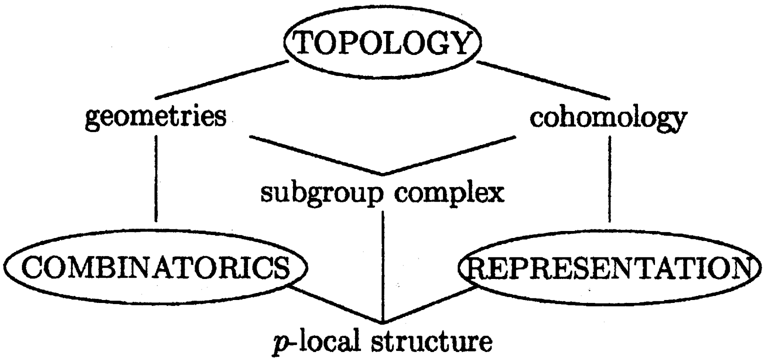
数理解析研究所講究録 1407 巻 2004 年 51-59

The radical p-subgroups and the relative projectivity

鳴門教育大学・数学教育講座　澤辺 正人 (Masato Sawabe)
Department of Mathematics, Naruto University of Education

1 Introduction

この講演は当初１時間の予定であったが、山口大・飯寄先生、筑波大・宮本先生、東京女子大・吉荒先生の提案により倍の２時間に拡張された。貴重な機会を与えて下さった３氏にこの場を借りてお礼を申し上げる。さてここでの話は有限群の部分群複体 subgroup complex についてである。まず最初に周辺分野との関わりを大雑把に説明する。



まず一番結びつきが強いのは勿論 geometry の話である。このモデルになっているのはビルディングであり parabolic geometry であるので、これは有限群の p-local structure に深く関わっている。さらに１９８０年代に subgroup complex を用いたコホモロジーの交代和分解が登場してきて以来コホモロジーとの関係も強くなってきてる。また最近では "p-local finite groups" [2] と言う新しい概念が代数的位相幾何の中で出て来ており、例えばその中で centric p-radical complex がある場面で重要な役割を果たしていると言う報告も聞いている。いずれにしても、個人的に一番興味のあるラインでありかつ一番勉強不足なラインでもある。これらをさらに大きな視点からみると geometries と cohomology を結ぶ TOPOLOGY、cohomology と p-local structure を結ぶ REPRESENTATION、p-local structure と geometries を結ぶ COMBINATORICS がある。ここでは前半で subgroup complex と geometries を結ぶラインの現状を紹介し、後半で subgroup complex の表現論に関わる新しい結果の報告をする。(上の図は S.D.Smith の現在執筆中の本「Subgroup complexes」の原稿の中で示されている。)

2 p-subgroup comlexes

まず代表的なものを取り上げて考えていく。いま $\mathcal{S}_p(G) = \{U = p\text{-subgroup} \le G \mid U \ne 1\}$ を有限群 G の非自明な p-subgroup 全体の集合とし $\Delta(\mathcal{S}_p(G))$ を対応する単体複体 (simplicial complex) とする。つまり $\Delta(\mathcal{S}_p(G))$ は頂点の集合が $\mathcal{S}_p(G)$、単体の集合がその包含列全体 $\{U_0 < U_1 < \cdots < U_m \mid U_i \in \mathcal{S}_p(G)\}$ で定義されている単体複体とする。この様にある (G-共役で閉じている) p-subgroup の族 $\mathcal{X}$ を取ってきた時に先の $\Delta(\mathcal{X})$ で定義される単体複体を一般に G の p-subgroup complex と言う。さらにこの幾何学的実現

$|\Delta(\mathcal{X})|$ を考え、つまり位相空間を考えて我々のホモトピー論を展開していくことになる。この他の代表的な p-subgroup complex として次を挙げることが出来る。

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_p(G) &= \{U \in \mathcal{S}_p(G) \mid U = \text{elementary abelian}\}, \\ \mathcal{B}_p(G) &= \{U \in \mathcal{S}_p(G) \mid O_p(N_G(U)) = U\}. \end{aligned}$$

$\mathcal{A}_p(G)$ は非自明な elementary abelian p-subgroup 全体で $\Delta(\mathcal{A}_p(G))$ は Quillen comllex と呼ばれている。一方 $\mathcal{B}_p(G)$ は $O_p(N_G(U)) = U$ を満足する p-subgroup 全体で $\Delta(\mathcal{B}_p(G))$ は Bouc complex と呼ばれている。$\mathcal{B}_p(G)$ に属する p-subgroup は "p-radical" と呼ばれているので $\Delta(\mathcal{B}_p(G))$ を p-radical complex と呼ぶこともある。また最初に出て来た $\Delta(\mathcal{S}_p(G))$ は Brown complex と呼ばれている。ここで重要な事はこれら 3 つの complex の幾何学的実現は位相空間として全てホモトピー同値であると言うことである。即ち次が成り立っている。

Remark $|\Delta(\mathcal{S}_p(G))| \sim |\Delta(\mathcal{A}_p(G))| \sim |\Delta(\mathcal{B}_p(G))|$ *: homotopy equivalent*

以下簡単のため $\mathcal{X}$, $\Delta(\mathcal{X})$, $|\Delta(\mathcal{X})|$ を全て同一視して同じ記号 $\mathcal{X}$ で表すことにする。

3 Geometries

次に p-subgroup complex がどのように geometry と繋がってくるのかという話しである。やはり出発点になるのは Quillen の結果である。G を標数 p の体上で定義されている Lie 型の群とし $Bld(G)$ を付随するビルディングとする。ここで Quillen [3] が示したことは $Bld(G)$ と $\mathcal{S}_p(G)$ が互いにホモトピー同値 $Bld(G) \sim \mathcal{S}_p(G)$ であると言う結果である。ビルディング $Bld(G)$ はもちろん parabolic geometry なのでいわゆる“G の p-local geometry”になっている。即ち各 object の固定部分群が p-local subgroup になっている。さらに $Bld(G)$ は A 型, B 型, C 型,... と言うデンキン図形に対応しており、即ちコンパクトにまとまった極めて小さい対象になっている。つまりホモトピー同値 $Bld(G) \sim \mathcal{S}_p(G)$ が示していることは p-local geometry $Bld(G)$ は巨大な complex $\mathcal{S}_p(G)$ に対してある種の「骨格・骨組み」を与えていると言うことである。これらの他にビルディング $Bld(G)$ が元の群に及ぼす強い影響として次を挙げることが出来る。まず $Bld(G)$ はいわば G の BN-pair であるので G の単純性の証明を提供している。さらに $Bld(G)$ の top-homology $H_l(Bld(G))$ を考えるとこれは G の Steinberg module を誘導している。そこで Lie 型の群に強い影響を及ぼしているビルディングの類似が、同じ単純群である散在群の中にも存在するのかと言う自然な質問が出て来る。

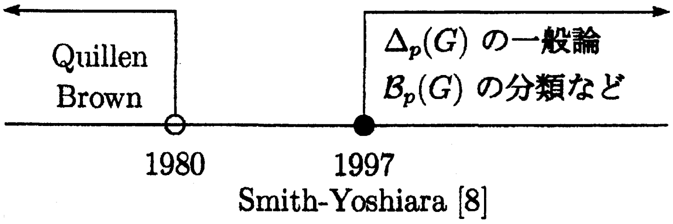
Question 1 散在型単純群 S に対して S の構造・表現を良く反映しているようなビルディング $Bld(G)$ の類似は存在するか?

さらに散在群や単純群に全く拘らないで一般に次の様な質問を設定する事が出来る。

Question 2 有限群 G とその位数 $|G|$ を割り切る素数 p に対して $\Delta_p(G)$ と $\mathcal{S}_p(G)$ が互いにホモトピー同値になるような G の *p-local geometry* $\Delta_p(G)$ は存在するか?

即ちこれは $Bld(G)$ が持つホモトピーの性質を一般に抜き出してきたものである。この問題を考えるに当たって重要になってくるのが先に指摘したホモトピー同値性 $\mathcal{S}_p(G) \sim \mathcal{A}_p(G) \sim \mathcal{B}_p(G)$ である。$\mathcal{S}_p(G)$ は一般論を展開していく時には非常に優秀なのであるが、具体的な情報を集めようとすると殆ど手が動かないと言うのが実情である。つまり大き

すぎるのである。そこで $\mathcal{S}_p(G)$ より遙かに(次元の)小さい $\mathcal{B}_p(G)$ が我々のターゲットになってくる。そしてまずは問題の出所である散在群の p-radical $\mathcal{B}_p(G)$ を分類してその足掛かりとなる情報収集を計ろうと言うことになる。これが散在群に対する $\mathcal{B}_p(G)$ の分類に興味を持った我々の経緯である。そこで次節ではどの様に $\mathcal{B}_p(G)$ を決定していくのかと言う話しに入っていく。その前に一言だけ歴史的な事実を述べておく。



先に述べた Quillen のホモトピー同値 $Bld(G) \sim \mathcal{S}_p(G)$ は1980年以前に証明されている。さらに後に述べるオイラー標数についての Brown の結果も 1980 年よりも前に存在している。ところが Question 2 の様に一般の geometry と subgroup complex のホモトピー同値性が研究課題として明確に示されたのは Smith-Yoshiara [8] が最初である。勿論その間にも p-local geometry のホモロジー表現の研究や subgroup complex によるコホモロジーの交代和分解の研究など、それぞれの研究は数多く存在している。しかし 1997 年の Smith-Yoshiara の論文になって初めてホモトピー同値性の問題意識が明確にされ $\mathcal{B}_p(G)$ の分類や p-local geometry $\Delta_p(G)$ の一般論の整備が始められた。つまりここでの話題は古くからある話しであり、かつ新しい話しでもあると言うことである。

4 $\mathcal{B}_p(G)$ の決定

最初に $\mathcal{B}_p(G)$ の基本性質をいくつか述べる。

Lemma 1 $\mathcal{B}_p^e(G) := \mathcal{B}_p(G) \cup \{1\}$ と置く。有限群 G_1, G_2 に対して次が成り立つ。

1. $\mathcal{B}_p^e(G_1 \times G_2) = \{U_1 \times U_2 \mid U_i \in \mathcal{B}_p^e(G_i)\}$.
2. $\mathcal{A}_p(G_1 \times G_2) \sim \mathcal{A}_p(G_1) * \mathcal{A}_p(G_2)$: *homotopy equivalent.*
3. 標数 p の体上で定義されている *Lie* 型の群 L に対して $\mathcal{B}_p(L)$ は L における *parabolic subgroup* の *unipotent radical* 全体の集合に一致する。

(1) は $\mathcal{B}_p(G)$ 特有の現象である。つまり直積の radical 群はそれぞれの radical 群の直積になっている。(2) は蛇足になるが elementary abelian の complex $\mathcal{A}_p(G)$ に対しても直積に関する結果が知られている。これは $\mathcal{B}_p(G)$ のように綺麗に記述出来ている訳ではないが直積の $\mathcal{A}_p(G_1 \times G_2)$ は simplicial join $\mathcal{A}_p(G_1) * \mathcal{A}_p(G_2)$ とホモトピー同値になっている。これは Aschbacher-Smith [1] によって証明されている。(3) はいわゆる Borel-Tist の定理による。また unipotent radical 全体の集合はいわばビルデング $Bld(L)$ であるので $\mathcal{B}_p(G)$ を考えることは一般の有限群 G とその位数 $|G|$ を割り切る素数 p に対してビルデングの類似物を考えていることに他ならない。

さて $\mathcal{B}_p(G)$ 決定の原理は次のようになっている。勝手に $U \in \mathcal{B}_p(G)$ を取ってくると U は G の p-subgroup であるからその正規化群 $N_G(U)$ は G のある maximal p-local subgroup M に含まれている。つまり $N_G(U) = N_M(U)$ が成り立っている。一方 U は G の p-radical であるので $U = O_p(N_G(U)) = O_p(N_M(U))$ である。つまり U は M の

p-radical にもなっている。即ちこれは maximal p-local subgroup の p-radical が元の群の p-radical の " 候補 " になっていることを示している。記号を用いれば

$$\mathcal{B}_p(G) \subseteq \bigcup_{M \in \mathcal{M}_p} \mathcal{B}_p(M)$$

である。ここで $\mathcal{M}_p$ は G の maximal p-local subgroup 全体の集合であるとする。さらに一般にある群の p-radical はその群の O_p-part で割ったところで考えてよろしいと言う結果 [8, Lemma 1.9] がある。即ち $\mathcal{B}_p(M) = \{U \mid \overline{U} \in \mathcal{B}_p(M/O_p(M))\} \cup \{O_p(M)\}$ が成り立っている。さらに " 通常 " $M/O_p(M)$ は我々の良く知っている群になっている。よって必要ならばまた $M/O_p(M)$ の maximal p-local を考えて $\mathcal{B}_p(M)$ を求めていくことになる。即ち「$\mathcal{B}_p(G)$ は小さい群から帰納的に求めることが出来る」のである。

ここで、例えばモンスター単純群 $\mathbb{M}$ と $p = 2$ を例にとって先の議論を検証してみる。まず $\mathbb{M}$ の maximal 2-local subgroup は次の 7 クラスに分かれる (maximal 2-local の分類に関してはこの報告集の吉荒氏の論説を参照されたい)。

$$\begin{array}{ll}
M_1 = 2^{1+24}Co_1 & L_1 = 2BM \\
M_2 = 2^{2+11+22}(L_2(2) \times M_{24}) & L_2 = 2^2({}^2E_6(2))S_3 \\
M_3 = 2^{3+6+12+18}(L_3(2) \times 3Sp_4(2)) & \\
M_4 = 2^{5+10+20}(L_5(2) \times L_2(2)) & \\
M_5 = 2^{10+16}\Omega_{10}^{+}(2) &
\end{array}$$

まず M_i, L_j の 2-radical が $\mathbb{M}$ の 2-radical の " 候補 " になっている。そしてそれは $M_i/O_2(M_i)$ あるいは $L_j/O_2(L_j)$ の 2-radical が分かれば良い。ところが $\mathcal{B}_2(Co_1)$ は既に分類されている ([4])。さらに Lemma 1(1) から直積の radical 群を求めるにはその直積因子の radical 群が分かれば良い。しかし M_{24} の 2-radical は既に分類されており、また標数 2 型の Lie 型の群の 2-radical はその unipotent radical を機械的に求めることで書き出すことが出来る (Lemma 1(1))。また $\mathcal{B}_2(BM)$ も既に分類されていることに注意しておく ([9])。この様に maximal p-local subgroup のリストが存在すればそこから直ちに元の群の p-radical の候補が一目で分かるのである。さて次にやるべき事は各 2-radical の候補 U の normalizer が具体的にどこの maximal 2-local M_i, L_j に入ってくるのかを " 正確 " に見ると言うことである。それによってどの候補が本当の $\mathbb{M}$ の 2-radical であるのかを判定していくのである。そしてここが $\mathcal{B}_p(G)$ 分類の中で一番の大仕事になってくる。($\mathcal{B}_2(\mathbb{M})$ の分類の詳細については [9] を参照されたい。) 以上が $\mathcal{B}_p(G)$ 決定の原理である。

5 p-local geometry $\Delta_p(G;\mathcal{F})$

次に我々の p-local geometry $\Delta_p(G;\mathcal{F})$ を一般にどうやって考えて行くかという話しに移っていく。モデルになるのは Lie 型の群なのでそれと比較しながら見ていく。

G: 有限群、$p \in \pi(G)$、$P \in Syl_p(G)$	L: 標数 p 型の Lie 型の群
(1) $\mathcal{F}$: G-共役で閉じている G の ある p-subgroup の族	(1') L における parabolic の unipotent radial 全体から成る集合 "Uni"
(2) $(\mathcal{F}_{min})_{\leq P} = \{R_1, \ldots, R_m\}$	(2') min. unipotent radical の完全代表系
(3) $P_i := N_G(R_i)$ $(1 \leq i \leq m)$	(3') max. parabolic の完全代表系
(4) $\Delta_p(G;\mathcal{F}) = (G/P_1, \ldots, G/P_m; *)$	(4') $\Delta_p(L;Uni) = Bld(L) \sim \mathcal{B}_p(L) = Uin$

まず $\mathcal{F}$ として G-共役で閉じている G のある p-subgroup の族を取ってくる。これは Lie 型の中の何を想定しているかと言うと unipotent radical 全体の集合 Uni を想定し

ている。さらに $\mathcal{F}$ を通常の包含関係で半順序集合と見たとき $\mathcal{F}_{min}$ をその中の極小元全体、$(\mathcal{F}_{min})_{\leq P}$ を固定されている p-Sylow subgroup P に含まれている $\mathcal{F}_{min}$ の元全体とする。これは勿論 Lie 型の中の minimal unipotent radical の完全代表系を想定していることになる。即ちその正規化群 P_i は maximal parabolic の完全代表系の類似物となる。そこで我々の幾何 $\Delta_p(G;\mathcal{F})$ を $\{P_i\}_{1\leq i\leq m}$ によるコセット幾何 $(G/P_1,\ldots,G/P_m;*)$ で定義してしまおうと言うのである。これは P の取り方に依らず同型を除いて一意的に定まる。$\Delta_p(G;\mathcal{F})$ を「$\mathcal{F}$ に付随する G の p-local geometry」と呼ぶことにする。さてこの時 Lie 型に対応する我々の幾何 $\Delta_p(L;Uni)$ はどうなっているかと言うと、その構成の仕方から明らかに付随するビルディング $Bld(L)$ に一致している。もう一度ビルディングについて振り返ってみると Quillen の定理から $Bld(L)$ は $\mathcal{S}_p(L)$ にホモトピー同値であり即ち $\mathcal{B}_p(L)$ にホモトピー同値であった。さらに $\mathcal{B}_p(L)$ はまさに unipotent radicals Uni であったことから Lie 型の場合 Uni に付随する我々の $\Delta_p(L;Uni)$ は再び Uni にホモトピー同値になっていることが分かる。そこで一般に我々の $\Delta_p(G,\mathcal{F})$ に対して次のような自然な質問を設定することが出来る。

Question 3 いつ $\Delta_p(G,\mathcal{F})$ は $\mathcal{F}$ にホモトピー同値になるか?

これは先に挙げた Question 2 と較べるとさらに踏み込んだものになっている。より精度が上がっているのである。この質問に対する答えの1つとして次を挙げることが出来る。

Proposition 1 ([5]) 上で定義した記号の下で次を仮定する。

1. *Each R_i $(1\leq i\leq m)$ is weakly closed in P with respect to G.*
2. *For any subset $J\subseteq\{1,\ldots,m\}$, $\langle R_j \mid j\in J\rangle$ lies in $\mathcal{F}$.*

この時 $\Delta_p(G,\mathcal{F})$ と $\mathcal{F}$ は互いにホモトピー同値になる。

この結果はまだ改良する余地は残されているのであるが、一応ある程度満足出来るところまで来ていると思っている。さらにこれを用いると散在群における現象論をかなり統一的に説明することが出来き、そこでは centric な p-radical subgroup が関係してくる。

6 Centric p-radicals

4 節で登場してきたモンスター単純群 $\mathbb{M}$ の maximal 2-local subgroup M_i, L_j をここでもう一度考えていくことにする。今 M_i と L_j の構造に着目して $\mathbb{M}$ の 2-radical $\mathcal{B}_2(\mathbb{M})$ を次のように2つに分けてみる。

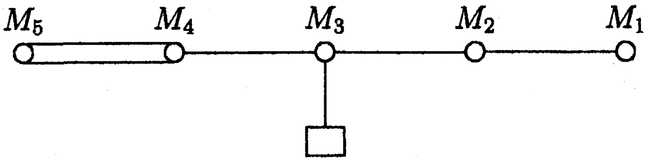
$$\mathcal{B}_2(\mathbb{M})=\left\{\bigcup_i(\mathcal{B}_2(M_i)\cap\mathcal{B}_2(\mathbb{M}))\right\}\cup\left\{\bigcup_j(\mathcal{B}_2(L_j)\cap\mathcal{B}_2(\mathbb{M}))\right\}.$$

即ち前半が M_i から出てくる 2-radical で後半が L_j から出てくる 2-radical である。ここで $\mathcal{B}_2(M_i)$, $\mathcal{B}_2(L_j)$ は $\mathcal{B}_2(\mathbb{M})$ の候補を与えていたことに注意する (4 節)。ところで各 M_i の O_2-part にはその Levi component $M_i/O_2(M_i)$ の natural module がセクションとして入っており L_j はそうなっていない。即ちあえて名前を付けるのであれば M_i は "parabolic type", L_j は "non-parabolic type" として良いかも知れない。この言葉を使うと上の $\mathcal{B}_2(\mathbb{M})$ を構成している前半の集合は parabolic type の maximal 2-local から出て来た 2-radical であり、我々はこれを改めて $\mathcal{B}_2^{cen}(\mathbb{M})$ と書くことにする。すると実は全体の $\mathcal{B}_2(\mathbb{M})$ よりもむしろその部分複体である $\mathcal{B}_2^{cen}(\mathbb{M})$ のほうが $\mathbb{M}$ に対して良い幾何を与えていることが分かる。

Proposition 2 ([6]) *1.* $\mathcal{B}_2(\mathbb{M})$ と $\mathcal{B}_2^{cen}(\mathbb{M})$ は互いにホモトピー同値ではない。

2. $\mathcal{B}_2^{cen}(\mathbb{M})$ は *2-local geometry* $\Delta_2(\mathbb{M};\mathcal{B}_2^{cen}(\mathbb{M}))$ にホモトピー同値である。

3. $\Delta_2(\mathbb{M};\mathcal{B}_2^{cen}(\mathbb{M}))$ は *Ronan-Smith* の *2-local geometry* $RS_2(\mathbb{M})$ を与える。(つまり $\mathcal{B}_2^{cen}(\mathbb{M})$ は $RS_2(\mathbb{M})$ を実現する。) $RS_2(\mathbb{M})$ に対応する図形は次のようになる。



この様に centric でうまくいくと言う状況が他の多くの散在群でも起きている。実はこの $\mathcal{B}_p^{cen}(G)$ と言う族は次のように定式化することが出来る。

$$\mathcal{B}_p^{cen}(G) := \{U \in \mathcal{B}_p(G) \mid \text{if a } p\text{-element } x \text{ in } G \text{ centralizes } U \text{ then } x \text{ lies in } U\}$$

一般に G の p-subgroup U が上の右辺の条件を満足する時 U は G の p-centric subgroup と呼ばれる。ここで $\mathcal{B}_p^{cen}(G)$ が引き起こす現象論を見ていくことにする。

[I] 再び標数 p の体上で定義されている Lie 型の群 L を考える。前節で述べたように Uni を unipotent radical 全体の集合とすると Uni に付随する L の p-local geomerty $\Delta_p(L;Uni)$ はまさにビルディング $Bld(L)$ を与えていた。さらに $Bld(L)$ は Uni にホモトピー同値であり、かつそれは L の p-radical 全体の集合 $\mathcal{B}_p(L)$ と一致していた。また unipotent radical は先の centric-condition を常に満足していることから $\mathcal{B}_p(L) = \mathcal{B}_p^{cen}(L)$ が成り立っている。これらをまとめると以下のようになる。

$$\Delta_p(L;Uni) = Bld(L) \sim Uni = \mathcal{B}_p(L) = \mathcal{B}_p^{cen}(L).$$

[II] 一方、多くの散在群 S に対して先の Proposition 1 を用いることにより我々が定義した幾何 $\Delta_2(S;\mathcal{B}_2^{cen}(S))$ と $\mathcal{B}_2^{cen}(S)$ のホモトピー同値性を検証することが出来る。さらに通常 $\Delta_2(S;\mathcal{B}_2^{cen}(S))$ は Ronan-Smith の 2-local geometry $RS_2(S)$ を与えている。まとめると次のようになる。

$$RS_2(S) = \Delta_2(S;\mathcal{B}_2^{cen}(S)) \sim \mathcal{B}_2^{cen}(S).$$

ところが $RS_2(S)$ の中には以前から $\mathcal{B}_2^{cen}(S)$ に対応する complex とホモトピー同値であることが個別に確認されているものがある。よって我々の一般論あるいは Proposition 1 は Ronan-Smith geometry $RS_2(S)$ の現象論に数学的な説明を与えている事になっているのである。さて上で述べた事実から想像出来ることは、どうやら全体の $\mathcal{B}_p(G)$ よりもその部分複体である $\mathcal{B}_p^{cen}(G)$ の方が一般に元の群 G に対して良い幾何を提供しているらしいということである。Lie 型の場合はうまく $\mathcal{B}_p(L) = \mathcal{B}_p^{cen}(L)$ のように一致してしまっているが、一般には散在群に対して見られるように $\mathcal{B}_p^{cen}(G)$ は $\mathcal{B}_p(G)$ よりも真に小さくなっている。そこで我々が問題にしたいのは $\mathcal{B}_p(G)$ と $\mathcal{B}_p^{cen}(G)$ の差は一体何なのか?? と言うことである。これは geometry の中だけでの問題ではなく 1 節の中でも触れたように代数的位相幾何においても $\mathcal{B}_p^{cen}(G)$ の重要性が指摘されている。この差をただの "ゴミ" と言ってしまえばそれまでなのであるが、個人的にはここにも数学的な意味を見いだしたいと思っている。即ち我々の素朴な質問は次のようになる。

Question 4 $\mathcal{B}_p^{cen}(G)$ は一体何なのか?? *or* $\mathcal{B}_p(G) \setminus \mathcal{B}_p^{cen}(G)$ は一体何なのか??

この質問を追求していくための１つの方向は $\mathcal{B}_p(G)$ と $\mathcal{B}_p^{cen}(G)$ の違いが顕著に現われる位相的な量に着目しそれを研究することである。その量の１つに Euler 標数がある。

7 Euler 標数

まず単体複体 Δ の Euler 標数の定義から始める。

Definition 1 単体複体 Δ に対して $\chi(\Delta)$ と $\tilde{\chi}(\Delta)$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned}\chi(\Delta) &:= \textstyle\sum_{q=0}^{\dim(\Delta)}(-1)^q\cdot(\sharp\ \textit{of } q\textit{-simplices of } \Delta)\in\mathbb{Z},\\ \tilde{\chi}(\Delta) &:= \chi(\Delta)-1.\end{aligned}$$

この時 $\chi(\Delta)$ を Δ の Euler 標数、$\tilde{\chi}(\Delta)$ を Δ の reduced Euler 標数と言う。p-subgroup complex の Euler 標数については次の Brown の結果が基本的である。

Proposition 3 (Brown 1974) $\tilde{\chi}(\mathcal{S}_p(G))\equiv 0\ (\mod |G|_p)$.

即ち G の p-subgroup 全体からなる complex $\mathcal{S}_p(G)$ の reduced Euler 標数は元の群 G の p-Sylow subgroup の位数で割り切れると言うものである。ところで $\mathcal{S}_p(G)$ と $\mathcal{B}_p(G)$ は互いにホモトピー同値であるのでホモトピー不変量であるその Euler 標数の値は同じになっている。つまり Brown が示したことは結局 p-radical $\mathcal{B}_p(G)$ の reduced Euler 標数の値は G の p-Sylow subgroup の位数で割り切れると言うことになる。とことが一般に $\tilde{\chi}(\mathcal{B}_p^{cen}(G))$ は G の位数の p-part で割り切れるとは限らない。具体例を挙げてみる。

$$\begin{aligned}\tilde{\chi}(\mathcal{B}_2^{cen}(\mathbb{M}))_2 &= 2^{42} & |\mathbb{M}|_2 &= 2^{46},\\ \tilde{\chi}(\mathcal{B}_2^{cen}(BM))_2 &= 2^{38} & |BM|_2 &= 2^{41},\\ \tilde{\chi}(\mathcal{B}_2^{cen}(Fi_{24}'))_2 &= 2^{18} & |Fi_{24}'|_2 &= 2^{21}.\end{aligned}$$

上の計算は S.D Smith によるものである。さて一般に $\mathcal{B}_p^{cen}(G)$ は $\mathcal{B}_p(G)$ と全く別の complex になっているのでその Euler 標数の値 $\tilde{\chi}(\mathcal{B}_p^{cen}(G))$ は p-Sylow subgroup の位数で割れていたりそうでなかったり、いろいろあっていいはずなのであるが、他の例を見てみても $\tilde{\chi}(\mathcal{B}_p^{cen}(G))$ は p-Sylow subgroup の位数から少しだけ下がる程度で収まっている。もっと正確言うと non-centric p-radical の最大位数を少し膨らませた程度だけ落ちている感じになっているのである。そこで次のような定理は作れないものであろうか？

期待される定理 p^d を G の *non-centric p-radical subgroup* の位数の中で最大のものとする。この時 $(\tilde{\chi}(\mathcal{B}_p^{cen}(G))_p$ の値は“ほぼ”$(|G|_p\cdot p^{-d})$ に一致している？（さらにここで出てくる“ほぼ”の誤差も *non-centric p-radical subgroup* の構造から正確に特定出来る？）

そこで今回の新しい結果は、表現論を応用してこの期待される定理の“気持ち”を示したと言うものである。

8 The relative projectivity

記号の準備から始める。まず次のような交代和 $\tilde{\Lambda}_G(\mathcal{B}_p^{cen}(G))$ をバーンサイド環 $B(G)$ の中で定義する。

$$\tilde{\Lambda}_G(\mathcal{B}_p^{cen}(G)) := \left(\sum_{q=0}^{d}(-1)^q\Delta_q\right)-1$$

ここで d は単体複体 $\mathcal{B}_p^{cen}(G)$ の次元 $\dim(\mathcal{B}_p^{cen}(G))$、各 Δ_q は $\mathcal{B}_p^{cen}(G)$ の q-単体全体からなる有限 G-集合のことである。これは $\mathcal{B}_p^{cen}(G)$ の reduced Lefschetz invariant と呼ばれ

ている。さらにバーンサイド環から表現環 $A(G)$ への自然な準同型 $r: B(G) \longrightarrow A(G)$ を考える。ここで $A(G)$ は有限生成な $\mathbb{Z}_p[G]$-加群で生成されているものとする。もちろん写像 r によって有限 G-集合 X の属する同値類は X 上に引き起こされる G の置換表現の属する同型類に移される。この時 $A(G)$ の中の元 $\tilde{L}_G(\mathcal{B}_p^{cen}(G))$ を $r(\tilde{\Lambda}_G(\mathcal{B}_p^{cen}(G)))$ で定義しこれは $\mathcal{B}_p^{cen}(G)$ の reduced Lefschetz $\mathbb{Z}_p[G]$-加群と呼ばれている。次がここでの主結果である。

Theorem 1 ([7]) 有限群 G の *p-subgroup* の族 $\mathcal{X}$ を次のように定義する。

$$\mathcal{X} = \left\{ X \leq O_p(S) \;\middle|\; \begin{array}{l} S \leq N_G(U),\ S/O_p(S) = cyclic, \\ U \in (\mathcal{B}_p(G) \setminus \mathcal{B}_p^{cen}(G)), \\ \tilde{\chi}((\mathcal{B}_p(G)_{>U})^S) \neq 0 \end{array} \right\}.$$

この時 $\tilde{L}_G(\mathcal{B}_p^{cen}(G))$ は $\mathcal{X}$*-projective virtual* $\mathbb{Z}_p[G]$-加群である。

つまり $\mathcal{X}$ は G-共役と共通部分で閉じており、さらに $\tilde{L}_G(\mathcal{B}_p^{cen}(G))$ は $\mathcal{X}$-projective $\mathbb{Z}_p[G]$-加群達で生成されている $A(G)$ のイデアルに属する元だと言うことである。この結果がどの様に Euler 標数と繋がってくるのかと言うと、まずは次の事実に着目する。つまり H を G の部分群とし p^a が H の G における指数 $|G:H|$ を割り切るとする。この時一般に勝手な H-projective $\mathbb{Z}_p[G]$-加群の次元は p^a で割り切れると言うことである。これを踏まえて次の系を得る事が出来る。

Corollary 1 有限群 G に対して p^n を G の *p-Sylow subgroup* の位数とし p^d を位数 $|O_p(S)|$ の中で最大のものとする。ここで S は *Theorem* 1 の中で $\mathcal{X}$ を定義したときの条件を満足するもの全てを考える。この時 $\tilde{\chi}(\mathcal{B}_p^{cen}(G)) \equiv 0 \pmod{p^{n-d}}$ が成り立つ。

証明はまず $\tilde{L}_G(\mathcal{B}_p^{cen}(G))$ が $\mathcal{X}$-projective であることと先に述べた H-projective の性質から次元 $\dim(\tilde{L}_G(\mathcal{B}_p^{cen}(G)))$ が p^{n-d} で割り切れる。さらに定義から明らかに $\tilde{\chi}(\mathcal{B}_p^{cen}(G))$ と $\tilde{L}_G(\mathcal{B}_p^{cen}(G))$ の次元は等しいので Corollary 1 が成立する。個人的には前節で示した“期待される定理”の“気持ち”が充分伝わるものになっている。ところで Theorem 1 の中で出て来た p-subgroup の族 $\mathcal{X}$ はそれ自身何か表現論的な意味あるいはトポロジカルな意味を持っているのであろうか。今後の研究課題である。

最後に Corollary 1 で出て来た値 d をもっと G の local な情報から決められないかと言うことを考える。ピッタリその d でなくても d に近い値を local な情報から求めたい。そこで次のような状況を設定する。non-centric p-radical U に対してその正規化群 $G_U := N_G(U)$ を G_U の位数 p の部分群全体の集合の上に作用させる。そして $\{\langle z_{U,1}\rangle, \ldots, \langle z_{U,l}\rangle, \langle z_{U,l+1}\rangle, \ldots, \langle z_{U,m}\rangle\}$ をその軌道の完全代表系とし、添え字の付け方は次に従うものとする。

$$(\mathcal{B}_p^{cen}(G)_{>U})^{\langle z_{U,i}\rangle} = \begin{cases} \text{contractible} & 1 \leq i \leq l \\ \text{non-contractible} & l \leq i \leq m \end{cases}$$

そこで G_U の p-subgroup R_U を次のように定義する。即ち R_U から位数 p の勝手な部分群を取ってくるとそれはある $\langle z_{U,i}\rangle$ $(l+1 \leq i \leq m)$ と G_U-共役になっている。さらにそのようなものの中で最大位数のものを R_U と定義するのである。この時次が成り立つ。

Corollary 2 有限群 G に対して p^n を G の *p-Sylow subgroup* の位数とし p^d を位数 $|R_U|$ の中で最大のものとする。ここで U *non-centric p-radical subgroup* 全体を動き R_U は先に定義した G_U の部分群とする。この時 $\tilde{\chi}(\mathcal{B}_p^{cen}(G)) \equiv 0 \pmod{p^{n-d}}$ が成り立つ。

これも“期待される定理”の“気持ち”が充分伝わるものになっている。恐らく最終的にはこの d をほぼ non-centric p-radical subgroup の最大位数にまで落とせると思っている。今後の研究課題である。またここでは $\mathcal{B}_p(G)$ と $\mathcal{B}_p^{cen}(G)$ に限って話しを進めてきたが、実はある特殊な仮定の下でこれを含む一般論を展開することが出来る。詳しくは [7] を参照されたい。

最後に「有限群の部分群複体」というのは 3 節の最後にもコメントしたようにまだ新しい領域になっている。それは有限群論を基盤とした表現論やトポロジーの話しである。多くの方々に興味を持ってもらえることを期待している。

References

[1] M. Aschbacher and S.D Smith, On Quillen's conjecture for the p-groups complex, *Ann. Math.* **137** (1993), 473–529.

[2] C. Broto, R. Levi, and B. Oliver, The theory of p-local groups: A survey, preprint.

[3] D. Quillen, Homotopy properties of the poset of nontrivial p-subgroups of a group, *Adv. Math.* **28** (1978), 101–128.

[4] M. Sawabe, 2-radical subgroups of the Conway simple group Co_1, *J. Algebra* **211** (1999), 115–133.

[5] M. Sawabe, On a p-local geometry associated with a complex of non-trivial p-subgroups, *Bull. London Math. Soc.* **35**, no.2, (2003), 196–202.

[6] M. Sawabe, Homotopy equivalence for the centric 2-radical complex of the Monster, preprint.

[7] M. Sawabe, On the reduced Lefschetz module and the centric p-radical subgroups, preprint.

[8] S.D. Smith and S. Yoshiara, Some homotopy equivalences for sporadic geometries, *J. Algebra* **192** (1997), 326–379.

[9] S. Yoshiara, Radical 2-subgroups of the Monster and Baby Monter, preprint.