.V.Gelting, Rayleigh-Benard Convection, World Scientific, Singapore, 1998.
- [9] P.Berge, Y.Pomeau, Ch.Vidal, Order within Chaos, Wiley, New York, 1984.

## 3. 相関関数と乱流粘性

ここでは、2章の結果に基づきレーリー・ベナール対流における乱流の粘性係数を計算する。(4)式を使い計算するのであるが、フラックス $J_x$ に相当する量

$$J_{xy}(t) \equiv \frac{1}{N} \sum_{(x,y)} v_x'(x,y) v_y'(x,y) \quad (13)$$

の時系列をみる。結果はFig.5に示されている。温度差が小さい時は $J_{xy}(t)$ の時間変化もゆっくりである。温度差が転移領域に近づくにつれ、 $J_{xy}(t)$ の時間変化も速くなるが、転移

領域に入ってくると、時間変化は非常にゆっくりとなる。さらに温度差を大きくしていくと再び時間変化は速くなる。 $J_{xy}(t)$ の時系列のパワースペクトル

$$P(\omega) = \langle I(\omega) \rangle \quad (14)$$

を調べる。

ここで

$$I(\omega_j) = \frac{4}{n^2} \left\{ \left( \sum_{t=1}^n J_{xy}(t) \cos(\omega_j(t-1)) \right)^2 + \left( \sum_{t=1}^n J_{xy}(t) \sin(\omega_j(t-1)) \right)^2 \right\} \quad (15)$$

$$\omega_j = \frac{2\pi}{n} j \quad (j = 0, 1, \dots, \frac{n}{2}) \quad (16)$$

である。結果は Fig.6 に示す。 $\langle \dots \rangle$ は統計平均を表すが、ここではアンサンブル数を  $2 \times 10^3$  とした。さらに、 $J_{xy}(t)$ の2時間相関関数

$$C(t) \equiv \langle J_{xy}(t) J_{xy}(0) \rangle - \langle J_{xy}(t) \rangle \langle J_{xy}(0) \rangle \quad (17)$$

を計算すると Fig.7 の様になる。上下のプレートの温度差  $\Delta T$  が 1.0 の時は、 $C(t)$  が飽和するまでの時間が長い。0 に収束する。温度差  $\Delta T$  が 2.0 から 3.0 にかけて  $C(t)$  の絶対値は小さく、また振る舞いも複雑である。温度差  $\Delta T$  がソフト乱流からハード乱流に転移する領域では  $C(t)$  は 0 に飽和することなく、その時間積分は発散するように見える。温度差  $\Delta T$  がハード乱流の領域に達すると、再び  $C(t)$  は 0 に飽和するようになる。この時は、 $C(t)$  が 0 に飽和するまでの時間はかなり短い。2時間相関関数  $C(t)$  が飽和する時間を見積もり、次の様なフラックス  $J_{xy}(t)$  の時間についての粗視化量

$$J_n = \frac{1}{n} \int_0^n dt J_{xy}(t) \quad (18)$$

を導入する。そして、 $J_n$  が  $J$  という値をとる確率を与える確率分布関数  $P(J; n)$

$$P(J; n) \equiv \langle \delta(J - J_n) \rangle \quad (19)$$

を計算する[10]。ここで、 $\langle \dots \rangle$ は1つの解軌道に沿っての長時間平均を、 $\delta(\cdot)$ はDiracの分布を表す。結果を Fig.8 に示す。ここで、長時間平均に  $10^7$  個のアンサンブルを使った。上下プレートの温度差  $\Delta T$  が 1.0 の時は、粗視化の時間  $n$  を十分長く取ると大数の法則を満たす様な滑らかな確率分布関数  $P(J; n)$  が得られる。ところが、 $\Delta T$  がソフト乱流からハード乱流への転移領域になると、 $n$  をどれだけ長くとっても確率分布関数  $P(J; n)$  に微細構造がみられ、滑らかな関数にはならない。Fig.8 には、 $n = 200, 300, 400$  の場合を描いた。温度差  $\Delta T$  が転移領域を超えると、比較的短い粗視化の時間  $n$  で確率分布関数  $P(J; n)$  が滑らかになる。次に、Fig.8 のグラフをもとに、エントロピー関数  $S(J)$  を見積もる。確率分布関数  $P(J; n)$  が

$$P(J;n) = P(\bar{J};n) \exp\{-nS(J)\} \quad (20)$$

の様に書き表すことができる時、確率分布関数  $P(J;n)$  は大偏差統計を示すといい、 $S(J)$  をエントロピー関数という [11,12]。ここで  $\bar{J}$  は  $P(J;n)$  の最大値を与える  $J$  の値である。Fig.9 では横軸に  $J - \bar{J}$  を、縦軸には  $-\ln(P(J;n)/P(\bar{J};n))/n$  をとる。  $n$  を変えても一致した部分をエントロピー関数とみなす。その様子を Fig.9 に示した。Fig.9 に示したエントロピー関数  $S(J)$  と 2 時間相関関数  $C(t)$  との間には、

$$\nu \equiv \int_0^{\infty} dt C(t) = \frac{1}{\frac{d^2 S}{dJ^2} \Big|_{J=\bar{J}}} \quad (21)$$

の様な関係がある。Fig.9 のエントロピー関数から見積もった  $\nu$  と  $J_y(t)$  のパワースペクトルから見積もった  $\nu$  の値との比較を Tab.1 に示す。レーリー・ベナール対流における粘性についていえることは、上下プレートの温度差が小さいと粘性係数も小さく、温度差が大きいと粘性係数も大きい。しかし、ソフト乱流からハード乱流に移る温度差領域においては、粘性係数が非常に大きくなり、この解析だけからは発散している様にみえる。

#### References

- [10] H.Fujisaka, Prog. Theor. Phys. 70(1983)1264; 71(1984)513.
- [11] C.Beck, F.Schlogl, Thermodynamics of Chaotic Systems, an Introduction, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [12] H.Mori, H.Hata, T.Horita, T.Kobayashi, Prog. Theor. Phys. 99(Suppl.)(1989)1.

#### 4. Concluding Remarks

柳田 - 金子モデルで記述されるレーリー・ベナール対流に対して、運動量のフラックスから乱流による粘性の粘性係数を見積もった。全般的にいえる事は、上下プレートの温度差が大きくなればなるほど、粘性係数も大きくなる。しかし、ソフト乱流からハード乱流への転移領域においては、粘性係数が非常に大きな値をとることがわかった。

#### 謝辞

この研究に対して、柳田達雄博士から助言をもらっております。また、九州大学応用力学研究所の及川研究室の方々にも有益な意見をもらっております。また、この研究は九州大学応用力学研究所共同利用 No.15 ME-4 からも支援を受けております。ここに感謝の意を表します。

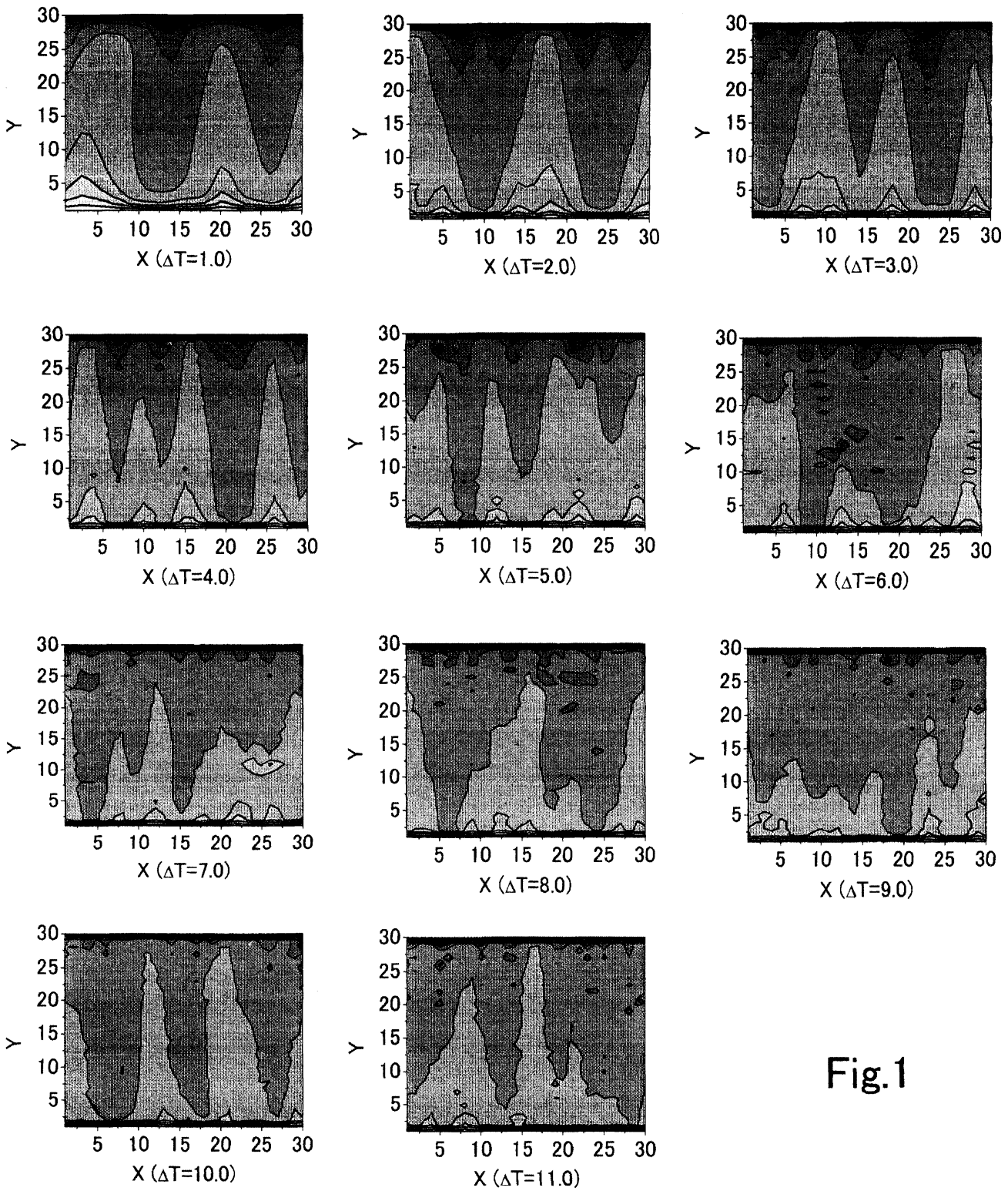


Fig.1

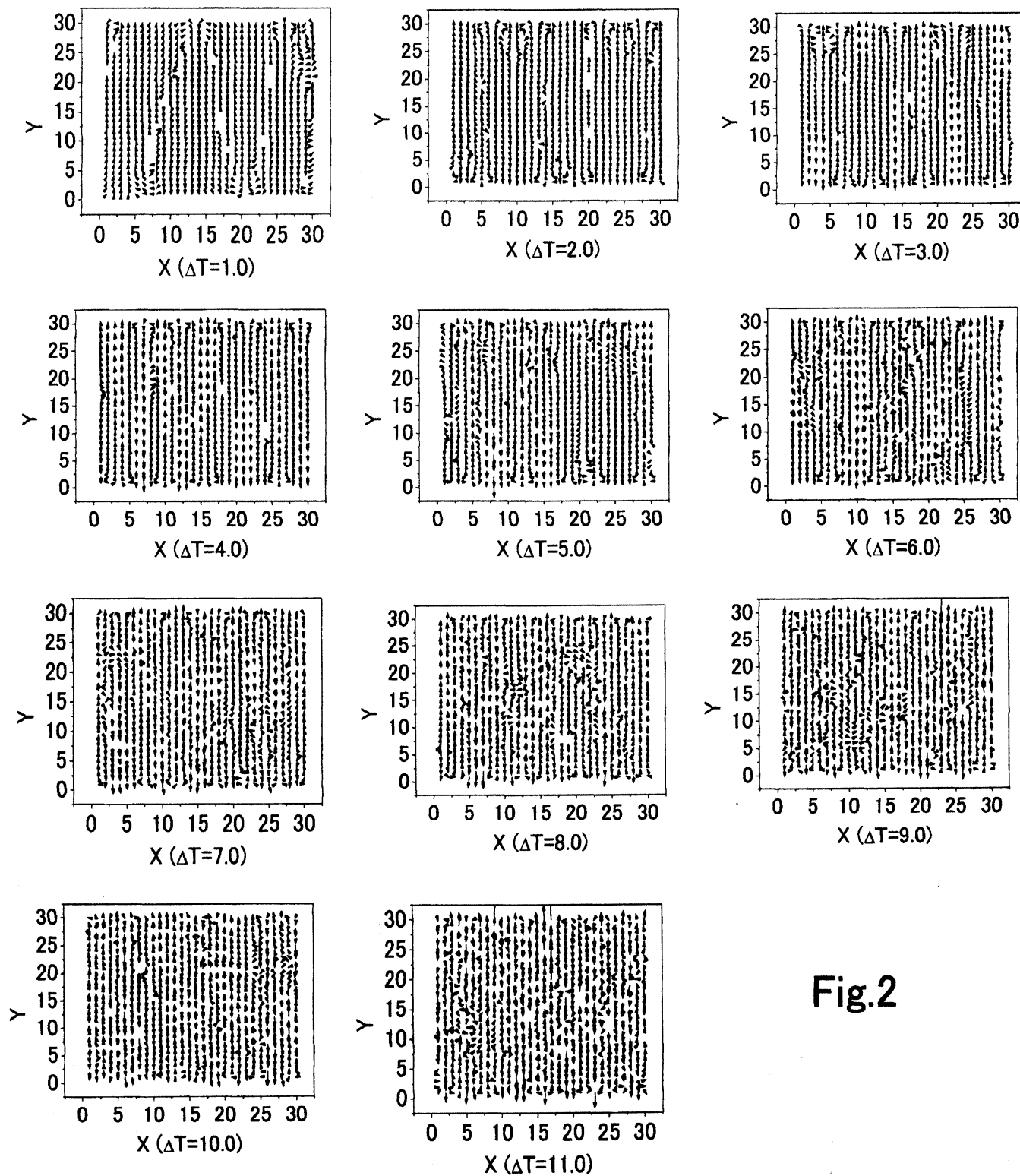


Fig.2



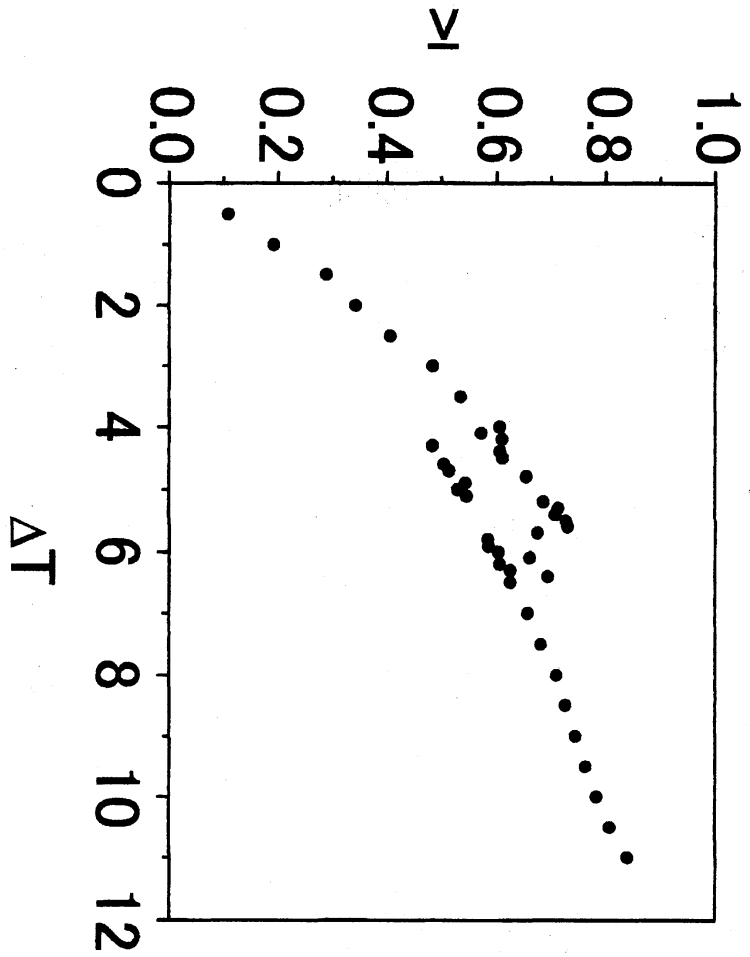


Fig.3



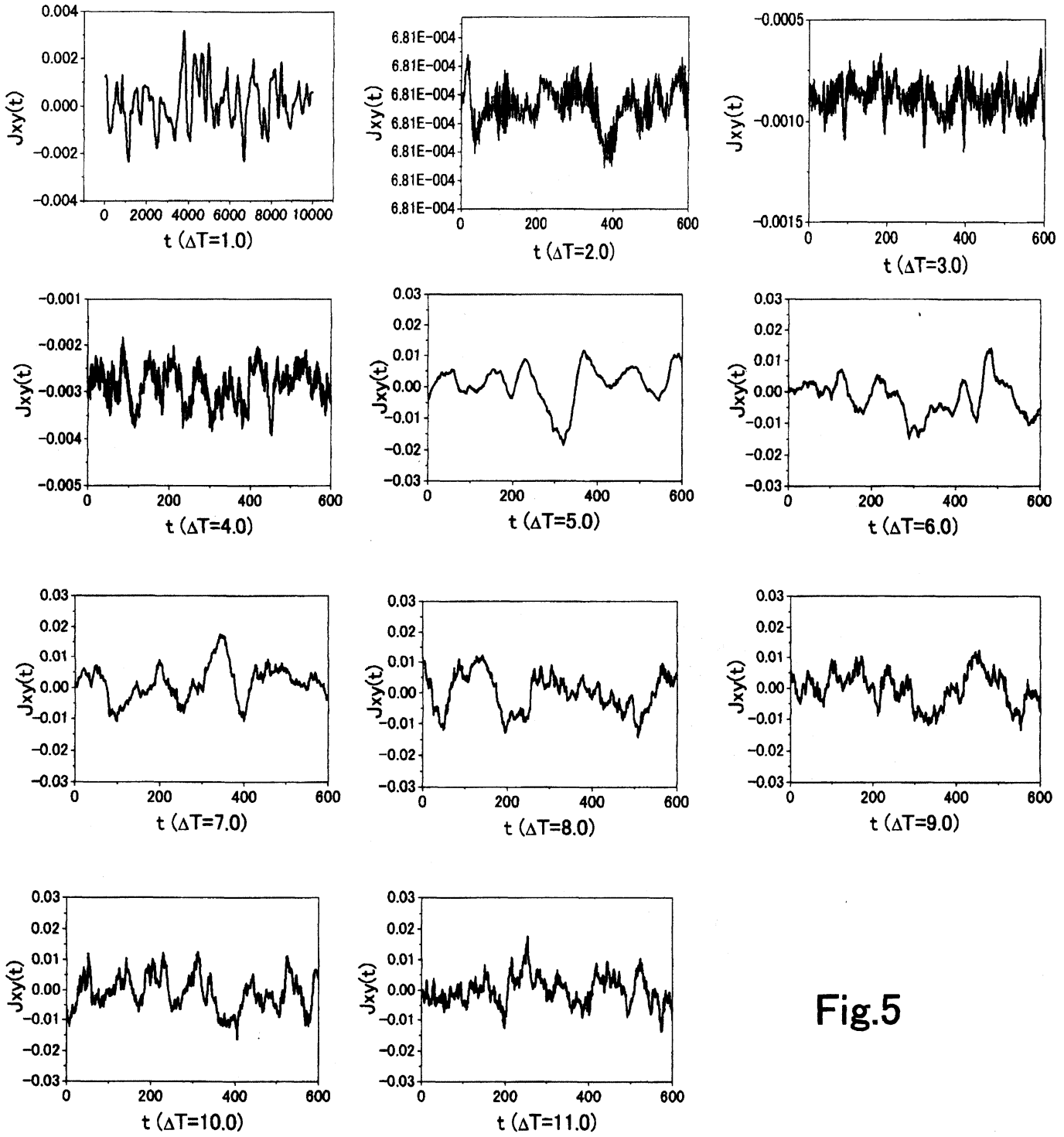


Fig.5

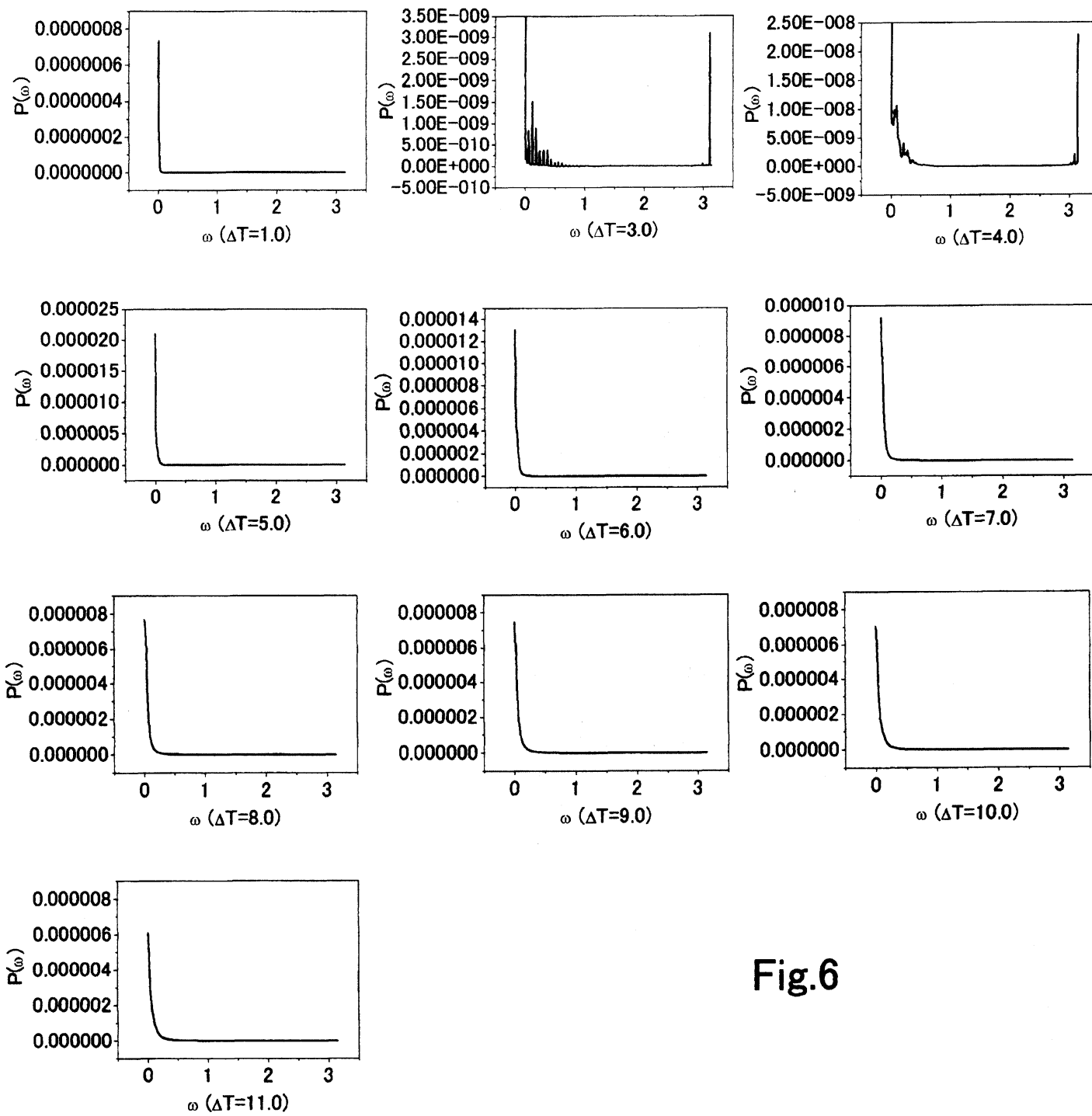


Fig.6

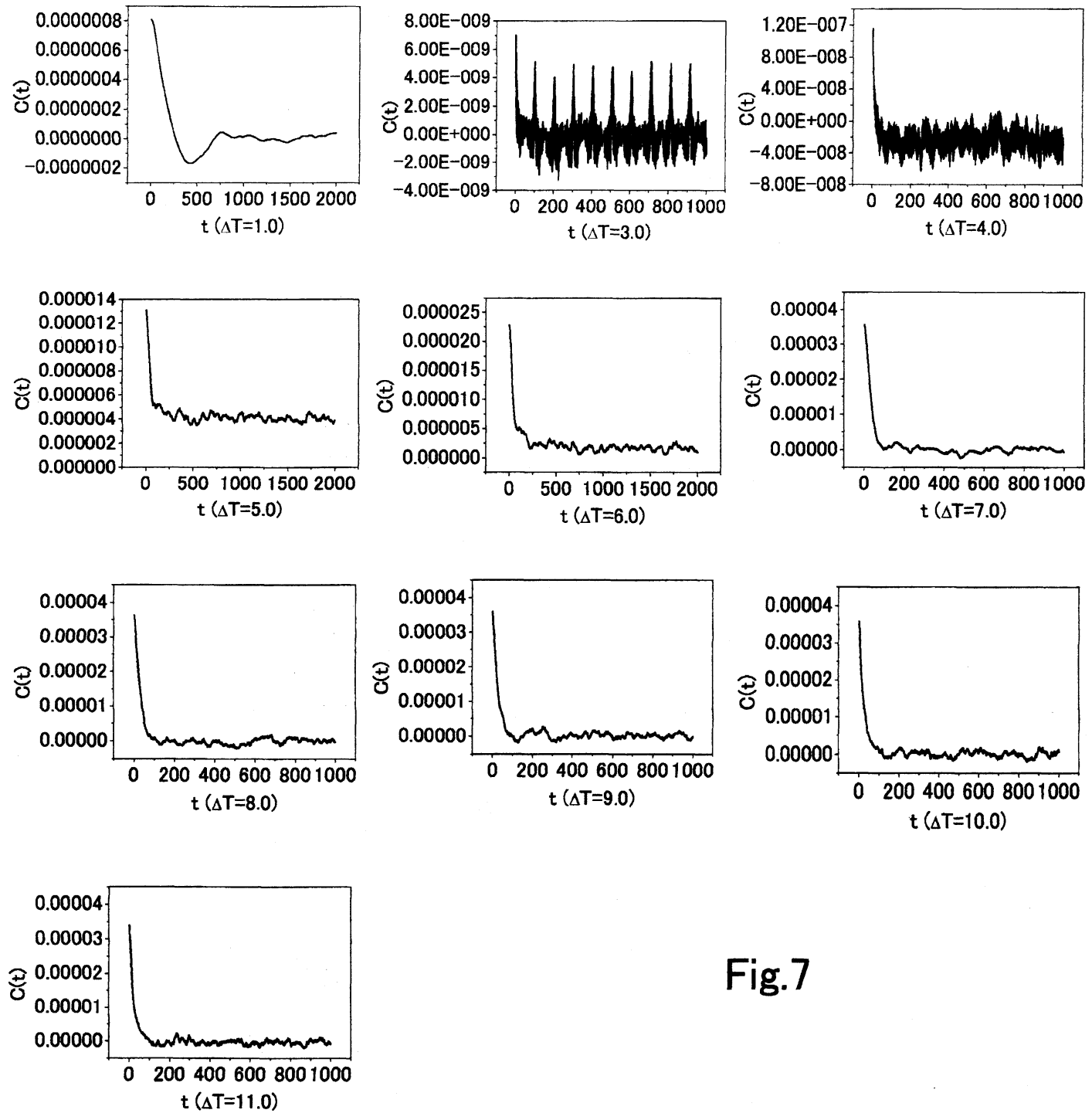


Fig.7

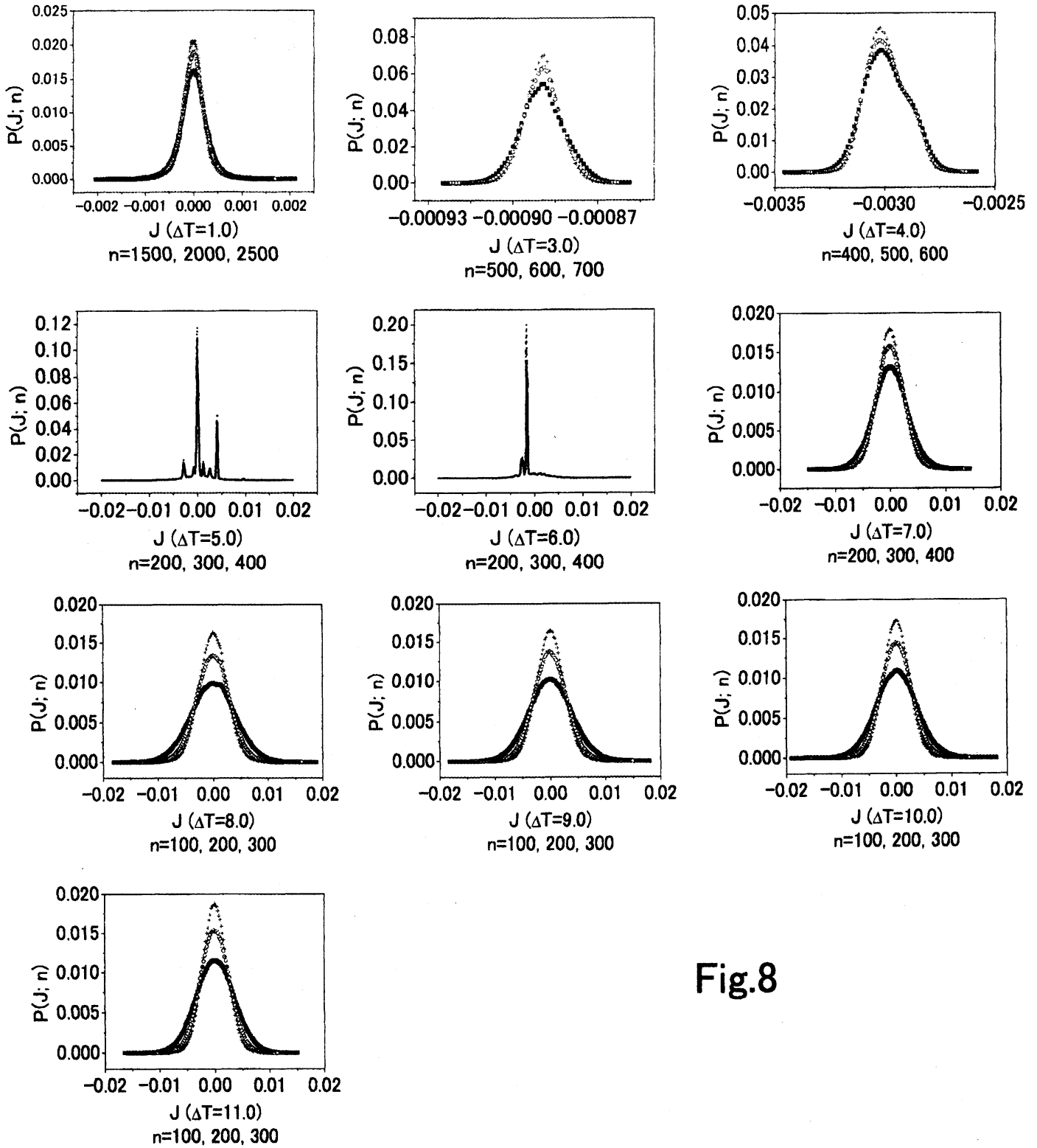


Fig.8

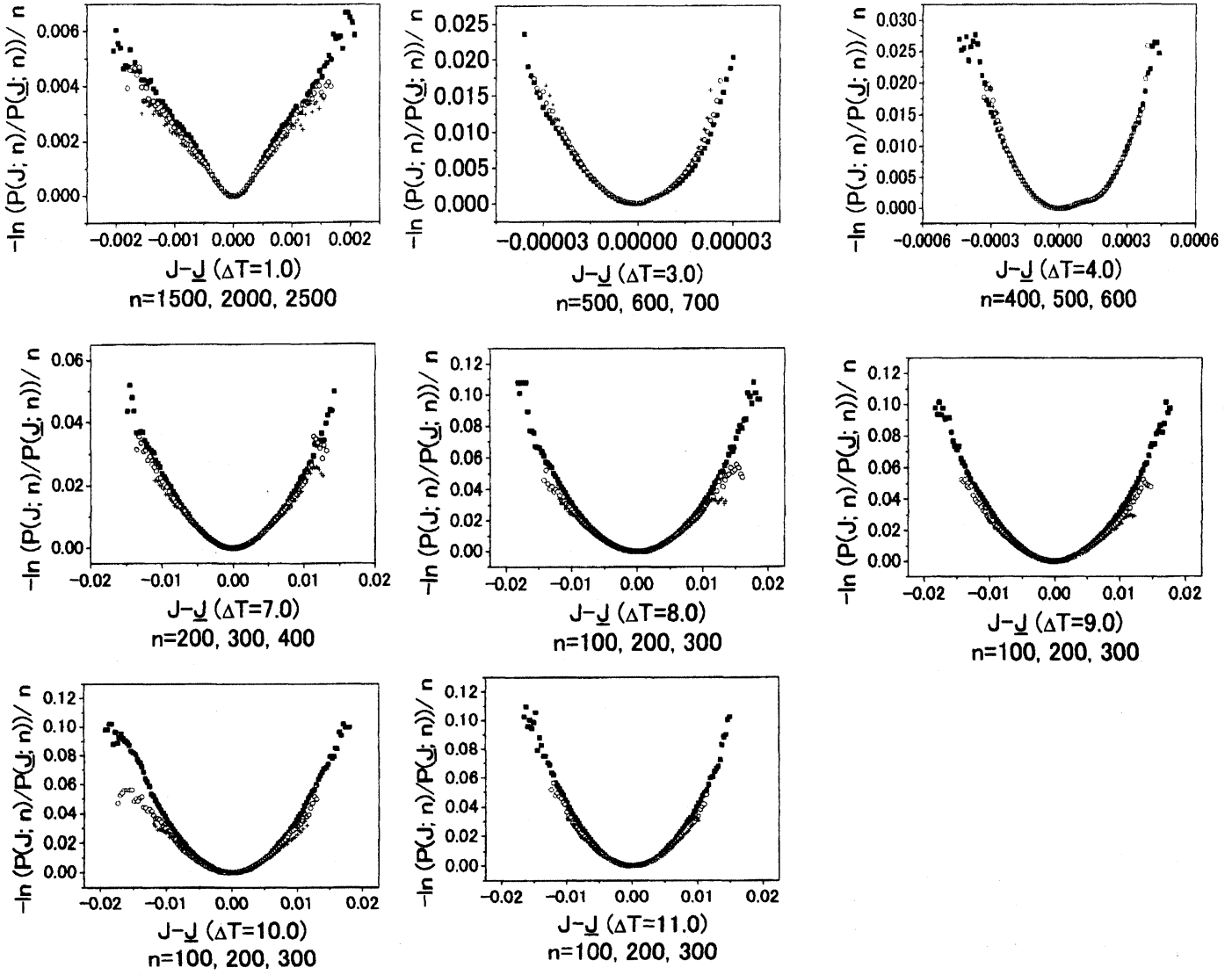


Fig.9

TABLE I

$\Delta T$	$1/\frac{d^2 S}{dJ^2} _{J=\bar{J}}$	$P(0) \times \frac{1024}{4}$
1.0	$7.715 \times 10^{-5}$	$1.360 \times 10^{-4}$
2.0	—	—
3.0	$2.468 \times 10^{-5}$	$8.104 \times 10^{-4}$
4.0	—	$9.030 \times 10^{-3}$
5.0	—	$5.381 \times 10^{-3}$
6.0	—	$3.343 \times 10^{-3}$
7.0	$1.883 \times 10^{-3}$	$2.357 \times 10^{-3}$
8.0	$1.784 \times 10^{-3}$	$1.962 \times 10^{-3}$
9.0	$1.730 \times 10^{-3}$	$1.885 \times 10^{-3}$
10.0	$1.590 \times 10^{-3}$	$1.808 \times 10^{-3}$
11.0	$1.360 \times 10^{-3}$	$1.557 \times 10^{-3}$

TAB.I. The estimate of the viscosity coefficient by the turbulence, i.e., the time integral of two-time correlation function through the large deviation statistics. The  $10^8$  ensembles are used for it.  $P(0) \times \frac{1024}{4}$  is the estimate by the Fourier transform for the time series of the momentum flux. 1024 is the length of the time series in order to calculate one power spectrum. The data of the power spectra are averaged over  $2 \times 10^3$  ensembles.