数理解析研究所講究録 1407 巻 2004 年 24-50



# 可換アソシエーションスキームの指標理論

田中 太初 (Hajime Tanaka)
Graduate School of Mathematics, Kyushu University*

アソシエーションスキームは元々統計の実験計画法の中で導入されたものであり ([19])、後に Delsarte [26] により符号理論及びデザイン理論を統一的に取り扱う枠組みとして取り上げられ、代数的組合せ論に於いて中心的な研究対象となっている[1]。一方、アソシエーションスキームの概念は可移置換群の満たす性質を純粋に組合せ論的に公理化したものと捉えることができ、Bannai-Ito [10] ではこの立場を取っている。

アソシエーションスキームに関する単行本では、Bannai-Ito [10] の他に、Brouwer-Cohen-Neumaier [20] や Zieschang [87] 等がある。それぞれ異なるアプローチで書かれており、ぜひ読み比べていただきたい。私はまだ現物を手にしていないが最近 Bailey による本 [3] も出版された。加えて、単行本ではないが Delsarte の記念碑的論文 [26] は必読であろう。また、手に入りにくいが Bannai [7] は非常にコンパクトにまとめられていて、かつ最近の話題まで網羅しており一読をお勧めする。ただし証明は多くの場合省略されている。日本語で書かれたものでは、坂内-坂内 [90] の第 7 章等が挙げられる。また、アソシエーションスキーム全般についての解説記事としては坂内 [4, 88, 89] がある。

本稿は、1990 年前後に坂内英一教授達により見出された、可換なアソシエーションスキームの指標表間のコントロール現象を紹介することを主目標とする。アソシエーションスキームの研究は現在様々な方向に進展しており、コントロール現象に関する話題はその一つに過ぎないが、筆者にとっては非常に魅力的であり、かつ重要であるとも考えている。

§1 ではアソシエーションスキームの定義から始め、基本的な性質を証明つきで紹介する。ただし、ここで述べるほとんどの内容は §3 で必要とされるものに限られており、極めて偏った、かつ不十分な書き方がされていることを予めお断りしておく。スピーディーに読めるよう心がけたつもりなので、この原稿を読まれた方が今後アソシエーションスキームに関する講演等を聴いた際の抵抗感を取り除く一助となれば幸いである。詳しくお知りになりたい方は上述の文献をご覧いただきたい。

§2 では、まず原始的アソシエーションスキームの概念を導入する。任意の有限群からいつでも群アソシエーションスキームと呼ばれる可環アソシエーションスキームが構成できるが、群アソシエーションスキームが原始的であることとその有限群が単純群であることが実は同値である。また、この節では有限群と関連した他のいくつかの話題についても触れる。

---

*現所属：東北大学大学院情報科学研究科

[1] 数理物理学の共形場理論に於けるフュージョン代数や, スピンモデルとの関連については、Bannai [6] や Jaeger-Matsumoto-Nomura [44]、最近のものでは Chan-Godsil-Munemasa [22] 等いろいろな結果がある。

§3 では $P$-& $Q$-多項式スキームの話題から始め、コントロール現象まで紹介する。本文中でも詳しく述べるが、$P$-多項式かつ $Q$-多項式であるという性質は種々の観点から極めて重要であり、このクラスのアソシエーションスキームはランク 1 の対称空間の組合せ論的類似であるとも捉えられている ([10, 88])。また、分類問題についても Terwilliger 達による研究が進行中である ([79, 80, 81, 42] 等)。一方、一般の原始的なアソシエーションスキームの分類は膨大すぎてほとんど不可能であろう[2]。これは有限単純群の群アソシエーションスキームが全て含まれることからも推察され、従って、$P$-& $Q$-多項式という性質の適切な一般化を見出すことにより、良い性質を持ったしかも充分広いクラスの（原始的）アソシエーションスキームに制限して考察しようとする試みは非常に重要だと思われる。この節で紹介する指標表間のコントロール現象の重要性は、その様な一般化の存在の可能性を示唆していると思われるところにもある。

本稿は 2003 年 12 月に京都大学数理解析研究所で行われた研究集会『有限単純群の研究とその周辺』に於いて筆者が行った 3 回の講演の内容をまとめたものである。諸事情によりアソシエーションスキームに関する連続講演の大役が筆者に回ってきたのであるが、極めて力量不足であり、アソシエーションスキームの魅力を伝えることができたかどうか甚だ心許ない。しかしながら、ここで取り扱った内容について僅かでも興味を覚えていただければ幸甚に存ずる。

# 1 アソシエーションスキーム

有限群 $G$ が有限集合 $X$ に可移に作用しているとする。このとき $G$ は $X\times X$ 上に $g\cdot(x,y)=(gx,gy)$ $(\forall g\in G, \forall x,y\in X)$ により自然に作用する。$R_0=\{(x,x)\in X\times X\mid x\in X\}, R_1,\dots,R_d$ を軌道の全体とすると、これらは明らかに次の 4 つの性質を満たす：

(i) $R_0=\{(x,x)\in X\times X\mid x\in X\}$ である。
(ii) $R_0,R_1,\dots,R_d$ は集合 $X\times X$ の分割を与える。すなわち $R_0\cup R_1\cup\cdots\cup R_d=X\times X$、かつ $i\neq j$ ならば $R_i\cap R_j=\emptyset$ である。
(iii) 各 $i\in\{0,1,\dots,d\}$ に対し $R_i^T=R_{i'}$ を満たす $i'\in\{0,1,\dots,d\}$ が存在する。ただし $R_i^T=\{(y,x)\in X\times X\mid (x,y)\in R_i\}$ と定める。
(iv) 任意の $i,j,k\in\{0,1,\dots,d\}$ に対し集合 $\{z\in X\mid (x,z)\in R_i,\ (z,y)\in R_j\}$ の位数 $p_{ij}^k$ は組 $(x,y)\in R_k$ の取り方に依らず $i,j,k$ のみによって決まる。

アソシエーションスキームはこれらの性質を定義として採用した組合せ論的対象である。すなわち

**定義 1.1.** 有限集合 $X$ とその上の非自明な関係 $R_0,R_1,\dots,R_d$ が上の 4 条件 (i)-(iv) を満たすとき、組 $\mathfrak{X}=(X,\{R_i\}_{0\le i\le d})$ をクラス $d$ の**アソシエーションスキーム** (association scheme) と呼ぶ。 □

なお、定数 $p_{ij}^k$ を**交叉数** (intersection number)、特に $k_i=p_{ii'}^0$ を関係 $R_i$ の**分岐指数** (valency) と呼ぶ。集合 $X$ が有限群 $G$ の等質空間となっている場合に上述のようにして

[2] 小さい頂点数のアソシエーションスキームの分類については Hanaki のホームページ [33] を参照されたい。

得られるアソシエーションスキームを $\mathfrak{X}(G,X)$ と書くことが多い。ただし、作用する群 $G$ が文脈から明らかなときは、場合によっては単に $X$ で表すこともある。

次にいくつか具体例を与える。もちろんこれら以外にも重要な例は非常にたくさんあるが、後の内容に関わってくるもののみに絞って紹介することにした[3]。

**例 1.2.** (a) 位数 $v$ の有限集合 $V$ の $d$ 元からなる部分集合全体を $X=V^{(d)}$ で表す。ただし $1\leq d\leq \frac{v}{2}$ とする。このとき $0\leq i\leq d$ に対し、関係 $R_i$ を $(x,y)\in R_i \Leftrightarrow |x\cap y|=d-i$ $(\forall x,y\in X)$ と定めると組 $J(v,d)=(X,\{R_i\}_{0\leq i\leq d})$ はアソシエーションスキームとなる。これは対称群 $S_v$ の作用により得られ、一点の安定部分群は $S_d\times S_{v-d}$ と同型である。このアソシエーションスキームは **Johnson スキーム**と呼ばれ、デザイン理論に於いて重要な役割を果たす。

(b) $q$ 個の異なるシンボルからなるアルファベット $F$ を取り、長さ $d$ の語全体を $X$ とおく。すなわち $X=F^d$ である。$0\leq i\leq d$ に対し、2 元 $x=(x_1,x_2,\ldots,x_d), y=(y_1,y_2,\ldots,y_d)\in X$ が関係 $R_i$ にあることを $d_H(x,y)=|\{j|x_j\neq y_j\}|=i$ によって定めると、組 $H(d,q)=(X,\{R_i\}_{0\leq i\leq d})$ はアソシエーションスキームとなる。容易に分かるようにこれは環積 $S_q\wr S_d$ の作用から得られ、一点の安定部分群は $S_{q-1}\wr S_d$ と同型である。このアソシエーションスキームは **Hamming スキーム**と呼ばれ、符号理論に於いて重要である。なお、$q=2$ の場合は B 型 Weyl 群を放物型部分群で割った等質空間となっていることに注意されたい。

(c) 有限体 $\mathbb{F}_q$ 上 $v$ 次元ベクトル空間 $V$ の $d$ 次元部分空間全体を $X$ とおく。ただし $1\leq d\leq \frac{v}{2}$ とする。$0\leq i\leq d$ に対し、関係 $R_i$ を $(x,y)\in R_i \Leftrightarrow \dim x\cap y=d-i$ $(\forall x,y\in X)$ と定めると組 $J_q(v,d)=(X,\{R_i\}_{0\leq i\leq d})$ はアソシエーションスキームとなる。このアソシエーションスキームは一般線型群 $GL(v,q)$ の作用により得られ、**Johnson スキームの $q$-類似** ($q$-analogue of the Johnson scheme) と呼ばれる。

(d) $V$ を $\mathbb{F}_q$ 上 $2d+1$ 次元ベクトル空間とし、その上の非退化な二次形式を考える[4]。極大全等方部分空間（これらは $d$ 次元である）の全体を $X$ とおき、関係 $R_i$ $(0\leq i\leq d)$ を (c) と同様に定義するとこれはまたアソシエーションスキームを与える。このアソシエーションスキームは association scheme of the dual polar space of type $B_d(q)$ と呼ばれる。筆者はこの用語の和訳を目にしたことはなく、また直訳すると長すぎるので、ここでは仮に **$B_d(q)$ 型双対極スキーム**と呼ぶことにしたい[5]。もちろんこの種のアソシエーションスキームは他の古典形式に対しても定義され、それぞれ対応する古典群をやはりしかるべき極大放物型部分群で割って得られる。

(e) $G$ を有限群、$C_0=\{1\},C_1,\ldots,C_d$ をその共役類とする。関係 $R_i$ $(0\leq i\leq d)$ を $(x,y)\in R_i\Leftrightarrow yx^{-1}\in C_i$ $(\forall x,y\in G)$ と定めることにより $G$ にアソシエーションスキームの構造を入れることができる。これは直積 $G\times G$ の $G$ への作用 $(g,h)\cdot x=gxh^{-1}$ $(\forall g,h,x\in G)$ により得られる。このアソシエーションスキームを通常 $\mathfrak{X}(G)$ と表し、$G$ の**群アソシエーションスキーム** (group association scheme) と呼ぶ。 □

---

[3] 可移置換群より得られないアソシエーションスキームについては Bannai [5] 等に興味深い例が数多く挙げられている。

[4] 二次形式、特に標数 2 の有限体上奇数次元のものについては Munemasa [61] が詳しい。

[5] dual polar graph という用語は存在する。

アソシエーションスキームの定義の条件 (i)-(iv) は可移置換群の満たす自然な性質ではあるが、とりわけ条件 (iv) 等はいささか取っ付き難いと思われる方もおられるであろう。しかし、次に述べる行列を用いた定義の言い換えにより、これらの条件が至極簡単明瞭なものであることが明らかとなる。すなわち、$A_i$ を関係 $R_i$ の**隣接行列** (adjacency matrix) とする：

$$(A_i)_{x,y} = \begin{cases} 1 & \text{if } (x,y) \in R_i \\ 0 & \text{if } (x,y) \notin R_i \end{cases}$$

このとき、条件 (i)-(iv) は

$$A_0 = I, \quad \sum_{i=0}^{d} A_i = J, \quad A_i^T = A_{i'}, \quad A_i A_j = \sum_{k=0}^{d} p_{ij}^k A_k \tag{1}$$

と表せる。ただしここで $I$ は $|X|$ 次の単位行列、$J$ は成分が全て 1 の行列を表す。従って、行列 $A_0, A_1, \ldots, A_d$ で生成される複素数体上の全行列環の部分代数を $\mathfrak{A}$ と表すと、$\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{A} = d+1$ であることが分かる。この代数 $\mathfrak{A}$ はアソシエーションスキーム $\mathfrak{X}$ の **Bose-Mesner 代数**と呼ばれ[6]、アソシエーションスキームを研究する上で非常に重要な道具である。

アソシエーションスキーム $\mathfrak{X} = (X, \{R_i\}_{0 \le i \le d})$ が**可換** (commutative) であるとは、その Bose-Mesner 代数 $\mathfrak{A}$ が可換であることとし、**対称** (symmetric) であるとは、隣接行列 $A_0, A_1, \ldots, A_d$ が全て対称行列であることをいう。(1) の最後の式に於いて両辺の転置を取れば即座に分かるように、対称なアソシエーションスキームは可換である。以後我々は主に可換アソシエーションスキームを取り扱う。例 1.2 (a)-(d) のアソシエーションスキームは全て対称である。また、(e) については、如何なる有限群 $G$ に対してもその群アソシエーションスキーム $\mathfrak{X}(G)$ は常に可換になることに注意されたい。

**例 1.3.** (a) 有限群 $G$ が有限集合 $X$ に可移に作用しているとし、$\mathfrak{X}(G,X)$ を対応するアソシエーションスキーム、$\mathfrak{A}$ をその Bose-Mesner 代数とする。$V = \mathbb{C}^{|X|}$ とおき、$\pi : G \to GL(V)$ を置換表現とする。すなわち $\pi(g)_{xy} = \delta_{x,gy}$ である ($\forall g \in G, \forall x, y \in X$)。$\mathrm{End}_{\mathbb{C}[G]}(V)$ を中心化環（Hecke 環）とすると、

$$\begin{aligned} M \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}[G]}(V) &\Leftrightarrow \pi(g) \cdot M \cdot \pi(g)^{-1} = M \quad (\forall g \in G) \\ &\Leftrightarrow M_{xy} = M_{gx,gy} \quad (\forall g \in G, \forall x, y \in X) \\ &\Leftrightarrow M \in \mathfrak{A} \end{aligned}$$

となる。つまりこの場合 Bose-Mesner 代数は中心化環に他ならない。これは $\mathfrak{X}(G,X)$ が可換であることと、置換表現が無重複 (multiplicity-free)、すなわち非同型な既約表現の直和に分解されることが同値であることを意味している。

(b) $G$ を有限群、$C_0 = \{1\}, C_1, \ldots, C_d$ をその共役類とする。このとき $g \in C_k$ を固定すると、$G$ の群アソシエーションスキーム $\mathfrak{X}(G)$ の交叉数 $p_{ij}^k$ は

$$p_{ij}^k = |\{(h_1, h_2) \in C_j \times C_i \mid h_1 h_2 = g\}|$$

[6]**隣接代数** (adjacency algebra) と呼ばれることもある。

となることが容易に示せる。従ってこのことから、対応 $A_i \leftrightarrow \sum_{g\in C_i} g$ が $\mathfrak{X}(G)$ の Bose-Mesner 代数 $\mathfrak{A}$ と $G$ の群環の中心 $Z(\mathbb{C}[G])$ の同型を与えることが判った。 $\square$

$\mathfrak{X} = (X, \{R_i\}_{0\le i\le d})$ を可換アソシエーションスキーム、$\mathfrak{A}$ をその Bose-Mesner 代数とする。このとき

**命題 1.4.** $\mathfrak{A}$ は半単純である。

**証明.** $\mathfrak{A}$ が可換なので隣接行列達は互いに可換な正規行列であり、これらの行列、従って $\mathfrak{A}$ に含まれる全ての行列はあるユニタリー行列により同時対角化される。故に $\mathfrak{A}$ は 0 以外の冪零元を持ち得ず、半単純である。 $\square$

この命題により、$\mathfrak{A}$ は原始冪等元からなる基底 $E_0 = \frac{1}{|X|}J, E_1, \ldots, E_d$ を持つ[7]。そこで、可換アソシエーションスキーム $\mathfrak{X}$ の**第一固有行列** (first eigenmatrix) $P = (P_i(j))$ 及び**第二固有行列** (second eigenmatrix) $Q = (Q_i(j))$ を、$\mathfrak{A}$ の二つの基底 $\{A_0 = I, A_1, \ldots, A_d\}$、$\{E_0 = \frac{1}{|X|}J, E_1, \ldots, E_d\}$ の間の変換行列として定義する：

$$(A_0, A_1, \ldots, A_d) = (E_0, E_1, \ldots, E_d)\cdot P, \quad |X|(E_0, E_1, \ldots, E_d) = (A_0, A_1, \ldots, A_d)\cdot Q$$

すなわち

$$A_i = \sum_{j=0}^{d} P_i(j)E_j, \quad |X|E_i = \sum_{j=0}^{d} Q_i(j)A_j \quad (0\le i\le d)$$

とする。ただし $P_i(j)$, $Q_i(j)$ はそれぞれ $P$, $Q$ の $(j,i)$-成分を表す。特に第一固有行列 $P$ は $\mathfrak{X}$ の**指標表** (character table) とも呼ばれ、後で見るように有限群の通常の指標表の概念の自然な一般化である[8]。

有限群の場合と同様に、アソシエーションスキームの指標表も直交関係を持つ：

**命題 1.5.** (i) $Q_j(i)/m_j = \overline{P_i(j)}/k_i$ が成り立つ。ただし $m_j = \operatorname{rank} E_j = \operatorname{tr} E_j$ とする。

(ii) **(第一直交関係)**

$$\sum_{\nu=0}^{d} \frac{1}{k_\nu} P_\nu(i)\overline{P_\nu(j)} = \frac{|X|}{m_i}\cdot\delta_{ij}$$

(ii) **(第二直交関係)**

$$\sum_{\nu=0}^{d} m_\nu P_i(\nu)\overline{P_j(\nu)} = |X|k_i\cdot\delta_{ij}$$

**証明.** サイズの等しい二つの行列 $M, N$ に対し、その Hadamard 積 $M\circ N$ を $(M\circ N)_{ij} = M_{ij}N_{ij}$ により定義する。$E_j\circ A_i = \frac{1}{|X|}\sum_{l=0}^{d} Q_j(l)A_l\circ A_i = \frac{1}{|X|}Q_j(i)A_i$ の成分の総和を両辺それぞれ計算する。左辺については

$$\sum_{x,y\in X}(E_j)_{xy}(A_i)_{xy} = \sum_{x,y\in X}(E_j)_{xy}(A_i^T)_{yx} = \operatorname{tr}(E_jA_{i'}) = P_{i'}(j)\operatorname{tr}E_j = P_{i'}(j)m_j$$

[7]明らかに $\frac{1}{|X|}J$ は冪等であり、しかも $\operatorname{rank}(\frac{1}{|X|}J) = 1$ より原始的である。

[8]一般に可換アソシエーションスキームの指標表の成分が円分体に含まれるか否かは、有限群の指標理論との違いを知る上で興味深い問題である。これに関しては Munemasa [60] による部分的な結果がある。

を得る。また、右辺については明らかに $Q_j(i)k_i$ となり、(i) が示された[9]。(ii) 及び (iii) を示すには $PQ = QP = |X|I$ を成分ごとに書き下し (i) を適用すればよい。 □

アソシエーションスキームが有限群の等質空間となっている場合は、例 1.3 (a) によりその Bose-Mesner 代数は Hecke 環と同型であり、従って原始冪等元を求めることは帯球函数を記述することと本質的に同値である。正確な対応については [10, §2.11] をご覧頂くこととして、実際の指標表の具体例を次にいくつか挙げる。

**例 1.6.** (a) $J(v,d)$ を Johnson スキームとすると、分岐指数は明らかに $k_i = \binom{d}{i}\binom{v-d}{i}$ で与えられ、指標表 $P = (P_i(j))$ は **dual Hahn 多項式**[10]により記述される (Delsarte [26, 27], Bannai-Ito [10, §3.2]) :

$$\frac{P_i(j)}{k_i} = R_i(\lambda(j); d-v-1, -d-1, d) = {}_3F_2\left(\begin{matrix} -i, -j, j-v-1 \\ d-v, -d \end{matrix} \middle| \, 1\right)$$

ただし、$\lambda(x) = x(x-v-1)$ である。

(b) Hamming スキーム $H(d,q)$ の分岐指数は $k_i = \binom{d}{i}(q-1)^i$ で与えられ、さらに指標表 $P = (P_i(j))$ は **Krawtchouk 多項式**を用いて記述される (Delsarte [26, 27], Bannai-Ito [10, §3.2], Stanton [68]) :

$$\frac{P_i(j)}{k_i} = K_i\left(j; \frac{q-1}{q}, d\right) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} -i, -j \\ -d \end{matrix} \middle| \, \frac{q}{q-1}\right)$$

(c) Johnson スキームの $q$-類似 $J_q(v,d)$ については、分岐指数は $k_i = q^{i^2}\begin{bmatrix} d \\ i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v-d \\ i \end{bmatrix}$ となる。ここで

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q = \frac{(q^n-1)\dots(q^{n-m+1}-1)}{(q^m-1)\dots(q-1)}$$

は $q$-二項係数を表す。指標表 $P = (P_i(j))$ は **dual $q$-Hahn 多項式**により記述される (Delsarte [27], Stanton [68]) :

$$\frac{P_i(j)}{k_i} = R_i(\mu(j); q^{d-v-1}, q^{-d-1}, d \,|\, q) = {}_3\phi_2\left(\begin{matrix} q^{-i}, q^{-j}, q^{j-v-1} \\ q^{d-v}, q^{-d} \end{matrix} \middle| \, q; q\right)$$

ただし、$\mu(x) = q^{-x} + q^{x-v-1}$ である。

(d) $B_d(q)$ 型双対極スキームの分岐指数は $k_i = q^{i(i+1)/2}\begin{bmatrix} d \\ i \end{bmatrix}$ であり、指標表 $P = (P_i(j))$ は **dual $q$-Krawtchouk 多項式**により記述される[11] (Stanton [67, 68]) :

$$\frac{P_i(j)}{k_i} = K_n\left(\lambda(j); -\frac{1}{q}, d \,\middle|\, q\right) = {}_3\phi_2\left(\begin{matrix} q^{-i}, q^{-j}, -q^{j-d-1} \\ q^{-d}, 0 \end{matrix} \middle| \, q; q\right)$$

ここで、$\lambda(x) = q^{-x} - q^{x-d-1}$ である。なお、他の型の双対極スキームについては Stanton [67] を参照されたい。

---

[9] $E_j$ 達は正規な冪等行列であり、従って Hermite 行列である。故に $P_{i'}(j) = \overline{P_i(j)}$ となることに注意されたい。

[10] 例 1.6 に現れる多項式については、Koekoek-Swarttouw [47] の表記に従った。

[11] Stanton [67] による $q$-Krawtchouk 多項式の定義は [47] のものと微妙に異なるので注意を要する。

(e) 記号を例 1.2 (e) の通りとする。例 1.3 (b) で見たように、$\mathfrak{X}(G)$ の Bose-Mesner 代数 $\mathfrak{A}$ は $Z(\mathbb{C}[G])$ と同型であり、従って $\chi_0 = 1_G, \chi_1, \ldots, \chi_d$ を $G$ の既約指標の全体とすると、よく知られているように $\mathfrak{A}$ の原始冪等元は

$$e_i = \frac{\deg \chi_i}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_i(g)} g \quad (0 \leq i \leq d)$$

と対応する。さらに分岐指数 $k_i$ は $|C_i|$ に等しく、有限群の指標表の第一直交関係より $\mathfrak{X}(G)$ の指標表 $P$ は、

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\deg \chi_0} & & & \\ & \frac{1}{\deg \chi_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{\deg \chi_d} \end{bmatrix} \cdot T \cdot \begin{bmatrix} k_0 & & & \\ & k_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_d \end{bmatrix}$$

で与えられることが分かる。ただしここで、行列 $T$ は $G$ の通常の指標表である（行、列はそれぞれ既約指標及び共役類によって添え字付けられている）。また、この場合 $\mathfrak{X}(G)$ の直交関係（命題 1.5）は $T$ の直交関係と等しい。 □

上の例 (c)、(d) に於いて極限 $q \longrightarrow 1$ を取ると、それぞれ $J(v,d)$ 及び $H(d,2)$ の指標表が得られることに注意されたい。

可換アソシエーションスキームの指標表は有限群の指標表の自然な拡張概念であるという点で興味深いが、それ以外にもいろいろな意味に於いて重要である：

(1) §3 で僅かに触れるに留めるが、一般にアソシエーションスキームに於いて符号やデザインの理論を展開することができ、その際に指標表 $P$ 及び $Q$ の情報は決定的な役割を果たす。これは Delsarte [26] の業績の一つである。

(2) アソシエーションスキーム $\mathfrak{Y} = (X, \{S_j\}_{0 \leq j \leq e})$ が同じ集合 $X$ 上の別のアソシエーションスキーム $\mathfrak{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$ の関係をまとめることにより得られるとき、すなわち $\{0, 1, \ldots, d\}$ の分割 $\Pi = \{\Pi_0 = \{0\}, \Pi_1, \ldots, \Pi_e\}$ が存在して

$$S_j = \bigcup_{i \in \Pi_j} R_i$$

となるとき、$\mathfrak{Y}$ は $\mathfrak{X}$ の**融合スキーム** (fusion scheme) と呼ばれる[12]。可換アソシエーションスキームについては、その指標表から全ての融合スキームを決定することが原理的には可能であることが Bannai [5] 及び Muzychuk [62] により独立に示されており、Bannai-Muzychuk の判定条件として知られている[13]。

(3) アソシエーションスキームの指標表 $P = (P_i(j))$ は Bose-Mesner 代数により、従ってその構造定数である交叉数 $p_{ij}^h$ により定まる。証明は省くが、逆に指標表から交叉数を決定する公式が知られている (cf. [10, p.65, Theorem 3.6])：

$$p_{ij}^h = \frac{1}{|X| k_h} \sum_{\nu=0}^{d} m_\nu \overline{P_i(\nu) P_j(\nu)} P_h(\nu)$$

[12] subscheme と呼ばれた時期もあったが、§2 で紹介する同名の概念と紛らわしいため、現在はこちらの用語が定着しているようである。

[13] この判定条件を用いて実際に融合スキームの構成や非存在証明を行った例としては、例えば Bannai [5], Muzychuk [62], Tanaka [74] 等がある。

# 2 構造理論

$\mathfrak{X} = (X, \{R_i\}_{0 \le i \le d})$ を一般に可換とは限らないアソシエーションスキームとする。

**定義 2.1.** 全ての $1 \le i \le d$ に対して（有向）グラフ $\Gamma_i = (X, R_i)$ が連結であるとき、アソシエーションスキーム $\mathfrak{X}$ は**原始的** (primitive) であるという。 □

次の事実は容易に検証される。

**命題 2.2.** 次は同値である[14]：

(i) $\mathfrak{X}$ は原始的でない。

(ii) 適当に添え字を付け替えると、ある $1 \le s < d$ に対して $\bigcup_{i=0}^{s} R_i$ は $X$ 上の同値関係となる。

(iii) 適当に添え字を付け替えると、ある $1 \le s < d$ に対して $p_{ij}^{k} = 0$ $(0 \le \forall i \le s, 0 \le \forall j \le s, s < \forall k \le d)$ となる。すなわち、$A_0, A_1, \ldots, A_s$ により張られる空間は Bose-Mesner 代数 $\mathfrak{A}$ の部分代数となる。 □

**例 2.3.** (a) 有限群 $G$ が有限集合 $X$ に可移に作用しているとする。このとき、アソシエーションスキーム $\mathfrak{X}(G, X)$ が原始的であることと、$G$ の作用が原始的であること、すなわち $K$ を $X$ の一点の安定部分群としたとき $K$ が $G$ の極大部分群であることが等しい。

(b) 有限群 $G$ の群アソシエーションスキーム $\mathfrak{X}(G)$ が原始的であるためには、$G$ が単純群であることが必要充分である[15]。 □

さて、群については正規部分群に関してその剰余群を考えることができたが、アソシエーションスキームについても同様の操作が可能である。このことを以下ごく大雑把に説明する。詳細は Bannai-Ito [10, §2.9] や Zieschang [87] をご覧頂きたい。

$\mathfrak{X}$ は原始的でないとし、$\Xi$ を同値関係 $\bigcup_{i=0}^{s} R_i$ の同値類の全体とする。このとき、行と列を適当に並べ直せば

$$\sum_{i=0}^{s} A_i = I_q \otimes J_p = \begin{bmatrix} J_p & & & \\ & J_p & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_p \end{bmatrix}$$

となることが分かる。ただし $p = \sum_{i=0}^{s} k_i$, $q = |X|/p$ である。

同値類 $Y \in \Xi$ について、関係 $R_i$ の $Y \times Y$ への制限を $R_i^Y$ と書くことにすると、明らかに $\mathfrak{X}_Y = (Y, \{R_i^Y\}_{0 \le i \le s})$ はまたアソシエーションスキームを成す。これを $\mathfrak{X}$ の**部分スキーム** (subscheme) という[16]。部分スキームたちは一般には同型ではなく、$Y \in \Xi$ の取り方に依存する[17]。

[14] 講演では述べなかったが、$\mathfrak{X}$ が可換な場合については、$\mathfrak{X}$ が原始的であることとどの $E_i$ $(i \ne 0)$ についてもその列ベクトル達が全て異なることが同値である。これにより原始的対称アソシエーションスキームをユークリッド空間の単位球面上に埋め込むことができる。これは非常に強力な手法であることが知られている。坂内-坂内 [90] をご覧いただきたい。

[15] このことは、例えば例 1.3 (b) で述べたことと上の命題 2.2 (iii) の条件を組み合わせることによっても示される。

[16] より一般に、$X$ の任意の部分集合 $Y$ について、$\mathfrak{X}_Y = (Y, \{R_i^Y \mid R_i^Y \ne \emptyset\})$ がアソシエーションスキームになるとき、$\mathfrak{X}_Y$ は $\mathfrak{X}$ の部分スキームと呼ばれる。これはアソシエーションスキームに於ける**完全正則符号** (completely regular code) の双対概念であることが知られている。§3 参照。

[17] ただし、交叉数は明らかに一致する。

次に、直感的には明らかだと思われるが、$\{0,1,\ldots,d\}$ の分割 $T = \{T_0,T_1,\ldots,T_r\}$ ($T_0 = \{0,1,\ldots,s\}$) で、各 $0 \leq j \leq r$ に対しある $(0,1)$-行列 $A'_j$ があって

$$\sum_{i\in T_j} A_i = A'_j \otimes J_p$$

となるものが存在することが確かめられる。そこで、$\mathfrak{X}/\mathfrak{X}_Y = (\Xi, \{A'_j\}_{0\leq j\leq r})$ と置くと、これはアソシエーションスキームとなり、$\mathfrak{X}$ の**剰余スキーム** (factor scheme) と呼ぶ[18]。

このようにして、有限群の部分群や剰余群に対応する概念は定義できた訳であるが、最も基本的な Jordan-Hölder の定理に相当する結果が整備されたのは、実は比較的最近のことである。簡単のため可換な場合に限って紹介すると次のようになる[19]。

まず $\mathfrak{X} = (X, \{R_i\}_{0\leq i\leq d})$ を可換アソシエーションスキームとする。記号の簡略化のため、$X$ の部分集合に対しては常に $R_i$ 達の制限によって関係を定めるものと理解して、$\mathfrak{X}$ の部分スキームはその点集合自体で表すことにする。$\mathfrak{X}$ の部分スキーム[20]の極大な列 $X = Y_0 \supsetneq Y_1 \supsetneq \cdots \supsetneq Y_n = \{x\}$ を $\mathfrak{X}$ の**組成列** (composition series) と呼び、$x$ をその**終点**[21]、剰余スキーム $Y_{i-1}/Y_i$ $(1 \leq i \leq n)$ を**組成剰余スキーム** (composition factor) と呼ぶこととする。このとき次が成り立つ：

**定理 2.4 (Rassy-Zieschang [64]).** 可換アソシエーションスキーム $\mathfrak{X} = (X, \{R_i\}_{0\leq i\leq d})$ と $X$ の元 $x$ に対し、

$$X = Y_0 \supsetneq Y_1 \supsetneq \cdots \supsetneq Y_n = \{x\}$$
$$X = Z_0 \supsetneq Z_1 \supsetneq \cdots \supsetneq Z_m = \{x\}$$

を $x$ を終点とする $\mathfrak{X}$ の二つの組成列とすると、$n = m$ であり、かつ $Y_{i-1}/Y_i$ と $Z_{j-1}/Z_j$ とは一つずつ適当な順序で同型となる。すなわち、終点を固定すると組成列の長さは一定であり、しかも組成剰余スキームは順序と同型を度外視して一意的に定まる。 □

隣接行列を考えると明らかであるように、分岐指数 $k_i$ が全て 1 であるようなアソシエーションスキーム[22]と有限群とは一対一に対応する。従って、アソシエーションスキームを（群アソシエーションスキームとしてではなく）有限群の概念そのものの拡張として見ることも可能であり、この立場からの表現論や構造理論の研究も活発になされている。上述の Jordan-Hölder の定理に加えて、二つほど挙げると：

(1) **Hecke 環の理論** (Hanaki [34], Hanaki-Hirasaka [35])。$\mathfrak{X} = (X, \{R_i\}_{0\leq i\leq d})$ を原始的でないアソシエーションスキーム、$\mathfrak{A}$ をその Bose-Mesner 代数とする。$s$ を命題 2.2 の通りとし、$\mathfrak{X}_Y = (Y, \{R_i^Y\}_{0\leq i\leq s})$ を一つの部分スキームとする。このとき、

$$e = \frac{1}{k_0 + k_1 + \cdots + k_s}(A_0 + A_1 + \cdots + A_s)$$

[18] 定義から分かるように剰余スキームは同値類 $Y$ には依らず、$\{0,1,\ldots,d\}$ の部分集合 $\{0,1,\ldots,s\}$ のみにより定まる。このような商を取るといった操作を扱う際には我々の記号体系は甚だ不便であり、Zieschang [87] のものの方がよく用いられる。

[19] 実際は遥かに強い主張が成り立つのだが、脚注 18 で述べたように、本稿の記法では煩雑になりすぎるため、この形で紹介するに留めた。

[20] 脚注 16 で述べた意味ではなく、本文中で定義した同値類の意味での部分スキームを指す。

[21] この用語は本稿のみで用いる仮のものである。

[22] **細スキーム** (thin scheme) と呼ばれている。ただし、これは Terwilliger [79, 80, 81] による同名の概念とは全く異なる。

は冪等元であり、また剰余スキーム $\mathfrak{X}/\mathfrak{X}_Y$ の Bose-Mesner 代数が $e\mathfrak{A}e$ と同型であることが示され、有限群の場合 (cf. [24, §11D]) と同様の議論が展開されるのである。

(2) **Sylow の定理** (Hirasaka-Muzychuk-Zieschang [39])。ここでは詳しくは述べないが、$p$-valenced と呼ばれる条件を満たすアソシエーションスキームについて、有限群の Sylow の定理に類似の結果が成り立つ。

以下群アソシエーションスキームに関する興味深い話題をいくつか紹介する。

(A) 有限群がその群アソシエーションスキームによって特徴付けられるか、という問題はごく自然である。すなわち、

**問.** 二つの有限群 $G_1, G_2$ に対し、$\mathfrak{X}(G_1) \cong \mathfrak{X}(G_2)$ は $G_1 \cong G_2$ を導くか?

もちろん、この主張が一般的に成り立つことを期待するのはいささか虫が良すぎており、 Terada [76] により反例が構成されている[23]。

**例 2.5 (Terada).** $B$ を $SL(2,q)$ $(q = 2^e \geq 8)$ の Borel 部分群とする。このとき、$\mathbb{F}_q^2$ の分裂拡大 $\mathbb{F}_q^2 : B$ 及び非分裂拡大 $\mathbb{F}_q^2 \cdot B$ は非同型であるが、群アソシエーションスキームは同型となる。 □

(B) アソシエーションスキームの中で有限群の群アソシエーションスキームのみを取り扱う場合、それらが指標表、或いは同じことであるが、交叉数により区別できるかどうか、という疑問も当然沸き起こる。

**問.** $G_1, G_2$ を二つの有限群とし、$P_1, P_2$ をそれぞれ $\mathfrak{X}(G_1), \mathfrak{X}(G_2)$ の指標表とする。このとき $P_1 = P_2$ ならば $\mathfrak{X}(G_1) \cong \mathfrak{X}(G_2)$ が成り立つか?

これに関しても反例が知られている。

**例 2.6.** 次の (i) 、(ii) に於いて、二つの群の指標表は一致するが、対応する群アソシエーションスキームは同型でない。

(i) (Yoshiara [85]) $2^3 : SL(3,2)$ 及び $2^3 \cdot SL(3,2)$。

(ii) (Terada [76]) $q = 2^e \geq 8$ に対し $\mathbb{F}_q^2 : SL(2,q)$ 及び $\mathbb{F}_q^2 \cdot SL(2,q)$。 □

(C) 交叉数（若しくは指標表）による、群アソシエーションスキームのアソシエーションスキームとしての特徴付けの問題も考えられる[24]。これは上の二つとは異なり、純粋に組合せ論的な問題であることに注意されたい。知られている結果は次の通りである。

**例 2.7.** (i) (Tomiyama [82]) $\mathfrak{X}(A_5)$（$A_5$ は 5 次交代群）と同じ交叉数を持つアソシエーションスキームは他には存在しない。

(ii) (Tomiyama [83]) 同様の結果が $\mathfrak{X}(PSL(2,7))$ についても成立する。

(iii) (Tomiyama-Yamazaki [84]) 同様の結果が $\mathfrak{X}(S_n)$ $(n \neq 4)$ に対して成立する[25]。$n = 4$ に関しては、$\mathfrak{X}(S_4)$ と同じ交叉数を持つアソシエーションスキームは同型を除いて丁度 3 つ存在し、$\mathfrak{X}(S_n)$ はその中で唯一の群アソシエーションスキームである。 □

---

[23] しかしながら、有限単純群に限ればこれは成立する。

[24] 群アソシエーションスキームでないアソシエーションスキームについては、Egawa [28] (Hamming スキーム)、Terwilliger [78], Neumaier [63] (Johnson スキーム)、Sprague [66] (Johnson スキームの $q$-類似)、Ivanov-Shpectorov [43] (双対極スキーム) 等の先行結果がある。

[25] 正確には証明に一部未発表の部分があり、その公表が待たれる。

## 3 $P$-& $Q$-多項式スキーム、そしてコントロール現象

Delsarte [26] は符号理論やデザイン理論の研究を進める中で $P$-多項式スキーム及び $Q$-多項式スキームの概念に至り、その中で一般的にそれぞれ符号とデザインを考えることができることを見出した。この節ではまず、[26] に従ってこれらを定義する。

**定義 3.1.** $\mathfrak{X} = (X, \{R_i\}_{0\le i\le d})$ を対称アソシエーションスキーム、$P = (P_i(j))$ をその指標表とする。相異なる $d+1$ 個の非負実数 $\theta_0 = 0, \theta_1, \ldots, \theta_d \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ と、各 $0 \le i \le d$ に対し実係数 $i$ 次多項式 $v_i(x) \in \mathbb{R}[x]$ があって、

$$P = \begin{bmatrix} v_0(\theta_0) & v_1(\theta_0) & \ldots & v_d(\theta_0) \\ v_0(\theta_1) & v_1(\theta_1) & \ldots & v_d(\theta_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_0(\theta_d) & v_1(\theta_d) & \ldots & v_d(\theta_d) \end{bmatrix}$$

と表せるとき（すなわち $P_i(j) = v_i(\theta_j)$）、アソシエーションスキーム $\mathfrak{X}$ は ***P*-多項式** ($P$-polynomial) であるという[26]。 □

指標表 $P$ の直交関係式（命題 1.5）はこの場合

$$\sum_{\nu=0}^{d} m_\nu v_i(\theta_\nu) v_j(\theta_\nu) = |X| k_i \cdot \delta_{ij}$$

と表され、$d+1$ 個の多項式 $v_0(x), v_1(x), \ldots, v_d(x)$ は、点 $\theta_\nu$ に於いて重さ $m_\nu$ を持った選点直交多項式系をなすことが分かる。

$P$-多項式という性質については、次のような同値な組合せ的言い替えがある。まず、$\Gamma$ を単純連結グラフとし、頂点 $x$ 及び $i \ge 0$ に対し

$$\Gamma_i(x) = \{y \in \Gamma \mid \partial(x, y) = i\}$$

とおく[27]。ただし、$\partial$ はグラフ $\Gamma$ 上の通常の距離を表す。このとき

**定義 3.2.** 各 $i$ に対し、$a_i = |\Gamma_i(x) \cap \Gamma_1(y)|$, $b_i = |\Gamma_{i+1}(x) \cap \Gamma_1(y)|$, $c_i = |\Gamma_{i-1}(x) \cap \Gamma_1(y)|$ が $\partial(x, y) = i$ を満たす 2 頂点 $x, y \in \Gamma$ の取り方に依らない定数であるとき、$\Gamma$ は**距離正則グラフ** (distance-regular graph) と呼ばれる。 □

次は直交多項式の漸化関係より容易に確かめられる：

**命題 3.3.** 対称アソシエーションスキーム $\mathfrak{X} = (X, \{R_i\}_{0\le i\le d})$ が $P$-多項式であるためには、グラフ $(X, R_1)$ が距離正則グラフであることが必要かつ充分である。また、このとき $R_i = \{(x, y) \in X \times X \mid \partial(x, y) = i\}$ $(0 \le \forall i \le d)$ となる。 □

[26] $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_d$ が非負という条件を省いても実際は同じことであるが（これは $P_i(j) \le k_i$ より直ちに確かめられる）、符号に関する理論を展開する際には $\theta_i$ 達をこのように取っておいた方が記述が簡明になる。これは $Q$-多項式スキームの定義についても同様である。

[27] $y$ が $\Gamma$ の頂点であることを $y \in \Gamma$ と表すことにする。

従って、$\mathfrak{X}$ が有限群の作用から得られるときには、$\mathfrak{X}$ が $P$-多項式であるとはそれが二点等質 (two-point homogeneous) であることに他ならない[28]。

**定義 3.4.** $\mathfrak{X} = (X, \{R_i\}_{0\le i\le d})$ を対称アソシエーションスキームとする。相異なる $d+1$ 個の非負実数 $\theta_0^* = 0, \theta_1^*, \ldots, \theta_d^* \in \mathbb{R}_{\ge 0}$、及び各 $0 \le i \le d$ に対し実係数 $i$ 次多項式 $v_i^*(x) \in \mathbb{R}[x]$ があって、$\mathfrak{X}$ の第二固有行列 $Q = (Q_i(j))$ が

$$Q = \begin{bmatrix} v_0^*(\theta_0^*) & v_1^*(\theta_0^*) & \ldots & v_d^*(\theta_0^*) \\ v_0^*(\theta_1^*) & v_1^*(\theta_1^*) & \ldots & v_d^*(\theta_1^*) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_0^*(\theta_d^*) & v_1^*(\theta_d^*) & \ldots & v_d^*(\theta_d^*) \end{bmatrix}$$

と表せるとき（すなわち $Q_i(j) = v_i^*(\theta_j^*)$）、アソシエーションスキーム $\mathfrak{X}$ は ***Q*-多項式** (*Q*-polynomial) であるという。 □

この場合、多項式 $v_0^*(x), v_1^*(x), \ldots, v_d^*(x)$ は

$$\sum_{\nu=0}^{d} k_\nu v_i^*(\theta_\nu^*) v_j^*(\theta_\nu^*) = |X| m_i \cdot \delta_{ij}$$

を満たす。

$P$-多項式かつ $Q$-多項式であるとき、***P*-& *Q*-多項式** (*P*-and *Q*-polynomial) と呼ぶことにする。例 1.2 (a)-(d) の 4 種類のアソシエーションスキームは全て $P$-& $Q$-多項式であることが知られている[29]。

さて、ここでアソシエーションスキーム上の符号及びデザインに関する Delsarte 理論 (cf. [26]) を少しだけ紹介したい[30]。

以後 $\mathfrak{X} = (X, \{R_i\}_{0\le i\le d})$ を（対称）$P$-& $Q$-多項式スキームとする[31]。$X$ の空でない（真）部分集合 $C$ を**符号** (code) と呼び、その**内分布** (inner distribution) $a = a(C) = (a_0, a_1, \ldots, a_d)$ を

$$a_i = \frac{1}{|C|} \cdot |R_i \cap (C \times C)| = \frac{1}{|C|} \cdot \chi^T A_i \chi \quad (0 \le i \le d)$$

により定める。ただし、列ベクトル $\chi = (\chi_x)_{x\in X}$ は $C$ の特性ベクトル、すなわち

$$\chi_x = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in C \\ 0 & \text{if } x \notin C \end{cases}$$

[28]この場合グラフ $(X, R_1)$ は**距離可移グラフ** (distance-transitive graph) と呼ばれる。

[29]$P$-多項式或いは $Q$-多項式という性質はもちろん関係 $R_i$ 達（もしくは隣接行列 $A_i$ 達）や原始冪等元 $E_i$ 達の順序に依る。例えば $J(2d+1, d)$ は $P$-多項式構造を二つ持っており、${}^2A_{2d-1}(q)$ 型双対極スキームは $Q$-多項式構造を二つ持つことが知られている。詳しくは [10, §3.6] を参照されたい。

[30]講演の当初の予定では全くこの部分には触れない予定であったし、実際ほとんど述べることができなかったが、この原稿ではもう少しその有効性が感じられる程度に説明を加えることにした。

[31]実際には、符号理論を考える際には $P$-多項式、デザイン理論を考察する際には $Q$-多項式であれば充分である。

とする。明らかに $a_i$ 達は非負であり、$a_0 = 1$, $a_0 + a_1 + \cdots + a_d = |C|$ が成り立つ。次に**双対内分布** (dual inner distribution) $b = b(C) = (b_0, b_1, \ldots, b_d)$ を

$$b = \frac{1}{|C|} \cdot aQ$$

で定義する[32]。こちらに関しては $b_0 = 1$, $b_0 + b_1 + \cdots + b_d = |X|/|C|$ となることが容易に確認できる。双対内分布に関して決定的に重要なのが次の事実である。

**命題 3.5.** 全ての $1 \leq i \leq d$ に対して $b_i \geq 0$ が成り立つ。

**証明.** $b_i$ の定義より

$$b_i = \frac{1}{|C|} \cdot \sum_{j=0}^{d} Q_i(j) a_j = \frac{1}{|C|^2} \cdot \chi^T \left( \sum_{j=0}^{d} Q_i(j) A_j \right) \chi = \frac{|X|}{|C|^2} \cdot \chi^T E_i \chi$$

となるが、$E_i$ が半正値対称行列であることから主張を得る[33]。 □

**例 3.6.** Hamming スキーム $H(n, q)$ の符号 $C$ に対し、

$$\sum_{i=0}^{d} b_i x^{n-i} y^i = \frac{1}{|C|} \cdot \sum_{i=0}^{d} a_i (x + (q-1)y)^{n-i} (x-y)^i$$

が成り立つ。従って、$F = \mathbb{F}_q$ が有限体でかつ $C$ が線形符号の場合、MacWilliams 恒等式により双対内分布 $b = b(C)$ は $C$ の双対符号 $C^\perp$ の内分布 $a(C^\perp)$ に一致する。 □

**定義 3.7.** ある非負整数 $\tau$ について $b_1 = b_2 = \cdots = b_\tau = 0$ となるとき、$C$ を **$\tau$-デザイン** ($\tau$-design) と呼ぶ。 □

Johnson スキームや Hamming スキームについては、ここで定義したデザインの概念はそれぞれよく知られた古典的概念と対応することが知られている。

**例 3.8.** (a) Johnson スキーム $J(v, d)$ に於ける上で定義した意味での $\tau$-デザインとは、通常の意味での $\tau$-$(v, d, \lambda)$ デザインに他ならない (Delsarte [26, p.51, Theorem 4.7])。ただしここで $\binom{v}{\tau}\lambda = |C|\binom{d}{\tau}$ である。

(b) Hamming スキーム $H(d, q)$ に於いては、$C$ が $\tau$-デザインであることと、$C$ の元(それらは行ベクトルである)を縦に並べてできる行列が直交配列 $\tau$-$OA(q, d; \lambda)$ を成すことが実は同値である (Delsarte [26, p.43, Theorem 4.4])。ただしこの場合 $q^\tau \lambda = |C|$ となる。 □

デザインについて、上の例のような組み合せ的な言い換えが常に可能な訳ではないが、例 1.2 (c), (d) に挙げたもの等多くの $P$-& $Q$-多項式アソシエーションスキームに於いて、そのような言い換えが存在することが知られている (Delsarte [27], Munemasa [59], Stanton [69] 等)。

---

[32] 一般に右から第二固有行列 $Q$ を掛ける操作は **MacWilliams 変換** (MacWilliams transform) と呼ばれ、Fourier 変換の類似とみなせる。

[33] 脚注 9 参照。

以下 $C$ を 2 点以上からなる $X$ の真部分集合とする。Delsarte [26] は次の 4 種類の重要なパラメータを導入した。まず、$C$ の**最小距離** (minimum distance) $\delta = \delta(C)$ 及び**最大強度** (maximum strength) $t = t(C)$ を

$$\begin{aligned}\delta = \delta(C) &= \min\{i \neq 0 \mid a_i \neq 0\}\\ t = t(C) &= \max\{i \neq 0 \mid b_1 = b_2 = \cdots = b_i = 0\}\end{aligned}$$

により定義する。ただし $t$ については、$b_1 \neq 0$ のときには $t = 0$ とする。これらのパラメータの意味するところは明らかであろう。残る 2 つは**次数** (degree) $s = s(C)$ 及び**双対次数** (dual degree) $s^* = s^*(C)$ で、

$$\begin{aligned}s = s(C) &= |\{i \neq 0 \mid a_i \neq 0\}|\\ s^* = s^*(C) &= |\{i \neq 0 \mid b_i \neq 0\}|\end{aligned}$$

によってそれぞれ定められる[34]。

命題 3.5 の重要性は、それが符号やデザインの解析を進める上で線型計画法の手法の適用を可能にする点にある。例えば $(a_\delta, a_{\delta+1}, \ldots, a_d)$ は次の線型計画問題の実行可能解を与えることが分かる：

$$\begin{aligned}&\text{最大化：}\quad g = 1 + \sum_{i=\delta}^{d} a_i\\ &\text{条　件：}\quad \begin{cases} a_i \geq 0 & (\delta \leq i \leq d)\\ m_j + \displaystyle\sum_{i=\delta}^{d} a_i Q_j(i) \geq 0 & (1 \leq j \leq d)\end{cases}\end{aligned}$$

この計画の最適値を $g(\delta)$ と書くことにすると、符号 $C$ の位数について限界

$$|C| \leq g(\delta)$$

が得られる。この**線型計画限界** (linear programming bound) は非常に優れた限界であり、Hamming スキーム上の通常の符号に於いては Plotkin 限界、Singleton 限界、Hamming 限界といった多くの限界より良い評価を与える。

同様にして、$(b_{t+1}, b_{t+2}, \ldots, b_d)$ は線型計画問題

$$\begin{aligned}&\text{最大化：}\quad g^* = 1 + \sum_{i=t+1}^{d} b_i\\ &\text{条　件：}\quad \begin{cases} b_i \geq 0 & (t+1 \leq i \leq d)\\ k_j + \displaystyle\sum_{i=t+1}^{d} b_i P_j(i) \geq 0 & (1 \leq j \leq d)\end{cases}\end{aligned}$$

[34]双対次数 $s^*$ は Delsarte [26] では external distance と呼ばれているが、これについて Brouwer-Cohen-Neumaier [20, p.346] では次の様に述べられている：“Delsarte calls $r$ [$= s^*$] the ‘external distance’, which is rather unfortunate; many authors use the term ‘external distance’ (or sometimes ‘true external distance’) for the covering radius $t(C)$ [上で定義した最大強度とは別物].”

の実行可能解を与える。この計画の最適値を $g^*(t)$ と書くと、デザイン $C$ について

$$|C| \geq \frac{|X|}{g^*(t)}$$

を得る。Delsarte はこれら線型計画法の手法や、$P$-& $Q$-多項式スキームに付随する直交多項式達の性質を巧妙に利用して、様々な優れた結果を導き出した。その一部を紹介してみたい。なお、以下元 $x \in X$ 及び符号 $C$ に対し $\partial(x,C) = \min\{\partial(x,c) \mid c \in C\}$ と定める。

**定理 3.9 ([26]).** (i) $C$ を $e$-誤り訂正符号とする。すなわち $e = \lfloor \frac{\delta-1}{2} \rfloor$ である。このとき、

$$\sum_{i=0}^{e} k_i \leq \frac{|X|}{|C|} \leq \sum_{i=0}^{s^*} k_i$$

が成り立つ。また、この二つの不等式の内一方で等号が成立すれば、他方でも成り立つ[35]。

(ii) $f = \lfloor \frac{t}{2} \rfloor$ とおくと、

$$\sum_{i=0}^{f} m_i \leq |C| \leq \sum_{i=0}^{s} m_i$$

が成り立つ。この場合についても、片方の不等式での等号は他方での等号を導く。 □

定理 3.9 (i) の左辺の不等式は、Hamming スキームの場合は Hamming 限界に他ならない。また、(ii) の左辺は、Hamming スキームでは直交配列に関する Rao 限界、Johnson スキームに於いては（通常の）デザインの Fisher 型不等式に一致する。

**定理 3.10 ([26]).** (i) $\delta \leq 2s^* + 1$ が成り立つ。さらにもし $\delta \geq 2s^* - 1$ ならば $C$ は**完全正則符号** (completely regular code) である。すなわち各 $x \in X$ に対しその**外分布ベクトル** (outer distribution vector) $B(x) = (B(x)_0, B(x)_1, \ldots, B(x)_d)$ を

$$B(x)_i = |\{c \in C \mid \partial(x,c) = i\}|$$

により定義すると、$B(x)$ は $\partial(x,C)$ にのみ依存して定まる。

(ii) $t \leq 2s$ が成立する。さらに $t \geq 2s-2$ が満たされるならば、$\mathfrak{X}_C = (C, \{R_i^C \mid R_i^C \neq \emptyset\})$ は $\mathfrak{X}$ の部分スキームである[36]。 □

また、最近の研究としては、Brouwer-Godsil-Koolen-Martin [21] による、パラメータ**幅** (width) $w = w(C)$ 及び**双対幅** (dual width) $w^* = w^*(C)$ に関する結果がある。ただし、$w, w^*$ は

$$w = w(C) = \max\{i \neq 0 \mid a_i \neq 0\}$$
$$w^* = w^*(C) = \max\{i \neq 0 \mid b_i \neq 0\}$$

により定義される。[21] では、例えば次の様な主張が示されている：

[35] ちなみに、**被覆半径** (covering radius) $\rho = \rho(C) = \max\{\partial(x,C) \mid x \in X\}$ に対し、$s^* \geq \rho$ が成立する。

[36] 脚注 16 で述べた意味に於ける部分スキームである。さらに $\mathfrak{X}_C$ は $Q$-多項式にもなっていることが示される。

**定理 3.11.** (i) 不等式 $s^* \geq d - w$ が成り立つ。さらに等号が成立するならば、$C$ は完全正則である。

(ii) 不等式 $s \geq d - w^*$ が成り立つ。等号が成立するとき、$\mathfrak{X}_C = (C, \{R_i^C \mid R_i^C \neq \emptyset\})$ は $Q$-多項式な部分スキームである。 □

以上 Delsarte 理論の概略を紹介してきたが、$P$-& $Q$-多項式という性質が符号理論及びデザイン理論等を取扱う枠組みとして非常に優れたものであることは、もはや疑う余地はないであろう。一方、アソシエーションスキームを可移置換群の組み合せ的一般化として見た場合にも、$P$-& $Q$-多項式スキームは、固有行列達が一変数直交多項式により記述されるという条件により定義され、しばしばランク 1 コンパクト対称空間の組み合わせ版と表現される ([10, 4, 88])。例 1.2 (a)-(d) に挙げたような非常に多くの大切な例がこの性質を満たすことも極めて重大な事実であるが、このクラスのアソシエーションスキームの重要性を決定的に裏付けたのが Leonard による次の結果である。

**定理 3.12 ([51]).** $P$-& $Q$-多項式スキームに付随する直交多項式 $v_i(x)/k_i$ $(0 \leq i \leq d)$, $v_i^*(x)/m_i$ $(0 \leq i \leq d)$ 達は Askey-Wilson 多項式或いはその極限である。 □

**Askey-Wilson 多項式** (Askey-Wilson polynomial) は古典的な直交多項式のほとんど全てを含むもので、次のように定義される (cf. Koekoek-Swarttouw [47])[37] :

$$R_i(\mu(x); \alpha, \beta, \gamma, \delta \mid q) = {}_4\phi_3\left(\begin{matrix} q^{-i}, \alpha\beta q^{i+1}, q^{-x}, \gamma\delta q^{x+1} \\ \alpha q, \beta\delta q, \gamma q \end{matrix} \middle| \, q; q\right) \quad (0 \leq i \leq d)$$

ここで、$\mu(x) = q^{-x} + \gamma\delta q^{x+1}$ であり、$\alpha q, \beta\delta q, \gamma q$ のいずれか一つは $q^{-d}$ に等しい。なお、極限の場合等についての細密化に関しては Bannai-Ito [10, §3.5, Theorem 5.1] に於いて詳しく考察されている。

直交多項式の分野で当時発見されたばかりの Askey-Wilson 多項式が、アソシエーションスキームという他の分野で時期を同じくして再び見出されたことは、数学に於ける共時的現象の一例として非常な驚きだったようである[38]。

さて、Johnson スキームの $q$-類似 $J_q(v,d)$ 及び $B_d(q)$ 型双対極スキームの指標表に対し、$q \longrightarrow 1$ の変換によりそれぞれ Johnson スキーム $J(v,d)$、Hamming スキーム $H(d,2)$ の指標表が得られることは既に注意した。これはもちろん偶然ではなく Curtis-Iwahori-Kilmoyer の結果 [23] によるものであるが、$P$-& $Q$-多項式とは限らない他の自然な可換アソシエーションスキームについても、ある小さなアソシエーションスキームの指標表が他の大きなアソシエーションスキームの指標表をコントロールしているような例が、1990 年前後に坂内教授達により数多く発見された。以下いくつか実例を紹介したい[39]。

まず最初に挙げるのは、Kwok [48] により考察された、アフィン型のアソシエーションスキームである。これは有限体上のベクトル空間 $V$ に、$GL(V)$ の部分群 $G_0$ との積

[37] 正確には、これは $q$-Racah 多項式である。

[38] これに関しては、坂内教授の記事 [88, 89] を直接お読みいただきたい。

[39] Paige の単純 Moufang ループ $M(q)$ より得られるアソシエーションスキーム $\mathfrak{X}(M(q))$ の指標表が、$\mathfrak{X}(PSL(2,q))$ の指標表に変換 $q \longrightarrow q^3$ を施すことにより本質的に得られることを見出した Bannai-Song [15] の結果が、この方面の最初の例である。他の関連文献としては、著者名は省くが [4, 31, 8, 9, 11, 12, 17, 49, 41, 2, 16, 50, 37, 72] 等がある。

$G = V : G_0$ を作用させて得られるアソシエーションスキームで、特に $G_0$ が古典群の場合が基本的である[40]。

$G_0 = GO^-_{2m}(q)$ のとき、$\mathfrak{X}(\mathbb{F}_q^{2m} : GO^-_{2m}(q), \mathbb{F}_q^{2m})$ の指標表は次の様になる[41]：

$$\begin{bmatrix} 1 & q^{2m-1}+q^{m-1} \ldots q^{2m-1}+q^{m-1} & q^{2m-1}-(q-1)q^{m-1}-1 \\ 1 & & q^{m-1}-1 \\ \vdots & -q^{m-1}\cdot(\kappa_{ij})_{0\le i,j\le q-2} & \vdots \\ 1 & & q^{m-1}-1 \\ 1 & q^{m-1} \ldots q^{m-1} & -(q-1)q^{m-1}-1 \end{bmatrix}$$

一方、$\mathfrak{X}(\mathbb{F}_q^{2m} : GO^+_{2m}(q), \mathbb{F}_q^{2m})$ の指標表は次で与えられる：

$$\begin{bmatrix} 1 & q^{2m-1}-q^{m-1} \ldots q^{2m-1}-q^{m-1} & q^{2m-1}+(q-1)q^{m-1}-1 \\ 1 & & -q^{m-1}-1 \\ \vdots & q^{m-1}\cdot(\kappa_{ij})_{0\le i,j\le q-2} & \vdots \\ 1 & & -q^{m-1}-1 \\ 1 & -q^{m-1} \cdots -q^{m-1} & (q-1)q^{m-1}-1 \end{bmatrix}$$

これらの指標表間の相互関係は一見して明らかであろう。特に、下の指標表が上の指標表に $-1$ を掛けた格好になっていることにも注意していただきたい。これはある意味で、一般線型群とユニタリー群の指標表に関する Ennola 双対性に（少なくとも表面的には）類似していると言える。このことは Bannai-Kwok-Song [12] に於いて初めて指摘された。

なお、これらの指標表に現れる $\kappa_{ij}$ 達は、有名な有限体上の指標和である **Kloosterman 和** (Kloosterman sum)

$$K(a,b;\mathbb{F}_q) = \sum_{\gamma\in\mathbb{F}_q^*} e(\mathrm{Tr}_{q,p}(a\gamma + b\gamma^{-1})) \quad (a,b\in\mathbb{F}_q)$$

により

$$\kappa_{ij} = K(\rho^i, \rho^j; \mathbb{F}_q)$$

と表される[42]。ただし、$\rho$ は $\mathbb{F}_q$ の原始根、$e(x) = \exp(2\pi\sqrt{-1}\,x/p)$、また $\mathrm{Tr}_{q,p} : \mathbb{F}_q \longrightarrow \mathbb{F}_p$ は素体へのトレース写像である。

---

[40] $G_0$ が Symplectic 群のときはクラス 1 の自明なアソシエーションスキームとなる。また、ユニタリー群については直交群の場合に帰着される。

[41] Kwok [48] は交叉数 $p_{ij}^k$ を全て具体的に計算することにより指標表を求めた。この方法は膨大な量の計算が必要であったが、正則可換正規部分群を利用した Medrano-Myers-Stark-Terras [55] の計算を用いれば簡単な別証明が得られる。また、有限環 $\mathbb{Z}_q = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ 上の同様のアソシエーションスキームについては Tanaka [71] (cf. Medrano-Myers-Stark-Terras [56], DeDeo [25]) をご覧頂きたい。

[42] この事実と Kloosterman 和の評価を組み合わせることにより、これらアフィン型アソシエーションスキームから多くの **Ramanujan グラフ** (Ramanujan graph) が構成されることが示される（Bannai-Shimabukuro-Tanaka [13] 及び Medrano-Myers-Stark-Terras [55] を参照）。ここで、次数 $k$ の単純連結正則グラフは、$\pm k$ と異なるどの固有値 $\lambda$ も不等式 $|\lambda| \le 2\sqrt{k-1}$ を満たすとき Ramanujan であるといい、通信ネットワーク等に於いて重要である（cf. Terras [77]）。この定義は Alon-Boppana (cf. Lubotzky-Phillips-Sarnak [53]) による、次数 $k$ を固定した際の非自明固有値の絶対値に関する漸近的評価に基づくものであるが、ここで得られるグラフ達については次数も発散してしまうことに注意されたい。

次に紹介するのは、Bannai-Hao-Song [8] により求められた、（単純）直交群の 1 次元非等方部分空間全体への作用より構成されるアソシエーションスキームの指標表である[43]。

まず $\mathfrak{X}(O_3(q), O_3(q)/O_2^-(q))$ の指標表は以下の形をしている：

$$\begin{bmatrix} 1 & q+1 & \dots & q+1 & \frac{1}{2}(q+1) \\ 1 & & & & \\ \vdots & & (\chi_{ij})_{\substack{1\le i\le (q-1)/2 \\ 1\le j\le (q-1)/2}} & & \\ 1 & & & & \end{bmatrix}$$

このとき、$m>1$ に対し $\mathfrak{X}(O_{2m+1}(q), O_{2m+1}(q)/O_{2m}^-(q))$ の指標表は次の様に表される[44]：

$$\begin{bmatrix} 1 & (q^{m-1}-1)(q^m+1) & q^{m-1}(q^m+1) \dots q^{m-1}(q^m+1) & \frac{1}{2}q^{m-1}(q^m+1) \\ 1 & -(q-2)q^{m-1}-1 & 2q^{m-1} \quad \dots \quad 2q^{m-1} & q^{m-1} \\ 1 & q^{m-1}-1 & & \\ \vdots & \vdots & (q^{m-1}\chi_{ij})_{\substack{1\le i\le (q-1)/2 \\ 1\le j\le (q-1)/2}} & \\ 1 & q^{m-1}-1 & & \end{bmatrix}$$

また、$\mathfrak{X}(O_{2m+1}(q), O_{2m+1}(q)/O_{2m}^+(q))$ $(m\ge 1)$ の指標表は

$$\begin{bmatrix} 1 & (q^{m-1}+1)(q^m-1) & q^{m-1}(q^m-1) \dots q^{m-1}(q^m-1) & \frac{1}{2}q^{m-1}(q^m-1) \\ 1 & (q-2)q^{m-1}-1 & -2q^{m-1} \quad \dots \quad -2q^{m-1} & -q^{m-1} \\ 1 & -(q^{m-1}+1) & & \\ \vdots & \vdots & (-q^{m-1}\chi_{ij})_{\substack{1\le i\le (q-1)/2 \\ 1\le j\le (q-1)/2}} & \\ 1 & -(q^{m-1}+1) & & \end{bmatrix}$$

となることが示されている。この場合にも指標表が互いに密接に関連していることが分かる。また、Ennola 双対性的な現象もやはり観察できる（Bannai-Kwok-Song [12]）。

$\mathfrak{X}(O_3(q), O_3(q)/O_2^-(q))$ は本質的に、Terras [77, Chapter 19] により定義され研究された**有限上半平面** (finite upper half plane)[45] $H_q$ の剰余スキームであり、その指標表（帯球函数）も完全に求められている (Kwok [48], Evans [29, 30], Tanaka [74])。ここでは具体的な記述は省くが、上の表の $\chi_{ij}$ 達は **Soto-Andrade 和** (Soto-Andrade sum) と呼ばれる指標和により書き表せることが知られている[46]。

---

[43] ここでは奇数次元の場合についてのみ述べる。なお、正確には標数 2 で奇数次元の場合は [8] では取り扱われておらず、これは Tanaka [72] で考察された。この場合は 1 次元非等方部分空間ではなく、非退化超平面への作用を考える。なお、直交群以外の古典群による同種のアソシエーションスキームについては Bannai-Hao-Song-Wei [9] を参照されたい。

[44] $m=1$ のときはクラスが一つ減る。

[45] $\delta$ を $\mathbb{F}_q$ ($q$ : odd) の非平方元とし、$\mathbb{F}_{q^2}$ に於ける $\delta$ の平方根の一つを $\sqrt{\delta}$ と書く。このとき有限上半平面は $H_q=\{z=x+y\sqrt{\delta}\,|\,x,y\in\mathbb{F}_q, y\neq 0\}$ と定義される。$H_q$ には一般線型群 $GL(2,q)$ が一次分数変換 $g\cdot z=(az+b)/(cz+d)$ $(\forall g=\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in GL(2,q), \forall z\in H_q)$ により可移に作用しており、従って群論的には $GL(2,q)/GL(1,q^2)$ に同型である。なお、有限環上の有限上半平面については Tagami [70] 等の研究がある。

[46] Katz [45] や Li [52] によるこの指標和の評価を用いて、やはりこの場合にも多くの Ramanujan グラフが構成できる (Bannai-Shimabukuro-Tanaka [14])。

線型群に関しては、Inglis-Liebeck-Saxl [40] に於いて、置換指標が無重複となるような部分群の分類問題に関連して次の 4 種類の系列が挙げられている。

| | 可換性 | 両側剰余類 | 置換指標分解 | 指標表 |
|---|---|---|---|---|
| $GL(n,q^2)/GL(n,q)$ | Gow | Gow | Gow | Henderson |
| $GL(n,q^2)/GU(n,q)$ | Gow | Gow | Gow | Henderson |
| $GL(2n,q)/Sp(2n,q)$ | Klyachko | Klyachko | Bannai-Kawanaka-Song | Bannai-Kawanaka-Song |
| $GL(2n,q)/GL(n,q^2)$ | Inglis | ? | Bannai-T., Henderson | ? |

最初の 3 つの系列については、置換指標の分解、両側剰余類の記述、さらには指標表まで完全に決定されている。また、それぞれ $GU(n,q)$, $GL(n,q)$, $GL(n,q)$ と自然に対応し、Green [32] による一般線型群の表現論に類似した理論が展開される。ここではもちろんこれらの結果について詳細に述べることはできないが、$GL(2n,q)/Sp(2n,q)$ に関しては多少コメントを加えたい。

まず、一般線型群の既約指標について、Macdonald [54, Chapter IV] に従い手短に復習する。$\mathscr{P}$ を分割全体の集合とする。分割 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots)$ に対し、$l(\lambda)=|\{i\,|\,\lambda_i\neq 0\}|$ 及び $|\lambda|=\sum_{i\geq 1}\lambda_i$ とおく。$\lambda$ の共役分割を $\lambda'$ と表す。すなわち $\lambda'$ とは $\lambda$ の Young 図形の転置をその Young 図形とする分割である。また、分割 $\lambda$ はその成分が全て偶数のとき偶分割であるということにする。

$\Phi$ を $t$ と異なる $\mathbb{F}_q[t]$ のモニックな既約多項式の全体とする。このとき、$GL(n,q)$ の既約指標は写像 $\boldsymbol{\mu}:\Phi\longrightarrow\mathscr{P}$ で

$$||\boldsymbol{\mu}||=\sum_{f\in\Phi}(\deg f)|\boldsymbol{\mu}(f)|=n$$

を満たすもの全体によりパラメータ付けされる[47]。写像 $\boldsymbol{\mu}$ に対応する $GL(n,q)$ の既約指標を $\chi_{\boldsymbol{\mu}}$ で表す。ちなみに $GL(n,q)$ の自明指標に対応する写像は多項式 $t-1$ を分割 $(1^n)$ に移す[48]。

以上の準備のもとで、次が成り立つ：

**定理 3.13 (Bannai-Kawanaka-Song [11]).** 置換指標 $(1_{Sp(2n,q)})^{GL(2n,q)}$ は次の様に分解する：

$$(1_{Sp(2n,q)})^{GL(2n,q)}=\sum\chi_{\boldsymbol{\mu}}$$

ただし和は $||\boldsymbol{\mu}||=2n$ かつどの $f\in\Phi$ に対しても $\boldsymbol{\mu}(f)'$ が偶分割となるような全ての $\boldsymbol{\mu}:\Phi\longrightarrow\mathscr{P}$ をわたる。 □

従って、各分割 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots)$ について $\lambda\cup\lambda=(\lambda_1,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_2,\dots)$ と書くことにし、さらに写像 $\boldsymbol{\mu}:\Phi\longrightarrow\mathscr{P}$ に対しても $(\boldsymbol{\mu}\cup\boldsymbol{\mu})(f)=\boldsymbol{\mu}(f)\cup\boldsymbol{\mu}(f)$ $(\forall f\in\Phi)$ と定めれば、

---

[47] $\mathbb{F}_{q^l}$ の乗法群を $M_l$ と書くことにすると、$GL(n,q)$ の既約指標のパラメータ付けに際しては正確には $\Phi$ ではなく、ノルム写像 $N_{m,l}:M_m\longrightarrow M_l$（ただし $l$ は $m$ を割る）の転置 $\hat{M}_l\longrightarrow\hat{M}_m$ に関する帰納的極限 $L=\varinjlim\hat{M}_l$ の Frobenius 写像による軌道全体の集合 $\Theta$ を用いるのであるが、記号が煩雑になるので上の様にした。

[48] Green [32] の記号は Macdonald [54] のものと異なるので注意を要する。Green の記号に於ける写像 $\boldsymbol{\mu}$ は Macdonald の記号では $\boldsymbol{\mu}'$ に対応する。ただしここで $\boldsymbol{\mu}'(f)=\boldsymbol{\mu}(f)'$ $(\forall f\in\Phi)$ と定める。

$\chi_{\mu} \longleftrightarrow \chi_{\mu\cup\mu}$ により、$GL(n,q)$ の既約指標と置換指標 $(1_{Sp(2n,q)})^{GL(2n,q)}$ の分解は自然に1対1に対応する。

一方、両側剰余類については次の事実がある[49]。

**定理 3.14 (Klyachko [46]).** $\psi : GL(n,q) \longrightarrow GL(2n,q)$ を

$$\psi(A) = \begin{pmatrix} I_n & \\ & A \end{pmatrix} \quad (\forall A \in GL(n,q))$$

により定める。このとき、2元 $A, B \in GL(n,q)$ が共役であるためには、$\psi(A), \psi(B)$ が同じ $(Sp(2n,q), Sp(2n,q))$-両側剰余類に属することが必要かつ十分である。さらに、全ての $(Sp(2n,q), Sp(2n,q))$-両側剰余類に対して $\psi(A)$ の形の代表元が取れる。 □

先程このアソシエーションスキームの指標表の決定のプロセスが Green のものに類似していると書いたが、定理 3.13 及び定理 3.14 の対応のもとで Bannai-Kawanaka-Song [11] の結果を非常に大雑把に述べると、(1) $\mathfrak{X}(GL(n,q))$ の指標表に変換 $q \longrightarrow q^2$ を施し (2) 然るべき直交化を行うと、$GL(2n,q)/Sp(2n,q)$ の指標表が得られる、ということになるだろう。特に $\chi_{\boldsymbol{\mu}}$ $(||\boldsymbol{\mu}|| = n)$ が半単純指標の場合、すなわち $l(\boldsymbol{\mu}(f)') \leq 1$ $(\forall f \in \Phi)$ が成り立つときには、$q \longrightarrow q^2$ の変換のみによって対応する $GL(2n,q)/Sp(2n,q)$ の指標表の行が得られる[50]。

また、一般線型群やユニタリー群の共役類は Jordan 標準形だけにより定まるので、(定理 3.14 の記号を用いると) 群アソシエーションスキーム $\mathfrak{X}(\psi(GL(n,q)))$ は $\mathfrak{X}(GL(2n,q))$ の部分スキームになっている。

$GL(n,q^2)/GL(n,q)$ 及び $GL(n,q^2)/GU(n,q)$ の場合にも同様の結果が成り立つことが最近 Henderson [37] により示された[51]。この場合対応する群は、先程も述べたがそれぞれ $GU(n,q), GL(n,q)$ であり、変換 $q \longrightarrow -q$ を考える。

さて、Inglis-Liebeck-Saxl のリストの4番目、すなわち $GL(2n,q)/GL(n,q^2)$ については、それが対称であることは 1986 年に Inglis (cf. [40, Theorem 2]) によって示されていたが、両側剰余類や置換指標分解についてはほとんど全く謎のままであった[52]。このうち置換指標の分解に関してはごく最近 Bannai-Tanaka [18] 及び Henderson [38] により独立に決定された[53]。他の3つの系列と異なり、この場合には対応する良い群は現在の所なさそうではあるが、一応結果を述べておきたい。

以下、次数 $k$ のモニックな多項式 $f(t) = t^k + a_1 t^{k-1} + \cdots + a_k \in \Phi$ に対し

$$\tilde{f}(t) = a_k^{-1} t^k f(t^{-1}) = t^k + \frac{a_{k-1}}{a_k} t^{k-1} + \cdots + \frac{1}{a_k}$$

[49] 置換指標の分解を求める際にも両側剰余類の情報は用いられている。

[50] Weyl 群のレベルで考えると、$W(A_{n-1}) \cong S_n$ の指標表は Schur 対称函数 $s_\lambda$ と冪和対称函数 $p_\rho$ $(\lambda, \rho \in \mathscr{P})$ の変換行列により表されることは良く知られている。さらに Schur 函数 $s_\lambda$ は Jack 対称函数 $P_\lambda^{(1)}$ に一致する。一方 $W(A_{2n-1})/W(B_n)$ の指標表は、スカラー倍を除くと Jack 対称函数 $P_\lambda^{(2)}$ と $p_\rho$ $(\lambda, \rho \in \mathscr{P})$ の変換行列により記述される。詳しくは Macdonald [54, Chapter VII] を参照されたい。

[51] Henderson はさらに $GU(2n,q)/Sp(2n,q)$ の場合も解決している (cf. [36])。

[52] ただし $n = 1$ の場合は Terras による有限上半平面 $H_q$ と一致し、指標表も完全に求まっていた。また、Saxl [65] による部分的な結果もある。

[53] Henderson の証明には Lusztig の指標層の理論が用いられている。一方我々の証明はより初等的であり、かつ標数2の場合にも適用される。また、$n = 2$ の場合の分解は、内積を具体的に計算するという方法によって、これらに先立ち筆者により求められている (cf. [73])。

とおく[54]。また、写像 $\boldsymbol{\mu}:\Phi\longrightarrow\mathscr{P}$ に対し $\tilde{\boldsymbol{\mu}}:\Phi\longrightarrow\mathscr{P}$ を $\tilde{\boldsymbol{\mu}}(f)=\boldsymbol{\mu}(\tilde{f})$ $(\forall f\in\Phi)$ により定める。このとき

**定理 3.15 (Bannai-T., Henderson).** (i) $q$ が奇数のとき、$(1_{GL(n,q^2)})^{GL(2n,q)}=\sum\chi_{\boldsymbol{\mu}}$ と分解する。ただし和は、$||\boldsymbol{\mu}||=2n$, $\tilde{\boldsymbol{\mu}}=\boldsymbol{\mu}$, かつ $\boldsymbol{\mu}(t-1)'$ 及び $\boldsymbol{\mu}(t+1)$ が偶分割となる全ての $\boldsymbol{\mu}$ をわたる[55]。

(ii) $q$ が偶数のときの分解は $(1_{GL(n,q^2)})^{GL(2n,q)}=\sum\chi_{\boldsymbol{\mu}}$ となる。ここで $\boldsymbol{\mu}$ は $||\boldsymbol{\mu}||=2n$, $\tilde{\boldsymbol{\mu}}=\boldsymbol{\mu}$, かつ $\boldsymbol{\mu}(t-1)'$ が偶分割となるもの全てを動く。 □

この定理よりランク（すなわち置換指標の既約成分の個数）に関する母函数が得られる。

**系 3.16.** $GL(2n,q)/GL(n,q^2)$ のランクの母函数は

$$\sum_{n\geq 0}\mathrm{rank}(GL(2n,q)/GL(n,q^2))t^{2n}=\prod_{r\geq 1}(1-qt^{2r})^{-1}$$

により与えられる。ただし $n=0$ の場合はランクは 1 と理解する。特に

$$\mathrm{rank}(GL(2n,q)/GL(n,q^2))=\sum_{\substack{\lambda\in\mathscr{P}\\ |\lambda|=n}}q^{l(\lambda)}$$

を得る。 □

さて、コンパクト対称空間の球函数は、多変数の Jacobi 多項式により記述される。このことに言及して、Bannai [4, p.123] は特に $GL(2n,q)/Sp(2n,q)$ の例について次の様に述べている："Roughly speaking, the compact group $SU(n)$ corresponds to the finite group $GL(n,q)$ and the space $SU(2n)/Sp(2n)$ corresponds to the association scheme $GL(2n,q)/Sp(2n,q)$. So, it may not be very surprising that the representations of the association scheme $GL(2n,q)/Sp(2n,q)$ are analogous to those of the group $GL(n,q)$ because both are related to the root system of type $A_{n-1}$. Furthermore, the change $q\longrightarrow q^2$ which appeared in Theorem 1 [4, p.117] corresponds to the change of the weight functions which define the generalized Jacobi orthogonal polynomials of $SU(n)$ and $SU(2n)/Sp(2n)$."

コントロール現象に関して挙げた多くの例については、それらの指標表に何らかの（多変数）直交多項式が付随するかどうかは疑問であるが、上で述べられている様に連続の場合に起きていた関連性はこれら有限の場合にも依然として保存されている。従って、もしアソシエーションスキームに於けるランク 1 コンパクト対称空間の類似とみなされる $P$- & $Q$-多項式スキームの適切な一般化が存在するとすれば、その際にはこれらの例も深く関わってくるものと期待される。

最後に、関連した話題を一つ述べてこの原稿を終える。

一般に可換アソシエーションスキーム $\mathfrak{X}=(X,\{R_i\}_{0\leq i\leq d})$ に対し Delsarte [26, §2.5] は、**$\mathfrak{X}$ の長さ $n$ の拡大** (extension of $\mathfrak{X}$ of length $n$) $\mathfrak{X}^{(n)}$ を以下のように定義した。す

[54]すなわち $\tilde{f}$ は $f$ の根の逆数を根に持つようなモニックな既約多項式である。
[55]既約指標 $\chi_{\boldsymbol{\mu}}$ に対し、その複素共役 $\overline{\chi_{\boldsymbol{\mu}}}$ は $\chi_{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}$ に一致する。

なわち、$|\beta| = \beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_d = n$ を満たす任意の $\beta = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_d) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{d+1}$ について、各 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in X^n$ に対し

$$(x, y) \in R_\beta \iff d_i(x, y) = |\{l \mid (x_l, y_l) \in R_i\}| = \beta_i \quad (0 \leq i \leq d)$$

と定める。このとき、$\mathfrak{X}^{(n)} = (X^n, \{R_\beta\}_{|\beta|=n})$ はまた可換アソシエーションスキームとなることが容易に確かめられる[56]。特に、$d = 1$ の場合には $\mathfrak{X}^{(n)}$ は Hamming スキーム $H(n, q)$ $(q = |X|)$ に一致する。

ここでは具体的には述べないが、Mizukawa-Tanaka [58] に於いて、拡大 $\mathfrak{X}^{(n)}$ の指標表が $\boldsymbol{(n+1, m+1)}$**-超幾何函数** ($(n+1, m+1)$-hypergeometric function, cf. [86]) を用いて表される $d$ 変数直交多項式により記述されることが示された。これは Hamming スキームと Krawtchouk 多項式との関係の一般化と見なせる。もともとこの拡大はやはり符号理論の立場から考案されたものであるが[57]、指標表の観点からも特筆すべき例を与えており極めて興味深い。

# 参考文献


[1] H. Akazawa and H. Mizukawa, *Orthogonal polynomials arising from the wreath products of a dihedral group with a symmetric group*, J. Combin. Theory Ser. A **104** (2003), 371–380.

[2] B. Bagchi and N. S. N. Sastry, *Intersection pattern of the classical ovoids in symplectic 3-space of even order*, J. Algebra **126** (1989), 147–160.

[3] R. Bailey, *Association schemes : Designed experiments, algebra and combinatorics*, Cambridge University Press, 2004.

[4] E. Bannai, *Character tables of commutative association schemes*, Finite geometries, buildings, and related topics (Pingree Park, CO, 1988), Oxford Sci. Publ., Oxford Univ. Press, New York, 1990, pp. 105–128.

[5] ______, *Subschemes of some association schemes*, J. Algebra **144** (1991), 167–188.

[6] ______, *Association schemes and fusion algebras (an introduction)*, J. Algebraic Combin. **2** (1993), 327–344.

[7] ______, *An introduction to association schemes*, Methods of discrete mathematics (Braunschweig, 1999), Quad. Mat., vol. 5, Aracne, Rome, 1999, pp. 1–70.

[8] E. Bannai, S. Hao, and S.-Y. Song, *Character tables of the association schemes of finite orthogonal groups acting on the nonisotropic points*, J. Combin. Theory Ser. A **54** (1990), 164–200.

[9] E. Bannai, S. Hao, S.-Y. Song, and H. Z. Wei, *Character tables of certain association schemes coming from finite unitary and symplectic groups*, J. Algebra **144** (1991), 189–213.


---

[56] $\mathfrak{X}$ の Bose-Mesner 代数を $\mathfrak{A}$ とすると、拡大 $\mathfrak{X}^{(n)}$ の Bose-Mesner 代数は $n$ 階対称テンソル空間 $S^n(\mathfrak{A})$ に一致する。また、$\mathfrak{X}$ が有限群の等質空間 $G/H$ となっているとき、$\mathfrak{X}^{(n)}$ は $G \wr S_n / H \wr S_n$ に他ならない。これについては Mizukawa [57] 及び Akazawa-Mizukawa [1] 等の結果がある。

[57] 例えば Lee 距離等を取り扱う枠組みとして適当な様に思われる。Tarnanen [75] 参照。

[10] E. Bannai and T. Ito, *Algebraic combinatorics I*, The Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Menlo Park, CA, 1984.

[11] E. Bannai, N. Kawanaka, and S.-Y. Song, *The character table of the Hecke algebra* $\mathscr{H}(GL_{2n}(F_q), Sp_{2n}(F_q))$, J. Algebra **129** (1990), 320–366.

[12] E. Bannai, W. M. Kwok, and S.-Y. Song, *Ennola type dualities in the character tables of some association schemes*, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A **44** (1990), 129–143.

[13] E. Bannai, O. Shimabukuro, and H. Tanaka, *Finite Euclidean graphs and Ramanujan graphs*, to appear in Discrete Math.

[14] ______, *Finite analogues of non-Euclidean spaces and Ramanujan graphs*, European J. Combin. **25** (2004), 243–259.

[15] E. Bannai and S.-Y. Song, *The character tables of Paige's simple moufang loops and their relationship to the character tables of* $PSL(2,q)$, Proc. London Math. Soc. **58** (1989), 209–236.

[16] ______, *On the character table of the association scheme* $Sp(4,q)/Sz(q)$, Graphs Combin. **5** (1989), 291–293.

[17] ______, *The character table of the commutative association scheme coming from the action of* $GL(n,q)$ *on nonincident point-hyperplane pairs*, Hokkaido Math. J. **19** (1990), 417–429.

[18] E. Bannai and H. Tanaka, *The decomposition of the permutation character* $1_{GL(n,q^2)}^{GL(2n,q)}$, J. Algebra **265** (2003), 496–512.

[19] R. C. Bose and T. Shimamoto, *Classification and analysis of partially balanced incomplete block designs with two associate classes*, J. Amer. Statist. Assoc. **47** (1952), 151–184.

[20] A. E. Brouwer, A. M. Cohen, and A. Neumaier, *Distance-regular graphs*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[21] A. E. Brouwer, C. D. Godsil, J. H. Koolen, and W. J. Martin, *Width and dual width of subsets in polynomial association schemes*, J. Combin. Theory Ser. A **102** (2003), 255–271.

[22] A. Chan, C. Godsil, and A. Munemasa, *Four-weight spin models and Jones pairs*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 2305–2325.

[23] C. W. Curtis, N. Iwahori, and R. Kilmoyer, *Hecke algebras and characters of parabolic type of finite groups with* $(B,N)$*-pairs*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **40** (1971), 81–116.

[24] C. W. Curtis and I. Reiner, *Methods of representation theory I*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1981.

[25] M. R. DeDeo, *Graphs over the ring of integers modulo* $2^r$, Ph.D. thesis, U.C.S.D., CA, 1998.

[26] P. Delsarte, *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*, Philips Res. Rep. Suppl. (1973), no. 10.

[27] ______, *Association schemes and* $t$*-designs in regular semilattices*, J. Combin. Theory Ser. A **20** (1976), 230–243.

[28] Y. Egawa, *Characterization of* $H(n,q)$ *by the parameters*, J. Combin. Theory Ser. A **31** (1981), 108–125.

[29] R. Evans, *Character sums as orthogonal eigenfunctions of adjacency operators for Cayley graphs*, Contemp. Math., vol. 168, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, pp. 33–50.

[30] ———, *Spherical functions for finite upper half planes with characteristic* 2, Finite Fields Appl. **1** (1995), 376–394.

[31] R. Gow, *Two multiplicity-free permutation representations of the general linear group* $GL(n, q^2)$, Math. Z. **188** (1984), 45–54.

[32] J. A. Green, *The characters of the finite general linear groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **80** (1955), 402–447.

[33] A. Hanaki, *Classification of association schemes with small vertices*, `http://kissme.shinshu-u.ac.jp/as/`.

[34] ———, *Representations of association schemes and their factor schemes*, Graphs Combin. **19** (2003), 195–201.

[35] A. Hanaki and M. Hirasaka, *Theory of Hecke algebras to association schemes*, SUT J. Math. **38** (2002), 61–66.

[36] A. Henderson, *Character sheaves on symmetric spaces*, Ph.D. thesis, M.I.T., MA, 2001.

[37] ———, *Spherical functions of the symmetric space* $G(\mathbb{F}_{q^2})/G(\mathbb{F}_q)$, Represent. Theory **5** (2001), 581–614.

[38] ———, *Symmetric subgroup invariants in irreducible representations of* $G^F$, *when* $G = GL_n$, J. Algebra **261** (2003), 102–144.

[39] M. Hirasaka, M. Muzychuk, and P.-H. Zieschang, *A generalization of Sylow's theorems on finite groups to association schemes*, Math. Z. **241** (2002), 665–672.

[40] N. F. J. Inglis, M. W. Liebeck, and J. Saxl, *Multiplicity-free permutation representations of finite linear groups*, Math. Z. **192** (1986), 329–337.

[41] N. F. J. Inglis and J. Saxl, *An explicit model for the complex representations of the finite general linear groups*, Arch. Math. (Basel) **57** (1991), 424–431.

[42] T. Ito, K. Tanabe, and P. Terwilliger, *Some algebra related to P- and Q-polynomial association schemes*, Codes and association schemes (Piscataway, NJ, 1999), DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci., vol. 56, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001, pp. 167–192.

[43] A. A. Ivanov and S. V. Shpectorov, *The association schemes of dual polar spaces of type* ${}^2A_{2d-1}(p^f)$ *are characterized by their parameters if* $d \geq 3$, Linear Algebra Appl. **114/115** (1989), 133–139.

[44] F. Jaeger, M. Matsumoto, and K. Nomura, *Bose-Mesner algebras related to type II matrices and spin models*, J. Algebraic Combin. **8** (1998), 39–72.

[45] N. M. Katz, *Estimates for Soto-Andrade sums*, J. Reine Angew. Math. **438** (1993), 143–161.

[46] A. A. Klyachko, *Models for complex representations of groups* $GL(n, q)$, Math. USSR-Sb. **48** (1984), 365–379.

[47] R. Koekoek and R. F. Swarttouw, *The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue*, Tech. Report 98-17, Delft University of Technology Faculty of Information Technology and Systems Department of Technical Mathematics and Informatics, 1998, available at `http://aw.twi.tudelft.nl/~koekoek/askey.html`.

[48] W. M. Kwok, *Character table of a controlling association scheme defined by the general orthogonal group* $O(3, q)$, Graphs Combin. **7** (1991), 39–52.

[49] ———, *Character tables of association schemes of affine type*, European J. Combin. **13** (1992), 167–185.

[50] R. Lawther, *Folding actions*, Bull. London Math. Soc. **25** (1993), 132–144.

[51] D. A. Leonard, *Orthogonal polynomials, duality and association schemes*, SIAM J. Math. Anal. **13** (1982), 656–663.

[52] W. C. W. Li, *Number theory with applications*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1996.

[53] A. Lubotzky, R. Phillips, and P. Sarnak, *Ramanujan graphs*, Combinatorica **8** (1988), 261–277.

[54] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, 2nd ed., Oxford University Press, New York, 1995.

[55] A. Medrano, P. Myers, H. M. Stark, and A. Terras, *Finite analogues of Euclidean space*, J. Comput. Appl. Math. **68** (1996), 221–238.

[56] ———, *Finite Euclidean graphs over rings*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), 701–710.

[57] H. Mizukawa, *Zonal spherical functions on the complex reflection groups and* $(n+1, m+1)$*-hypergeometric functions*, Adv. Math. **184** (2004), 1–17.

[58] H. Mizukawa and H. Tanaka, $(n+1, m+1)$*-hypergeometric functions associated to character algebras*, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.

[59] A. Munemasa, *An analogue of t-designs in the association schemes of alternating bilinear forms*, Graphs Combin. **2** (1986), 259–267.

[60] ———, *Splitting fields of association schemes*, J. Combin. Theory Ser. A **57** (1991), 157–161.

[61] ———, *The geometry of orthogonal groups over finite fields*, JSPS-DOST Lecture Notes in Math., vol. 3, Sophia University, Tokyo, 1996.

[62] M. E. Muzychuk, *Subschemes of the Johnson scheme*, European J. Combin. **13** (1992), 187–193.

[63] A. Neumaier, *Characterization of a class of distance regular graphs*, J. Reine Angew. Math. **357** (1985), 182–192.

[64] M. Rassy and P.-H. Zieschang, *Basic structure theory of association schemes*, Math. Z. **227** (1998), 391–402.

[65] J. Saxl, *On multiplicity-free permutation representations*, Finite geometries and designs (Proc. Conf., Chelwood Gate, 1980), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 49, Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York, 1981, pp. 337–353.

[66] A. P. Sprague, *Characterization of projective graphs*, J. Combin. Theory Ser. B **24** (1978), 294–300.

[67] D. Stanton, *Some q-Krawtchouk polynomials on Chevalley groups*, Amer. J. Math. **102** (1980), 625–662.

[68] ———, *Harmonics on posets*, J. Combin. Theory Ser. A **40** (1985), 136–149.

[69] ———, *t-designs in classical association schemes*, Graphs Combin. **2** (1986), 283–286.

[70] M. Tagami, *Symmetric association schemes attached to finite upper half planes over rings*, Linear Algebra Appl. **376** (2004), 225–234.

[71] H. Tanaka, *Association schemes of affine type over finite rings*, to appear in Adv. Geom.

[72] ———, *On some relationships among the association schemes of the orthogonal groups acting on hyperplanes*, 2001.

[73] ———, *Some results on the multiplicity-free permutation group $GL(4,q)$ acting on $GL(4,q)/GL(2,q^2)$*, Codes, lattices, vertex operator algebras and finite groups (Kyoto, 2001), Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, 2001, pp. 127–139.

[74] ———, *A four-class subscheme of the association scheme coming from the action of $PGL(2,4^f)$*, European J. Combin. **23** (2002), 121–129.

[75] H. Tarnanen, *On extensions of association schemes*, The very knowledge of coding, Univ. Turku, Turku, 1987, pp. 128–142.

[76] S. Terada, *A pair of families of non-isomorphic group association schemes with the same parameters*, European J. Combin. **21** (2000), 1073–1091.

[77] A. Terras, *Fourier analysis on finite groups and applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[78] P. Terwilliger, *The Johnson graph $J(d,r)$ is unique if $(d,r) \neq (2,8)$*, Discrete Math. **58** (1986), 175–189.

[79] ———, *The subconstituent algebra of an association scheme I*, J. Algebraic Combin. **1** (1992), 363–388.

[80] ———, *The subconstituent algebra of an association scheme II*, J. Algebraic Combin. **2** (1993), 73–103.

[81] ———, *The subconstituent algebra of an association scheme III*, J. Algebraic Combin. **2** (1993), 177–210.

[82] M. Tomiyama, *Characterization of the group association scheme of $A_5$ by its intersection numbers*, J. Math. Soc. Japan **50** (1998), 43–56.

[83] ———, *Characterization of the group association scheme of $PSL(2,7)$*, J. Combin. Theory Ser. A **88** (1999), 306–341.

[84] M. Tomiyama and N. Yamazaki, *Characterization of the group association scheme of the symmetric group*, European J. Combin. **19** (1998), 237–255.

[85] S. Yoshiara, *An example of non-isomorphic group association schemes with the same parameters*, European J. Combin. **18** (1997), 721–738.

[86] M. Yoshida, *Hypergeometric functions, my love*, Friedr. Vieweg & Sohn, 1997.

[87] P.-H. Zieschang, *An algebraic approach to association schemes*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1628, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[88] 坂内 英一, **代数的組合せ論—アソシエーションスキームの最近の話題—**, 数学 **45** (1993), 55–75.

[89] ______, **代数的組合せ論の視点**, 岩波講座 現代数学の基礎 現代数学の広がり 2, 岩波書店, 1997.

[90] 坂内 英一, 坂内 悦子, **球面上の代数的組合せ理論**, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1999.