L^r-Helmholtz-Weyl decomposition in 3D exterior domains

小薗　英雄
早稲田大学理工学術院基幹理工学部・東北大学数理科学連携研究センター
Waseda University & Tohoku University

1　序

本稿の内容は，Matthias Hieber 氏，Anton Seyfert 氏（Darmstadt 工科大学），清水扇丈氏（京都大学），柳澤卓氏（奈良女子大学）との共同研究に基づくものである（[2],[3], [4]）．

本稿では，3 次元 Euclid 空間におけるコンパクトな滑らかな境界をもつ外部領域における r 乗可積分であるベクトル場の Helmholtz-Weyl 型直和分解について考察する．境界のあるコンパクト Riemann 多様体上の滑らかな p 次微分形式の de Rham-Hodge-Kodaira 分解については，よく知られている (例えば，Morrey [9, Chapter 7]). しかし，ベクトル場を滑らかなではない L^r-空間まで拡張すると，対応する直和分解定理が得られたのは比較的最近である（Fujiwara-Morimoto [1], Solonnikov [15]）．ベクトル場は 1 次微分形式と同一視できるが，3 次元 Riemann 多様体に関しては，Hodge の $*$-作用素によって 2 次微分形式もベクトル場と対応がつくので，3 次元空間ではベクトル場の構造が p 次微分形式を支配すると言える．そこで，ここでは最も基本的な $\mathbb{R}^3$ における外部領域 Ω 上の L^r-ベクトル場 $\boldsymbol{u}$ の Helmholtz-Weyl 型直和分解を考える．その際まず第一に，調和ベクトル場，すなわち div $\boldsymbol{u} = 0$, rot $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ を満たす $\boldsymbol{u}$ の構造を決定しなければならない．$\boldsymbol{u}$ の Ω の境界 $\partial\Omega$ における条件は，$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nu}|_{\partial\Omega} = 0$ または，$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\nu}|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{0}$ の 2 種類である．ここで，$\boldsymbol{\nu}$ は $\partial\Omega$ 上の単位外向き法線ベクトルである．Ω が内部領域の場合，これらの調和ベクトル場の次元は有限次元であることが知られている．この事実は，有界領域における楕円型境界値問題の核空間が有限次元であることに起因するが，非コンパクトである外部領域においては，決して自明なことではない．またさらに，その次元数は，Betti 数と呼ばれる Ω の位相幾何学的な不変量によって特徴づけられる．外部領域において対応する結果は，筆者の知る限り得られていない．

さて Ω 上のベクトル場 $\boldsymbol{u}$ の Helmholtz-Weyl 型直和分解とは，その調和部分 $\boldsymbol{h}$, ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{w}$, スカラーポテンシャル p を次の等式を満たす様に選ぶことに他ならない．

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{h} + \mathrm{rot}\ \boldsymbol{w} + \nabla p. \tag{1.1}$$

調和部分 $\boldsymbol{h}$ が $\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{\nu}|_{\partial\Omega} = 0$ なる境界条件を満たすとき，スカラーポテンシャル p は，Simader-Sohr [13] によって div $\boldsymbol{u}$ を与えられた質量とする Poisson 方程式の Neumann 境界値問題の弱解を求めることと同値であることが明らかにれた．一方，$\boldsymbol{h}$ がいまひとつの境界条件 $\boldsymbol{h}\times\boldsymbol{\nu}|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{0}$ を満たすとき，スカラーポテンシャル p は，対応する Dirichlet 境界値問題の弱解を求めることとな

る．両者は内部領域においては，すべの $1 < r < \infty$ について一意的に可解であるが，外部領域においては，Dirichlet 境界値問題の弱解の一意存在のための必要十分条件は，$3/2 < r < 3$ である（Simader-Sohr [12]）．この事実は,外部領域における調和ベクトル場のなす空間の次元数が，内部領域とは異なり可積分指数 r に依存することと密接に関係している．同様にベクトルポテンシャル $\boldsymbol{w}$ は，rot $\boldsymbol{u}$ を与えられたデータとして，ある連立系楕円型境界値問題の弱解を L^r 空間で求めることに帰着される．この連立系楕円型境界値問題の核空間が将に調和ベクトル場であり，その可解性は内部問題の場合，Fredholm の択一定理が適用出来る．しかし，外部領域に対しては，コンパクト作用素の Riesz-Schauder 理論が適用できないので困難さを生じる．

2　調和 L^r ベクトル場の特徴付け

本節では，$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ をコンパクトで滑らかな曲面 $\partial\Omega$ を境界に持つ外部領域とする. 境界条件に応じて調和 L^r-ベクトル場を次のように定める.

$$X^r_{\mathrm{har}}(\Omega) := \{\boldsymbol{h} \in L^r(\Omega) : \mathrm{div}\ \boldsymbol{h} = 0,\ \mathrm{rot}\ \boldsymbol{h} = 0 \quad \text{in } \Omega,\ \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{\nu}|_{\partial\Omega} = 0\}, \tag{2.1}$$

$$V^r_{\mathrm{har}}(\Omega) := \{\boldsymbol{h} \in L^r(\Omega) : \mathrm{div}\ \boldsymbol{h} = 0,\ \mathrm{rot}\ \boldsymbol{h} = \boldsymbol{0} \quad \text{in } \Omega,\ \boldsymbol{h} \times \boldsymbol{\nu}|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{0}\}. \tag{2.2}$$

$X^r_{\mathrm{har}}(\Omega)$ と $V^r_{\mathrm{har}}(\Omega)$ の空間次元に対し次が成り立つ.

定理 2.1 *([3, Theorem 2.1])* Ω を滑らかな境界をもつ $\mathbb{R}^3$ の外部領域とし，$1 < r < \infty$ とする. (2.1) と (2.2) で定義される $X^r_{har}(\Omega)$ と $V^r_{har}(\Omega)$ は共に有限次元ベクトル空間である.

有界領域の場合と同様に，外部領域においても，Ω が更に以下の仮定を満たすとき, 位相幾何学的不変量で $X^r_{\mathrm{har}}(\Omega)$ と $V^r_{\mathrm{har}}(\Omega)$ の空間次元を明示的に与えることができる.

仮定 2.1 (i) 互い交わらない L 個の滑らかなコンパクトな曲面 $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_L$ が存在して, Ω の境界 $\partial\Omega$ は

$$\partial\Omega = \bigcup_{j=1}^{L} \Gamma_j.$$

と書ける．

(ii) 各 $j \in \{1, \ldots, L\}$ に対して，互い交わらない $N(j)$ 個の滑らかな曲面 $\Sigma_1^{(j)}, \ldots, \Sigma_{N(j)}^{(j)}$ が存在して, すべての $k \in \{1, \ldots, N(j)\}$ に対し $\Sigma_k^{(j)}$ は Γ_j に横断的に交わり, かつ

$$\dot{\Omega} := \bigcap_{j=1}^{L} \left(\Omega \setminus \bigcup_{k=1}^{N(j)} \Sigma_k^{(j)} \right)$$

は単連結である.

(iii) 各 $j \in 1, \ldots, L$ に対して，$N(j)$ 個の有界で滑らかな境界を持つ $\mathbb{R}^3$ 内の開曲面 $S_1^{(j)}, \ldots, S_{N(j)}^{(j)}$ と $N(j)$ 個の関数 $h_1^{(j)}, \ldots, h_{N(j)}^{(j)} \in C^{0,1}(D) \cap C^\infty(D \setminus \bar{D}_0)$ が存在して，以下を満たす．ただし，

$D_0 \subsetneq D \subset \mathbb{R}^2$ は，各 $j = 1, \dots, L$ とは無関係な円盤である．

$$\begin{aligned} S_k^{(j)} \cap S_l^{(j)} &= \emptyset, \\ \Sigma_k^{(j)} \subsetneq S_k^{(j)} &\subset \left(\Gamma_j \cup \Sigma_k^{(j)}\right), \\ \left(\Gamma_j \cup \Sigma_k^{(j)}\right) \cap S_k^{(j)} &= \{x = (x', x_3) \in \mathbb{R}^3; x' \in D, x_3 = h_k^{(j)}(x')\}, \\ \Sigma_k^{(j)} &= \{x = (x', x_3) \in \mathbb{R}^3; x_3 = h_k^{(j)}(x'), x' \in D_0\}, \\ B_j \cap \{(x', x_3) \in \mathbb{R}^3; x_3 &> h_k^{(j)}(x'),\ x' \in D\} \subset \Omega \end{aligned}$$

をすべての $k, l \in \{1, \dots, N(j)\}$ に対して満たす．ここで，$\{B_j\}_{j=1}^L$ は $\mathbb{R}^3$ における互いに交わらない L 個の閉球の族で，各 $j \in 1, \dots, L$ に対して $\Gamma_j \subset B_j$ を満たすものである．

定理 2.2 *([3, Theorem 2.2])* Ω を仮定 *2.1* を満たす $\mathbb{R}^3$ の外部領域とする．次が成り立つ*:*

(i) すべての $1 < r < \infty$ に対して，$\dim X_{har}^r(\Omega) = N := \sum_{j=1}^L N(j)$.

(ii) $3/2 < r < \infty$ のとき, $\dim V_{har}^r(\Omega) = L$.

(iii) $1 < r \le 3/2$ のとき, $\dim V_{har}^r(\Omega) = L - 1$.

注意 2.1 (i) 定理 *2.2* と有界領域の結果 *[6, Theorem 2.4]* と比較すると，$X_{har}^r(\Omega)$ の空間次元は有界領域と外部領域の場合では，境界をなす曲面の種数の総和 N による類似性が伺える．

(ii) 一方，$V_{har}^r(\Omega)$ の空間次元は有界領域と外部領域の場合では異なる．実際，外部領域の場合，$V_{har}^r(\Omega)$ で現れる閾値 $r = 3/2$ は，後述の定理 *4.3* で見るように外部領域における *Laplace* 方程式の *Diriclet* 境界値問題の可解性の臨界値である．

定理 2.2 に関しては, Laplace 方程式の Neumann 境界値問題および Dirichlet 境界値問題を解くことによって，それぞれ $X_{\mathrm{har}}^r(\Omega)$, $V_{\mathrm{har}}^r(\Omega)$ の基底を構成する．特に Dirichlet 境界値問題の解は，Γ_j $(j = 1, \dots, L)$ 上に密度をもつ L 個の一重層ポテンシャルによって構成されるが，それらの無限遠方の挙動を $L^r(\Omega)$ で考察することによって，$r = 3/2$ を閾値として一次独立性が異なることが分かる．

3　L^r-Helmholtz-Weyl 分解定理

最初に幾つかの関数空間を導入する．$\dot{H}^{1,r}(\Omega)$ と $\dot{H}_0^{1,r}(\Omega)$ を

$$\dot{H}^{1,r}(\Omega) \equiv \{[\boldsymbol{u}]; \boldsymbol{u} \in L_{\mathrm{loc}}^r(\bar{\Omega}), \nabla \boldsymbol{u} \in L^r(\Omega)\}, \quad \dot{H}_0^{1,r}(\Omega) \equiv \{\boldsymbol{u} \in \dot{H}^{1,r}(\Omega); \boldsymbol{u}|_{\partial\Omega} = 0\} \tag{3.1}$$

と定義する．ここで $[\boldsymbol{u}]$ は $\boldsymbol{u}$ の定数を法とする同値類を表す．$\dot{H}^{1,r}(\Omega)$ と $\dot{H}_0^{1,r}(\Omega)$ はノルム $\|\boldsymbol{u}\|_{\dot{H}^{1,r}} \equiv \|\nabla \boldsymbol{u}\|_{L^r}$ によって Banach 空間となる．$\widehat{H}_0^{1,r}(\Omega)$ をノルム $\|\nabla \boldsymbol{u}\|_{L^r}$ による $C_0^\infty(\Omega)$ の完備化とする．定義から明らかに $\widehat{H}^{1,r}(\Omega) \subset \dot{H}^{1,r}(\Omega)$ がすべての $1 < r < \infty$ について成り立つ．また, $r = 3$

を閾値として 2 つの関数空間 $\dot{H}_0^{1,r}(\Omega)$ と $\widehat{H}_0^{1,r}(\Omega)$ は異なるが, この差異が分解定理に相応の影響を及ぼす．さらに, 空間 $\dot{X}^r(\Omega)$, $\dot{V}^r(\Omega)$, $\dot{X}^r_\sigma(\Omega)$, $\dot{V}^r_\sigma(\Omega)$ を

$$\dot{X}^r(\Omega) \equiv \{\boldsymbol{u} \in \dot{H}^{1,r}(\Omega);\, \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nu}|_{\partial\Omega} = 0\}, \quad \dot{V}^r(\Omega) \equiv \{\boldsymbol{u} \in \dot{H}^{1,r}(\Omega);\, \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\nu}|_{\partial\Omega} = 0\},$$
$$\dot{X}^r_\sigma(\Omega) \equiv \{\boldsymbol{u} \in \dot{X}^r(\Omega);\, \mathrm{div}\ \boldsymbol{u} = 0\}, \quad \dot{V}^r_\sigma(\Omega) \equiv \{\boldsymbol{u} \in \dot{V}^r(\Omega);\, \mathrm{div}\ \boldsymbol{u} = 0\}$$

で定める．ただし，$\boldsymbol{\nu}$ は $\partial\Omega$ 上の単位外向き法線ベクトルである．ここで，$\dot{X}^r(\Omega)$, $\dot{V}^r(\Omega)$ は共にノルム $\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^r}$ によって Banach 空間となる．実際，$\boldsymbol{u} \in \dot{X}^r(\Omega)$ が $\boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{c}$, $\forall x \in \Omega$ ($\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ は定ベクトル) を満たせば，$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ であることに注意すればよい．$\boldsymbol{u} \in \dot{V}^r(\Omega)$ に対しても同様である．

調和部分を $X^r_{\mathrm{har}}(\Omega)$ に選ぶ分解定理は次で与えられる．

定理 3.1 Ω を滑らかな境界を持つ $\mathbb{R}^3$ の外部領域とし，$1 < r < \infty$ とする．任意の $\boldsymbol{u} \in L^r(\Omega)$ に対し, $\boldsymbol{h} \in X^r_{har}(\Omega)$, $\boldsymbol{w} \in \dot{V}^r_\sigma(\Omega)$ 及び $p \in \dot{H}^{1,r}(\Omega)$ が存在して

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{h} + \mathrm{rot}\ \boldsymbol{w} + \nabla p \tag{3.2}$$

と分解され, 評価式

$$\|\boldsymbol{h}\|_{L^r} + \|\nabla\boldsymbol{w}\|_{L^r} + \|\nabla p\|_{L^r} \le C\|\boldsymbol{u}\|_{L^r} \tag{3.3}$$

を満たす．ここで $C = C(\Omega, r)$ は正定数である．分解 (3.2) は次の意味で一意的である．すなわち，$\boldsymbol{u}$ が別の分解

$$\boldsymbol{u} = \widetilde{\boldsymbol{h}} + \mathrm{rot}\ \widetilde{\boldsymbol{w}} + \nabla\widetilde{p} \tag{3.4}$$

をある $\widetilde{\boldsymbol{h}} \in X^r_{har}(\Omega)$, $\widetilde{\boldsymbol{w}} \in \dot{V}^r_\sigma(\Omega)$ 及び $\widetilde{p} \in \dot{H}^{1,r}(\Omega)$ に対して持つならば,

$$\boldsymbol{h} = \widetilde{\boldsymbol{h}}, \quad \mathrm{rot}\ \boldsymbol{w} = \mathrm{rot}\ \widetilde{\boldsymbol{w}}, \quad \nabla p = \nabla\widetilde{p} \tag{3.5}$$

が成り立つ．

注意 3.1 (i) 定理 3.1 より

$$L^r(\Omega) = X^r_{\mathrm{har}}(\Omega) \oplus \mathrm{rot}\ \dot{V}^r_\sigma(\Omega) \oplus \dot{H}^{1,r}(\Omega), \quad 1 < r < \infty \quad (\text{直和分解})$$

が成り立つ．$L^r_\sigma(\Omega) = \{\boldsymbol{v} \in L^2(\Omega); \mathrm{div}\ \boldsymbol{v} = 0, \boldsymbol{v}\cdot\nu|_{\partial\Omega} = 0\}$ とおけば，$\boldsymbol{H}^r(\Omega) \equiv L^r_\sigma(\Omega)/\mathrm{rot}\ \dot{V}^r_\sigma(\Omega)$ は Ω の 1 次元コホモロジー群と見なせる．上の直和分解から，同型対応 $\boldsymbol{H}^r(\Omega) \cong X^r_{\mathrm{har}}(\Omega)$ が得られる．これは，外部領域における Hodge の定理の一般化と言える．

定理 3.1 は有界領域の場合の結果 [6, Theorem 2.1 (2)] に対応し, 双方に類似性がみられる．一方, 調和部分を $V^r_{\mathrm{har}}(\Omega)$ に選んだ場合のベクトル場の分解は次の定理で与えられるが, その結果は対応する [6, Theorem 2.1 (3)] とは著しく異なる．

定理 3.2 Ω を滑らかな境界を持つ $\mathbb{R}^3$ の外部領域とする．
(i) $1 < r \leq 3/2$ の場合．任意の $\boldsymbol{u} \in L^r(\Omega)$ に対して，$\boldsymbol{h} \in V^r_{har}(\Omega)$，$\boldsymbol{w} \in \dot{X}^r_\sigma(\Omega)$ 及び $p \in \dot{H}^{1,r}_0(\Omega)$ が存在して

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{h} + \mathrm{rot}\ \boldsymbol{w} + \nabla p \tag{3.6}$$

と分解され，評価式

$$\|\boldsymbol{h}\|_{L^r} + \|\nabla \boldsymbol{w}\|_{L^r} + \|\nabla p\|_{L^r} \leq C\|\boldsymbol{u}\|_{L^r} \tag{3.7}$$

を満たす．ここで $C = C(\Omega, r)$ は正定数である．分解 (3.6) は次の意味で一意的である．すなわち，$\boldsymbol{u}$ が別の分解

$$\boldsymbol{u} = \widetilde{\boldsymbol{h}} + \mathrm{rot}\ \widetilde{\boldsymbol{w}} + \nabla \widetilde{p} \tag{3.8}$$

をある $\widetilde{\boldsymbol{h}} \in V^r_{har}(\Omega)$，$\widetilde{\boldsymbol{w}} \in \dot{X}^r_\sigma(\Omega)$ 及び $\widetilde{p} \in \dot{H}^{1,r}_0(\Omega)$ に対して持つならば，

$$\boldsymbol{h} = \widetilde{\boldsymbol{h}}, \quad \mathrm{rot}\ \boldsymbol{w} = \mathrm{rot}\ \widetilde{\boldsymbol{w}}, \quad \nabla p = \nabla \widetilde{p}. \tag{3.9}$$

が成り立つ．
(ii) $3/2 < r < 3$ の場合．任意の $\boldsymbol{u} \in L^r(\Omega)$ に対して，$\boldsymbol{h} \in V^r_{har}(\Omega)$，$\boldsymbol{w} \in \dot{X}^r_\sigma(\Omega)$ 及び $p \in \widehat{H}^{1,r}_0(\Omega)$ が存在して，$\boldsymbol{u}$ は (3.6) の形に分解され評価式 (3.7) を満たす．この分解 (3.6) は次の意味で一意的である．すなわち，u が (3.8) の別の分解をある $\widetilde{\boldsymbol{h}} \in V^r_{har}(\Omega)$，$\widetilde{\boldsymbol{w}} \in \dot{X}^r_\sigma(\Omega)$ 及び $\widetilde{p} \in \widehat{H}^{1,r}_0(\Omega)$ に対して持つとすると，(3.9) が成立する．
(iii) $3 \leq r < \infty$ の場合．任意の $\boldsymbol{u} \in L^r(\Omega)$ に対して，$\boldsymbol{h} \in V^r_{har}(\Omega)$，$\boldsymbol{w} \in \dot{X}^r_\sigma(\Omega)$ 及び $p \in \dot{H}^{1,r}_0(\Omega)$ が存在して，$\boldsymbol{u}$ は (3.6) の形に分解され評価式 (3.7) を満たす．この分解 (3.6) は次の意味で一意的である．すなわち，$\boldsymbol{u}$ が (3.8) の別の分解をある $\widetilde{\boldsymbol{h}} \in V^r_{har}(\Omega)$，$\widetilde{\boldsymbol{w}} \in \dot{X}^r_\sigma(\Omega)$ 及び $\widetilde{p} \in \dot{H}^{1,r}_0(\Omega)$ に対して持つとすると，

$$\boldsymbol{h} - \widetilde{\boldsymbol{h}} = \lambda \nabla q_0, \quad \mathrm{rot}\ \boldsymbol{w} = \mathrm{rot}\ \widetilde{\boldsymbol{w}}, \quad p - \widetilde{p} = \lambda q_0 \tag{3.10}$$

がある $\lambda \in \mathbb{R}$ に対し成り立つ．ここで q_0 は，$q_0 \in \bigcap_{q \geq 3} \dot{H}^{1,q}_0(\Omega)$ かつ $\nabla q_0 \in \bigcap_{s > 3/2} L^s(\Omega)$ であり，$|x| \to \infty$ のとき $q_0(x) \to 1$ を満たす Ω 上の調和関数である．

注意 3.2 (i) 定理 *3.2* の $1 < r \leq 3/2$ の場合は，スカラーポテンシャル p を $\dot{H}^{1,r}_0(\Omega)$ に取らなければならない．実際，分解 (3.6) において $p \in \widehat{H}^{1,r}_0(\Omega)$ とは取れない $\boldsymbol{u} \in L^r(\Omega)$ が存在する．他方，$3/2 < r < 3$ の場合には，(3.6) における p をより狭い空間 $\widehat{H}^{1,r}_0(\Omega)$ に取ることができる．このことは，分解の一意性 *(3.9)* のために本質的である．$1 < r < 3$ の場合には，$\widehat{H}^{1,r}_0(\Omega) \subset \dot{H}^{1,r}_0(\Omega)$，かつ $\widehat{H}^{1,r}_0(\Omega) \neq \dot{H}^{1,r}_0(\Omega)$ であることに注意する．定理 *2.2* から，$1 < r \leq 3/2$ のとき，$V^r_{\mathrm{har}}(\Omega)$ は $\dim V^r_{\mathrm{har}}(\Omega) = L - 1$ であり，$3/2 < r < \infty$ のときの事実 $\dim V^r_{\mathrm{har}}(\Omega) = L$ と比較すると，*1* 次元痩せた空間である．その欠損を補填する意味で，スカラーポテンシャル p をより広い空間 $\dot{H}^{1,r}_0(\Omega)$ から選ぶことによって直和分解 *(3.6)* を実現していると見なせる．$3 \leqq r < \infty$ の場合は，$\widehat{H}^{1,r}_0(\Omega) = \dot{H}^{1,r}_0(\Omega)$ である *(*命題 *4.1)*.

(ii) $L^r_\tau(\Omega) \equiv \{\boldsymbol{v} \in L^r(\Omega); \mathrm{rot}\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\nu}|_{\partial\Omega} = 0\}$ とおき，いまひつの Ω の *1* 次元コホモロジー群 $\widetilde{\boldsymbol{H}}^r(\Omega)$ を

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}^r(\Omega) \equiv \begin{cases} L^r_\tau(\Omega)/\{\nabla p; p \in \dot{H}^{1,r}_0(\Omega)\} & 1 < r \leq 3/2 \text{ のとき}, \\ L^r_\tau(\Omega)/\{\nabla p; p \in \widehat{H}^{1,r}_0(\Omega)\} & 3/2 < r < 3 \text{ のとき} \end{cases}$$

により定義する．このとき定理 *3.2(i),(ii)* から，同型対応 $\widetilde{\boldsymbol{H}}^r(\Omega) \cong V^r_{har}(\Omega)$ が $1 < r < 3$ のとき成り立つ．これも外部領域におけるコホモロジー群の調和ベクトル場による表現と見なせる．

(iii) 定理 *3.2* の $3 \leq r < \infty$ の場合には, 調和部分 $\boldsymbol{h}$ とスカラーポテンシャル p は Ω 上の調和関数 q_0 を法として一意的である．この点は有界領域における分解定理の一意性と大きく異なる．

(iii) $\boldsymbol{u} \in H^{m,r}(\Omega)$, $m = 1, 2, \cdots$ であるとき, 分解 (3.2) 及び (3.6) において, $\boldsymbol{w}$ と p がさらなる正則性 $\boldsymbol{w} \in H^{m+1,r}(\Omega)$, $p \in H^{m+1,r}(\Omega)$ を持つかどうかは興味ある問題である．実際，Ω が有界領域の場合には対応する結果が成り立つ *([6, Theorem 2.4])*.

4　定理 3.1, 3.2 の証明の概略

4.1　一般化された Laplace 作用素

命題 4.1 *(Simader-Sohr [12, (7.6)], Kozono-Sohr [5, Lemma 2.2])* Ω を滑らかな境界を持つ $\mathbb{R}^3$ の外部領域とする．

(i) $1 < r < 3$ とする．

$$\widehat{H}^{1,r}_0(\Omega) = \{\boldsymbol{u} \in \dot{H}^{1,r}_0(\Omega); \boldsymbol{u} \in L^{r_*}(\Omega)\}. \tag{4.1}$$

が成り立つ．ここで，r_* は $1/r_* = 1/r - 1/3$ によって定まる指数である．

(ii) $3 \leqq r < \infty$ とする．このとき，$\widehat{H}^{1,r}_0(\Omega) = \dot{H}^{1,r}_0(\Omega)$ が成り立つ．さらに $\dot{H}^{1,r}_0(\Omega)$ の閉部分空間 $\widetilde{H}^{1,r}_0(\Omega)$ が存在して

$$\dot{H}^{1,r}_0(\Omega) = \widetilde{H}^{1,r}_0(\Omega) \oplus \{\lambda q_0; \lambda \in \mathbb{R}\} \tag{4.2}$$

が成り立つ．ここで, q_0 は Ω 上の調和関数で, $|x| \to \infty$ のとき $q_0(x) \to 1$ を満たす．更に, $q_0 \in \bigcap_{q \geq 3} \dot{H}^{1,q}_0(\Omega)$, かつ $\nabla q_0 \in \bigcap_{s > 3/2} L^s(\Omega)$ である．

$1 < r < \infty$ に対して，一般化された Laplace 作用素 $-\Delta_r : \widehat{H}^{1,r}_0(\Omega) \to \widehat{H}^{1,r'}_0(\Omega)^*$ を次で定義する:

$$\langle -\Delta_r p, \phi \rangle \equiv (\nabla p, \nabla \phi), \qquad p \in \widehat{H}^{1,r}_0(\Omega), \phi \in \widehat{H}^{1,r'}_0(\Omega). \tag{4.3}$$

ここで, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\widehat{H}^{1,r'}_0(\Omega)^*$ と $\widehat{H}^{1,r'}_0(\Omega)$ の双対組である．

一般化された Laplace 作用素 $-\Delta_r$ の核 $\mathrm{Ker}(-\Delta_r)$ と値域 $\mathrm{R}(-\Delta_r)$ に対して次が成り立つ．

命題 4.2 *(Simader-Sohr [12, Theorem 7.2], Kozono-Sohr [5, Corollary 3.4])*
(i) すべての $1 < r < \infty$ に対して，$Ker(-\Delta_r)$ は有限次元ベクトル空間であり，$R(-\Delta_r)$ は $\widehat{H}_0^{1,r'}(\Omega)^*$ における閉部分空間である.
(ii) $1 < r < 3$ に対して, $Ker(-\Delta_r) = \{0\}$.
(iii) $3/2 < r < \infty$ に対して, $R(-\Delta_r) = \widehat{H}_0^{1,r'}(\Omega)^*$.
(iv) $3 \leqq r < \infty$ に対して, $Ker(-\Delta_r) = \{\lambda q_0; \lambda \in \mathbb{R}\}$.

命題 4.2 と閉値域定理より, $1 < r \leqq 3/2$ のとき, $f \in \widehat{H}_0^{1,r'}(\Omega)^*$ に対して

$$(\nabla p, \nabla \phi) = \langle f, \phi \rangle, \qquad \forall \phi \in \widehat{H}_0^{1,r'}(\Omega) \tag{4.4}$$

を満たす一意な $p \in \widehat{H}_0^{1,r}(\Omega)$ が存在することと, f が直交条件 $\langle f, q_0 \rangle = 0$ を満たすことは必要十分である．他方, $3/2 < r < \infty$ の場合には, 任意の $f \in \widehat{H}_0^{1,r'}(\Omega)^*$ に対して, f に対する直交条件を課すことなく $p \in \widehat{H}_0^{1,r}(\Omega)$ は存在するが, 一意性は $3/2 < r < 3$ のときにのみ成り立つ．しかし, $1 < r \leqq 3/2$ の場合には, f が直交条件を満たさなくても, (4.4) における試験関数 ϕ の空間を $\widehat{H}_0^{1,r'}(\Omega) = \dot{H}_0^{1,r'}(\Omega)$ から，(4.2) によって定まるより狭い $\widetilde{H}_0^{1,r'}(\Omega)$ に置き換えると次の様な制限された意味での一意存在の結果が得られる.

補題 4.1 *(Simader-Sohr [12, Theorem 7.3])* $1 < r \leqq 3/2$, Ω を滑らかな境界を持つ $\mathbb{R}^3$ の外部領域, $\widetilde{H}_0^{1,r'}(\Omega)$ を (4.2) で r を $3 \leq r' < \infty$ に置き換えた空間とする．このとき, 任意の $g \in \widetilde{H}_0^{1,r'}(\Omega)^*$ に対して,

$$(\nabla q, \nabla \psi) = \langle g, \psi \rangle, \qquad \forall \psi \in \widetilde{H}_0^{1,r'}(\Omega)$$

を満たす一意な $q \in \widehat{H}_0^{1,r}(\Omega)$ が存在する．ここで $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\widetilde{H}_0^{1,r'}(\Omega)^*$ と $\widetilde{H}_0^{1,r'}(\Omega)$ の双対組である. さらに q は次の評価式を満たす:

$$\|\nabla q\|_{L^r} \leq C \|g\|_{\widetilde{H}_0^{1,r'}(\Omega)^*}$$

ここで，$C = C(\Omega, r)$ は正定数である.

4.2　ベクトルポテンシャルの構成

(3.2) 及び (3.6) で与えられるベクトルポテンシャル $\boldsymbol{w}$ は, 次の定理 4.1 を示すことで得られる.

定理 4.1 Ω を滑らかな境界を持つ $\mathbb{R}^3$ の外部領域とし，$1 < r < \infty$ とする.
(i) 任意の $\boldsymbol{u} \in L^r(\Omega)$ に対し

$$(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{w}, \mathrm{rot}\ \boldsymbol{\Phi}) = (\boldsymbol{u}, \mathrm{rot}\ \boldsymbol{\Phi}), \quad \forall \boldsymbol{\Phi} \in \dot{X}^{r'}(\Omega) \tag{4.5}$$

を満たす $\boldsymbol{w} \in \dot{X}_\sigma^r(\Omega)$ が存在し, 次の評価式を満たす:

$$\|\nabla \boldsymbol{w}\|_{L^r} \leq C \|\boldsymbol{u}\|_{L^r}. \tag{4.6}$$

ここで，$C = C(\Omega, r)$ は正定数である．

(ii) 任意の $\boldsymbol{u} \in L^r(\Omega)$ に対し

$$(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{w}, \mathrm{rot}\ \boldsymbol{\Psi}) = (u, \mathrm{rot}\ \boldsymbol{\Psi}), \quad \forall \boldsymbol{\Psi} \in \dot{V}^{r'}(\Omega) \tag{4.7}$$

を満たす $\boldsymbol{w} \in \dot{V}^r_\sigma(\Omega)$ が存在し, 次の評価式を満たす:

$$\|\nabla \boldsymbol{w}\|_{L^r} \le C\|\boldsymbol{u}\|_{L^r}. \tag{4.8}$$

ここで，$C = C(\Omega, r)$ は正定数である．

4.3　スカラーポテンシャルの構成

まず, 定理 3.1 の (3.2) で与えられるスカラーポテンシャル $p \in \dot{H}^{1,r}(\Omega)$ を, Poission 方程式に対する Neumann 境界値問題の弱解として求める.

定理 4.2 (Poission 方程式に対する弱 Neumann 問題) *(Simader-Sohr [13, Theorem 1.4])*
Ω を滑らかな境界を持つ $\mathbb{R}^3$ の外部領域とし，$1 < r < \infty$ とする．任意の $\boldsymbol{u} \in L^r(\Omega)$ に対して,

$$(\nabla p, \nabla \psi) = (\boldsymbol{u}, \nabla \psi), \qquad \forall \psi \in \dot{H}^{1,r'}(\Omega) \tag{4.9}$$

を満たす一意的な $p \in \dot{H}^{1,r}(\Omega)$ が存在して, 次の評価式を満たす.

$$\|\nabla p\|_{L^r} \le C\|\boldsymbol{u}\|_{L^r}.$$

ここで，$C = C(\Omega, r, R)$ は正定数である．

次に, 定理 3.2 の (3.6) で与えられるスカラーポテンシャル p を構成する．(4.9) の p とは異なり, (4.3) で定義した一般化された Laplace 作用素 $-\Delta_r : \widehat{H}^{1,r}_0(\Omega) \to \widehat{H}^{1,r'}_0(\Omega)^*$ に対する, Poission 方程式の Dirichlet 境界値問題の弱解の考察に基づく．定理 4.2 で示された弱 Neumann 問題はすべての $1 < r < \infty$ に対し一意可解であるが, 弱 Dirichlet 問題の可解性は r に依存して異なる.

定理 4.3 (Poission 方程式に対する弱 Dirichlet 問題) Ω を滑らかな境界を持つ $\mathbb{R}^3$ の外部領域とする.

(i) $1 < r \le 3/2$ の場合．任意の $\boldsymbol{u} \in L^r(\Omega)$ に対して,

$$(\nabla p, \nabla \phi) = (\boldsymbol{u}, \nabla \phi), \qquad \forall \phi \in \widehat{H}^{1,r'}_0(\Omega) \tag{4.10}$$

を満たす一意的な $p \in \dot{H}^{1,r}_0(\Omega)$ が存在し, 次の評価式を満たす.

$$\|\nabla p\|_{L^r} \le C\|\boldsymbol{u}\|_{L^r}. \tag{4.11}$$

ただし，$C = C(\Omega, r, R)$ は正定数である．

(ii) $3/2 < r < 3$ の場合．任意の $\boldsymbol{u} \in L^r(\Omega)$ に対して, (4.10) を満たす一意的な $p \in \widehat{H}^{1,r}_0(\Omega)$ が存在して, 評価式 (4.11) を満たす.

(iii) $3 \le r < \infty$ の場合．任意の $\boldsymbol{u} \in L^r(\Omega)$ に対して, (4.10) を満たす一意的な $p \in \widetilde{H}^{1,r}_0(\Omega)$ が存在して, 評価式 (4.11) を満たす.

注意 4.1 命題 *4.2 (iii)* で指摘されているように, $1 < r \leq 3/2$ の場合，$-\Delta_r$ は全射とはならない．従って, より広い空間である $\dot{H}_0^{1,r}(\Omega)$ を (4.10) の可解性のための解の空間として採用する．これについては，*Simader-Sohr [14, Threorem 1.2], Prüss-Simonett [10, Theorem 7.4.3], Shibata [11, Theorem 3.2]* に詳しい．

4.4 定理 3.1 と定理 3.2 の証明

調和部分の境界条件を確認するため, $E^r_{\mathrm{div}}(\Omega)$ と $E^r_{\mathrm{rot}}(\Omega)$ を

$$
\begin{aligned}
E^r_{\mathrm{div}}(\Omega) &\equiv \{\boldsymbol{u} \in L^r(\Omega);\, \mathrm{div}\ \boldsymbol{u} \in L^r(\Omega)\}, \qquad \|\boldsymbol{u}\|_{E^r_{\mathrm{div}}} = \|\boldsymbol{u}\|_{L^r} + \|\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}\|_{L^r},\\
E^r_{\mathrm{rot}}(\Omega) &\equiv \{\boldsymbol{u} \in L^r(\Omega);\, \mathrm{rot}\ \boldsymbol{u} \in L^r(\Omega)\}, \qquad \|\boldsymbol{u}\|_{E^r_{\mathrm{rot}}} = \|\boldsymbol{u}\|_{L^r} + \|\mathrm{rot}\ \boldsymbol{u}\|_{L^r}
\end{aligned}
$$

で定義する．$E^r_{\mathrm{div}}(\Omega)$, $E^r_{\mathrm{rot}}(\Omega)$ から，それぞれ境界 $\partial\Omega$ への一般化された法線方向および接線方向のトレース作用素 $\gamma_{\boldsymbol{\nu}}$, $\tau_{\boldsymbol{\nu}}$ は，それぞ以下の様に有界線形作用素として定義される．

$$
\begin{aligned}
&\gamma_{\boldsymbol{\nu}}:\, \boldsymbol{u} \in E^r_{\mathrm{div}}(\Omega) \mapsto \gamma_{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{u} \in H^{1-\frac{1}{r'}}(\partial\Omega)^*, \quad \gamma_{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nu}|_{\partial\Omega}, \quad \boldsymbol{u} \in C_0^1(\bar{\Omega})^3,\\
&\tau_{\boldsymbol{\nu}}:\, \boldsymbol{u} \in E^r_{\mathrm{rot}}(\Omega) \mapsto \tau_{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{u} \in H^{1-\frac{1}{r'}}(\partial\Omega)^*, \quad \tau_{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\nu}|_{\partial\Omega}, \quad \boldsymbol{u} \in C_0^1(\bar{\Omega})^3.
\end{aligned}
$$

実際，一般化された Stokes の公式

$$
(\boldsymbol{u}, \nabla q) + (\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}, q) = \langle \gamma_{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{u}, \gamma_0 q\rangle_{\partial\Omega}, \qquad \boldsymbol{u} \in E^r_{\mathrm{div}}(\Omega),\ q \in \dot{H}^{1,r'}(\Omega), \tag{4.12}
$$

$$
(\boldsymbol{u}, \mathrm{rot}\ \boldsymbol{\psi}) = (\mathrm{rot}\ \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\psi}) + \langle \tau_{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{u}, \gamma_0\boldsymbol{\psi}\rangle_{\partial\Omega}, \qquad \boldsymbol{u} \in E^r_{\mathrm{rot}}(\Omega),\ \boldsymbol{\psi} \in \dot{H}^{1,r'}(\Omega) \tag{4.13}
$$

が成り立つ様に，$\gamma_{\boldsymbol{\nu}}$ 及び $\tau_{\boldsymbol{\nu}}$ が定義できる．ここで, γ_0 は通常の $\dot{H}^{1,r'}(\Omega)$ から $H^{1-\frac{1}{r'}}(\partial\Omega)$ へのトレース作用素, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\partial\Omega}$ は
$H^{1-\frac{1}{r'}}(\partial\Omega)^*$ と $H^{1-\frac{1}{r'}}(\partial\Omega)$ の双対組である．$1 < r < \infty$ に対して

$$
\begin{aligned}
X^r_{\mathrm{har}}(\Omega) &= \{\boldsymbol{h} \in E^r_{\mathrm{div}}(\Omega) \cap E^r_{\mathrm{rot}}(\Omega);\, \mathrm{div}\ \boldsymbol{h} = 0,\ \mathrm{rot}\ \boldsymbol{h} = \boldsymbol{0},\ \gamma_{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{h} = 0\},\\
V^r_{\mathrm{har}}(\Omega) &= \{\boldsymbol{h} \in E^r_{\mathrm{div}}(\Omega) \cap E^r_{\mathrm{rot}}(\Omega);\, \mathrm{div}\ \boldsymbol{h} = 0,\ \mathrm{rot}\ \boldsymbol{h} = \boldsymbol{0},\ \tau_{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{h} = \boldsymbol{0}\}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

4.4.1 定理 3.1 の証明の概略

$1 < r < \infty$ とする．$\boldsymbol{u} \in L^r(\Omega)$ に対し, 定理 4.2 の $p \in \dot{H}^{1,r}(\Omega)$ と, 定理 4.1 (ii) の $\boldsymbol{w} \in \dot{V}^r_\sigma(\Omega)$ を用いて $\boldsymbol{h} \equiv \boldsymbol{u} - \mathrm{rot}\ \boldsymbol{w} - \nabla p$ と置き, $\boldsymbol{h} \in X^r_{\mathrm{har}}(\Omega)$ を示す．明らかに $\boldsymbol{h} \in L^r(\Omega)$．(4.9), (4.13) より

$$
(\boldsymbol{h}, \nabla\psi) = (\boldsymbol{u} - \nabla p, \nabla\psi) - (\mathrm{rot}\ \boldsymbol{w}, \nabla\psi) = -(\boldsymbol{w}, \mathrm{rot}\ \nabla\psi) = 0, \qquad \forall\psi \in C_0^\infty(\Omega).
$$

が成り立つ．また (4.7) と (4.13) より

$$
(\boldsymbol{h}, \mathrm{rot}\ \boldsymbol{\Psi}) = (\boldsymbol{u} - \mathrm{rot}\ \boldsymbol{w}, \mathrm{rot}\ \boldsymbol{\Psi}) - (\nabla p, \mathrm{rot}\ \boldsymbol{\Psi}) = (p, \mathrm{div}\ \mathrm{rot}\ \boldsymbol{\Psi}) = 0, \qquad \forall\boldsymbol{\Psi} \in C_0^\infty(\Omega)^3
$$

が成り立つ．故に，Ω 上の超関数の意味で，$\mathrm{div}\ \boldsymbol{h} = 0$ と $\mathrm{rot}\ \boldsymbol{h} = 0$ を満たすことが証明された．次に境界条件 $\gamma_{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{h} = 0$ を示す．(4.9) と (4.12) より

$$0 = (\boldsymbol{u} - \nabla p, \nabla q) = \langle \gamma_{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{u} - \nabla p), \gamma_0 q\rangle_{\partial\Omega}, \qquad \forall q \in \dot{H}^{1,r'}(\Omega).$$

$\gamma_0 : \dot{H}^{1,r'}(\Omega) \to H^{1-\frac{1}{r'}}(\partial\Omega)$ は全射で，この恒等式より $\gamma_{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{u} - \nabla p) = 0$ が従う．更に，$\boldsymbol{w} \in \dot{V}^r(\Omega)$ より $\tau_{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ である．故に (4.13) から

$$(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{w}, \nabla q) = (\boldsymbol{w}, \mathrm{rot}\ \nabla q) - \langle \tau_{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{w}, \gamma_0\nabla q\rangle_{\partial\Omega} = 0, \qquad \forall q \in H^{2,r'}(\Omega)$$

を得る．$H^{2,r'}(\Omega)$ は $H^{1,r'}(\Omega)$ で稠密であるから，上式から

$$(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{w}, \nabla q) = 0, \qquad \forall q \in H^{1,r'}(\Omega)$$

が成り立つことが分かる．他方，(4.12) より

$$0 = (\mathrm{rot}\ \boldsymbol{w}, \nabla q) = -(\mathrm{div}\ \mathrm{rot}\ \boldsymbol{w}, p) + \langle \gamma_{\boldsymbol{\nu}}\mathrm{rot}\ \boldsymbol{w}, \gamma_0 q\rangle_{\partial\Omega}, \qquad \forall q \in H^{1,r'}(\Omega).$$

が成り立つ．再び γ_0 の全射性とこの恒等式より $\gamma_{\boldsymbol{\nu}}\mathrm{rot}\ \boldsymbol{w} = 0$ となり，これより $\gamma_{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{h} = 0$ を得る．表現 (3.2) の一意性については省略する．

4.4.2　定理 3.2 の証明の概略

$\boldsymbol{u} \in L^r(\Omega)$ とする．定理 4.3 より $1 < r \le 3/2$ の場合は $p \in \dot{H}^{1,r}_0(\Omega)$ に，$3/2 < r < 3$ の場合は $p \in \widehat{H}^{1,r}_0(\Omega)$ に，$3 \le r < \infty$ の場合は $p \in \widetilde{H}^{1,r}_0(\Omega)$ と取る．まず，(3.6) で定めた $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{u} - \mathrm{rot}\ \boldsymbol{w} - \nabla p$ が，$V^r_{\mathrm{har}}(\Omega)$ に属することを示す．明らかに $\boldsymbol{h} \in L^r(\Omega)$ であり，定理 3.1 の証明と同様に，超関数の意味で Ω で $\mathrm{div}\ \boldsymbol{h} = 0$ 及び $\mathrm{rot}\ \boldsymbol{h} = 0$ を満たすことがわかる．従って，境界条件 $\tau_{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{h} = \boldsymbol{0}$ を満たすことを確認すればよい．

$\gamma_0 p = 0$ であるので，(4.12) と (4.13) より

$$\langle \tau_\nu(\nabla p), \gamma_0\boldsymbol{\psi}\rangle_{\partial\Omega} = (\nabla p, \mathrm{rot}\ \boldsymbol{\psi}) = \langle \gamma_0 p, \gamma_{\boldsymbol{\nu}}(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{\psi}\rangle_{\partial\Omega} = 0, \qquad \forall \psi \in H^{1,r'}(\Omega).$$

これより

$$\tau_{\boldsymbol{\nu}}(\nabla p) = \boldsymbol{0} \tag{4.14}$$

が従う．任意の $\boldsymbol{\psi} \in H^{1,r'}(\Omega)^3$ に対し，$\dot{H}^{1,r'}(\Omega)$ において次の Poisson 方程式の弱 Neumann 問題を考える．

$$\begin{cases} \Delta q = \mathrm{div}\ \boldsymbol{\psi} & \text{in } \Omega, \\ \dfrac{\partial q}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\psi}\cdot\boldsymbol{\nu} & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

任意の $\varphi \in \dot{H}^{1,r}(\Omega)$ に対し，$(\nabla q, \nabla\varphi) = (\boldsymbol{\psi}, \nabla\varphi)$ を満たす一意解 $q \in \dot{H}^{1,r'}(\Omega)$ の存在と，$D^2 q \in L^{r'}(\Omega)^{3^2}$ は知られている．$\boldsymbol{\Phi} \equiv \boldsymbol{\psi} - \nabla q$ と定めれば，$\boldsymbol{\Phi} \in L^{r'}(\Omega)^3$, $\mathrm{div}\ \boldsymbol{\Phi} = 0$, $\mathrm{rot}\ \boldsymbol{\Phi} \in L^{r'}(\Omega)^3$, 及び

$\boldsymbol{\Phi}\cdot\boldsymbol{\nu}|_{\partial\Omega}=0$. 従って, $\boldsymbol{\Phi}\in\dot{X}^{r'}_{\sigma}(\Omega)$ である. rot $\boldsymbol{\psi}=$ rot $\boldsymbol{\Phi}$ 及び rot $(\boldsymbol{u}-$rot $\boldsymbol{w})=$ rot $(\boldsymbol{h}+\nabla p)=\mathbf{0}$ より, (4.13) と (4.5) から

$$\begin{aligned}\langle\tau_{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{u}-\mathrm{rot}\ \boldsymbol{w}),\gamma_0\boldsymbol{\psi}\rangle_{\partial\Omega} &= (\boldsymbol{u}-\mathrm{rot}\ \boldsymbol{w},\mathrm{rot}\ \boldsymbol{\psi})-(\mathrm{rot}\ (\boldsymbol{u}-\mathrm{rot}\ \boldsymbol{w}),\boldsymbol{\psi})\\ &= (\boldsymbol{u}-\mathrm{rot}\ \boldsymbol{w},\mathrm{rot}\ \boldsymbol{\psi})\\ &= (\boldsymbol{u}-\mathrm{rot}\ \boldsymbol{w},\mathrm{rot}\ \boldsymbol{\Phi})=0\end{aligned}$$

が従う. ここで, $\boldsymbol{\psi}\in H^{1,r'}(\Omega)^3$ は任意であるから,

$$\tau_{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{u}-\mathrm{rot}\ \boldsymbol{w})=0 \tag{4.15}$$

を得る. (4.14) と (4.15) より $\tau_{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{h}=\mathbf{0}$ であり, 表現式 (3.6) において $\boldsymbol{h}\in V^r_{\mathrm{har}}(\Omega)$ が従う. 評価式 (3.7) は (3.6), (4.6) 及び (4.11) を合わせて成立する. (3.6) の表現の一意性については省略する.

謝辞　筆者は定理 4.3(i) について, 貴重なコメントを与えてくれた柴田良弘教授（早稲田大学）に深く感謝する次第である.

参考文献

[1] Fujiwara, D., Morimoto, H., *An L_r-theorem of the Helmholtz decomposition of vector fields.* J. Fac.Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **24**, 685–700 (1977).

[2] Hieber, M., Kozono, H., Seyfert, A., Shimizu, S., Yanagisawa, T., *A Characterization of harmonic L^r-vector fields in two dimensional exterior domains.* to appear in J. Geometric Anal.

[3] Hieber, M., Kozono, H., Seyfert, A., Shimizu, S., Yanagisawa, T., *A Characterization of harmonic L^r-vector fields in three dimensional exterior domains.* submitted

[4] Hieber, M., Kozono, H., Seyfert, A., Shimizu, S., Yanagisawa, T., *L^r-Helmholtz-Weyl decomposition in three dimensional exterior domains* submitted

[5] Kozono, H., Sohr, H., *On a new class of generalized solutions for the Stokes equations in exterior domains.* Ann Scu. Norm. Super. Pisa **19**, 155–181 (1992).

[6] Kozono, H., Yanagisawa, T., *L^r-variational inequality for vector fields and the Helmholtz-Weyl decomposition in bounded domains.* Indiana Univ. Math. J. **58**, 1853–1920 (2009).

[7] Kozono, H., Yanagisawa, T., *Generalized Lax-Milgram theorem in Banach spaces and its application to the elliptic system of boundary value problems.* Manuscripta Math. **141**, 637–662 (2013).

[8] Miyakawa, T., *0n nonstationary solutions of the Navier-Stokes equations in exterior domains.* Hiroshima Math. J. **12**, 115-140 (1982).

[9] Morrey, C.B., *Multiple Integrals in the Calculus of Variations.* Grudlehren der mathematischen Wissenschaften **130**, Springer, 1966.

[10] Prüss,J., Simonett, G., *Moving interfaces and qasilinear parabolic evolution equations.* Monographs in Mathematics, vol.**105**, Birkhäuser, 2016.

[11] Shibata., Y., *On the local well-posedness of free boundary problem for the Navier-Stokes equations in an exterior domain.* Commu. Pure Appl. Anal. **17**, 1681–1721 (2018).

[12] Simader, C.G., *The weak Dirichlet and Neumann problem for the Laplacian in L^q for bounded and exterior domains.* Nonlinear Analysis, Function Spaces and Appplications, Kubec, M., Kufner. A., Opic, B., Rákosnik (ed.) Vol.**4**, Teubner-Text vol.**199**, 180–223 Teubner- Leibzig 1990.

[13] Simader, C.G., Sohr, H., *A new approach to the Helmholtz decomposition and the Neumann problem in L^q-spaces for bounded and exterior domains.* In: Mathematical Problems relating to the Navier-Stokes Equations, Advances in Mathematics for Applied Sciences, G.P. Galdi (ed.), World Scientific, 1–35 (1992).

[14] Simader, C.G., Sohr, H., *The Dirichlet problem for the Laplacian in bounded and unbounded domains.* Pitman Research Notes in Mathematics, Vol. 360, Longman, 1996.

[15] Solonnikov, V.A., *Estimate for solutions of nonstationary Navier-Stokes equations.* J. Soviet Math. **8**, 467–529 (1977).