孤立特異点を持つcomplete intersectionに沿う対数的ベクトル場の計算法について

By

田島 慎一 [*], 渋田敬史 [**], 鍋島克輔 [***]

§1. 序

斉藤恭司により導入された対数的ベクトル場の概念は, 特異点の幾何と複素解析を結びつける懸け橋の役割をはたす重要な概念である. 対数的ベクトル場に関しては, 現在に至るまで様々な観点から研究されてきたが, 特異点の近傍における局所的性質に限っても, 未だに明らかにされていないことが多い. 本稿では複素解析の観点から, 孤立特異点を持つ complete intersection に沿う対数的ベクトル場について考察する.

さて, J. Wahl と A. Aleksandrov は独立に, weighted homogeneous な complete intersection に沿う対数的ベクトル場を与える公式を得ている ([3, 28]). また, 本稿の著者らは論文 [11, 14] において, 孤立特異点を持つ semi quasi-homogeneous な超曲面に沿う対数的ベクトル場を求める計算法を与え, [15] において, 孤立特異点を持つ (semi quasi-homogeneous とは限らない) 一般の超曲面に沿う対数的ベクトル場を求めるアルゴリズムを与えた. これらのアルゴリズムは, Bruce-Roberts Milnor 数の計算, torsion 微分形式の計算等に応用されている ([15, 24]). しかし, 現時点では, 超曲面以外の一般の variety に対しその対数的ベクトル場を求める構成法は未だ確立しておらず, 対数的ベクトル場の複素解析的な構造を具体的に決定したり諸性質を解明することが一般には困難である.

本稿では, 孤立特異点を持つ complete intersection の場合を考察する. Local cohomology と Matlis duality に基づくことで, 対数的ベクトル場を求めるアルゴリズムを構成することが可能であることを示す.

§1.1. Matlis duality

この節では, 局所コホモロジーの概念を用いて, 収束冪級数環を係数とする加群における Matlis duality に関し, 基本的事項を復習する. X は $\mathbb{C}^n$ の原点 O の近傍, $x =$

2010 Mathematics Subject Classification(s): Primary 32S05; Secondary 13D45
Key Words: logarithmic vector field, ICIS, local cohomology, Matlis duality, polar variety
Supported by Grant-in Aid for Scientific Research 18K03320
[*]新潟大学自然科学系
[**]九州産業大学理工学部
[***]徳島大学理工学部

$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ はその局所座標系とする．X における正則関数のなす層を $\mathcal{O}_X$ で表し，その O における stalk を $\mathcal{O}_{X,O}$ で表す．X における正則 n 微分形式のなす層を Ω_X^n で表し，その原点 O における局所コホモロジーを $\mathcal{H}_{\{O\}}^n(\Omega_X^n)$ で表すことにする．

正の整数 ℓ に対し

$$\mathrm{res}_{\{O\}}(*,\ *) : (\mathcal{O}_{X,O})^\ell \times (\mathcal{H}_{\{O\}}^n(\Omega_X^n))^\ell \longrightarrow \mathbb{C}$$

なる pairing を考える．ここで $\mathrm{res}_{\{O\}}$ は，

$$p = (h_1, h_2, \cdots, h_\ell) \in (\mathcal{O}_{X,O})^\ell \text{ と } \omega = ^t(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\ell) \in (\mathcal{H}_{\{O\}}^n(\Omega_X^n))^\ell$$

に対し，局所コホモロジー類 $p\omega = \sum_{i=1}^\ell h_i\omega_i \in \mathcal{H}_{\{O\}}^n(\Omega_X^n)$ の Grothendieck local residue $\mathrm{res}_{\{O\}}(\sum_{i=1}^\ell h_i\omega_i)$ を対応させる写像

$$\mathrm{res}_{\{O\}}(p, \omega) := \mathrm{res}_{\{O\}}(\sum_{i=1}^{\ell} h_i\omega_i)$$

である．この pairing $\mathrm{res}_{\{O\}}$ は，$(\mathcal{O}_{X,O})^\ell$ と $(\mathcal{H}_{\{O\}}^n(\Omega_X^n))^\ell$ との双対性を与える．より正確には，両者は局所凸位相ベクトル空間の構造を持ち，局所凸位相ベクトル空間として互いに双対の関係にある (詳しくは Fréchet Schwartz ベクトル空間と dual Fréchet Schwartz ベクトル空間に関する双対性を参照されたい ([8, 27]))．

いま，$(\mathcal{O}_{X,O})^\ell$ の部分加群 N は $\mathcal{O}_{X,O}$ 上 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ により生成されるとする．この N に対し，$(\mathcal{H}_{\{O\}}^n(\Omega_X^n))^\ell$ に属す局所コホモロジー類であり，N により annihilate されるもの全体のなす集合 W_N を考える．

$$W_N = \{\omega = ^t(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\ell) \in (\mathcal{H}_{\{O\}}^n(\Omega_X^n))^\ell \mid \sum_{i=1}^{\ell} h_i\omega_i = 0,\ \forall p = (h_1, h_2, \cdots, h_\ell) \in N\}.$$

部分加群 N の colength は有限であると仮定する．即ち，商空間 $(\mathcal{O}_{X,O})^\ell/N$ はベクトル空間として有限次元であるとする．このとき，res から次の pairing が誘導される．

$$\mathrm{res}(*,\ *) : (\mathcal{O}_{X,O})^\ell/N \times W_N \longrightarrow \mathbb{C}.$$

古典的な Matlis duality ([10]) により，この pairing は非退化である ([5])．

次に，収束冪級数環の代わりに形式冪級数環 $\hat{\mathcal{O}}_{X,O}$ を係数とする加群の場合を考える．まず，次の式で定義される代数的局所コホモロジー $\mathcal{H}_{[O]}^n(\Omega_X^n)$ を考える．

$$\mathcal{H}_{[O]}^n(\Omega_X^n) = Ext_{k\to\infty}^n(\mathcal{O}_X/\mathfrak{m}^k, \Omega_X^n).$$

ただし $\mathfrak{m} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ は $x_1, x_2, \cdots, x_n$ により生成される極大イデアルを表すとする．$\hat{N} = \hat{\mathcal{O}}_{X,O} \otimes N \subset \hat{\mathcal{O}}_{X,O}^\ell$ とおき，先程と同様に

$$\hat{W}_N = \{\hat{\omega} = ^t(\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2, \cdots, \hat{\omega}_\ell) \in (\mathcal{H}_{[O]}^n(\Omega_X^n))^\ell \mid \sum_{i=1}^{\ell} \hat{h}_i\hat{\omega}_i = 0,\ \forall \hat{p} = (\hat{h}_1, \hat{h}_2, \cdots, \hat{h}_\ell) \in \hat{N}\}$$

と定める．このとき, 次の pairing は非退化である ([10]).

$$\mathrm{res}_{\{O\}}(*,\ *) : (\hat{\mathcal{O}}_{X,O})^\ell/\hat{N} \times \hat{W}_N \longrightarrow \mathbb{C}.$$

通常, 可換環論ではこの非退化な pairing を Matlis duality と呼んでいるようである ([5]).

§1.2. algebraic local cohomology

前の節と同様に $N \subset (\mathcal{O}_{X,O})^\ell$ は $\mathcal{O}_{X,O}$ 上 $p_1, p_2, \cdots, p_m \in (\mathcal{O}_{X,O})^\ell$ により生成された $(\mathcal{O}_{X,O})^\ell$ の部分加群であり, その colength は有限であるとする．N に対し,

$$H_N = \{\sigma \in (\mathcal{H}^n_{\{O\}}(\mathcal{O}_X))^\ell \mid p_i\sigma = 0, i = 1, 2, \cdots, m\},$$

$$\hat{H}_N = \{\hat{\sigma} \in (\mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X))^\ell \mid p_i\hat{\sigma} = 0, i = 1, 2, \cdots, m\}$$

と定める．以下, 微分形式 $dx = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$ を fix して考える．このとき, 次が成立する．

$$W_N = \{\sigma dx \mid \sigma \in H_N\}, \quad \hat{W}_N = \{\hat{\sigma} dx \mid \hat{\sigma} \in \hat{H}_N\}.$$

加群 N は条件 $\dim_{\mathbb{C}}((\mathcal{O}_{X,O})^\ell/N) < \infty$ を満たしているので $\hat{H}_N \cong H_N$ が成り立つ．また, 微分形式 dx を fix しているので W_N と $\hat{H}_N$ を同一視できる．本稿ではさらに $\hat{H}_N$ と H_N を同一視する．

部分加群 N が多項式の組 $p_i = (h_{i,1}, h_{i,2}, \cdots, h_{i,\ell}) \in \mathbb{Q}[x]^\ell$, $i = 1, 2, \cdots, m$ により生成されている場合は, 論文 [21] にあるアルゴリズムにより H_N のベクトル空間としての基底を求めることができる．

この節のまとめとして, Matlis duality の最も基本的な応用を一つ上げておく．

$p = (h_1, h_2, \cdots, h_\ell) \in (\mathcal{O}_{X,O})^\ell$ とする．このとき, $p\sigma = 0, \forall\sigma \in H_N$ は $p \in N$ が成り立つ必要十分条件である．

収束冪級数環を係数にもつ部分加群 $N \subset (\mathcal{O}_{X,O})^\ell$ が, algebraic local cohomology により完全に特徴付けられることに留意されたい．

§2. logarithmic vector fields along ICIS and Matlis duality

前の節と同様に X は $\mathbb{C}^n$ の原点 O の近傍とし, $f_1, f_2, \cdots, f_\ell$ は X 上の正則関数とする．また, $f_1, f_2, \cdots, f_\ell$ の定める variety

$$V = \{x \in X \mid f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_\ell(x) = 0\}$$

は complete intersection であり, X における特異点は原点 O のみであると仮定する．局所環 $\mathcal{O}_{X,O}$ において $f_1, f_2, \cdots, f_\ell$ が 生成するイデアルを $I_O = (f_1, f_2, \cdots, f_\ell)$ で表す．

定義 ([4, 20]). v は X 上の正則ベクトル場の germ であるとする．イデアル I_O に属すすべての正則関数の germ$f$ に対し $v(f)$ が I_O に属すとき, v は V に沿って対数的であると

いう. V に沿って対数的なベクトル場全体のなす集合は $\mathcal{O}_{X,O}$ 加群の構造を持つ. この加群を $Der_{X,O}(-\log V)$ で表す.

いま

$$p_i = (\frac{\partial f_1}{\partial x_i}, \frac{\partial f_2}{\partial x_i}, \cdots, \frac{\partial f_\ell}{\partial x_i}) \in (\mathcal{O}_{X,O})^\ell,\ i = 1, 2, \cdots, n,$$

$$p_{i,j} = e_i f_j \in (\mathcal{O}_{X,O})^\ell,\ i, j = 1, 2, \cdots, \ell,$$

とおく. ただし $e_i = (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{Z}^\ell$ は i 番目の単位ベクトルである.

さて, 原点 O における正則ベクトル場の germ

$$v = a_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + a_2(x)\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + a_n(x)\frac{\partial}{\partial x_n}$$

が与えられたとする. ここで係数はすべて $a_i \in \mathcal{O}_{X,O},\ i = 1, 2, \cdots, n$, 即ち, 正則関数の germ である. このとき, v が V に沿って対数的なベクトル場となる必要十分条件は, 次を満たす正則関数の germ の組 $c_{i,j} \in \mathcal{O}_{X,O}, i, j = 1, 2, \cdots, \ell$ が存在することである.

$$\sum a_i(x) p_i = \sum c_{i,j}(x) p_{i,j}.$$

そこでいま $\frac{\partial}{\partial x_1}$ の係数に注目し, $p_2, p_3, \cdots, p_n$ と $p_{i,j}, i, j = 1, 2, \cdots, \ell$ が $(\mathcal{O}_{X,O})^\ell$ において生成する $\mathcal{O}_{X,O}$ 加群 N_Γ を考える.

$$N_\Gamma = (p_2, p_3, \cdots, p_n, p_{1,1}, p_{1,2}, \cdots, p_{n,\ell}) \subset (\mathcal{O}_{X,O})^\ell.$$

正則関数の germ $a \in \mathcal{O}_{X,O}$ に対し, $\frac{\partial}{\partial x_1}$ の係数が a であるような正則ベクトル場

$$v = a(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + a_2(x)\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + a_n(x)\frac{\partial}{\partial x_n}$$

を考える. このとき, v が $Der_{X,O}(-\log V)$ に属す対数的ベクトル場である必要十分条件は N_Γ を用いて, $a(x)p_1 \in N_\Gamma$ により与えられることは明らかである.

以下, $\dim_{\mathbb{C}}((\mathcal{O}_{X,O})^\ell / N_\Gamma) < \infty$ であると仮定し,

$$H_{N_\Gamma} = \{\sigma \in (\mathcal{H}^n_{\{O\}}(\mathcal{O}_X))^\ell \mid p_i\sigma = 0, i = 2, \cdots, n,\ p_{i,j}\sigma = 0, i, j = 1, 2, \cdots, \ell\},$$

$$H_{N_\Delta} = \{p_1\sigma \mid \sigma \in H_{N_\Gamma}\} \subset \mathcal{H}^n_{\{O\}}(\mathcal{O}_X)$$

とおく. さらに H_{N_Δ} の $\mathcal{O}_{X,O}$ における annihilator $Ann_{\mathcal{O}_{X,O}}(H_{N_\Delta})$ を考える.

$$Ann_{\mathcal{O}_{X,O}}(H_{N_\Delta}) = \{a \in \mathcal{O}_{X,O} \mid a\delta = 0,\ \forall \delta \in H_{N_\Delta}\}.$$

このとき, 次が成立する ([22])

定理 $a(x) \in \mathcal{O}_{X,O}$ とする. 次の形の正則ベクトル場

$$v = a(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + a_2(x)\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + a_n(x)\frac{\partial}{\partial x_n}$$

で $Der_{X,O}(-\log V)$ に属するものが存在する必要十分条件は, $a(x) \in Ann_{\mathcal{O}_{X,O}}(H_{N_\Delta})$ が成り立つことである.

例 1 $f_1(x,y,z) = x^2 + yz^2,\ f_2(x,y,z) = y^2 + z^3$ とし $V = \{(x,y,z) \in X \mid f_1(x,y,z) = f_2(x,y,z) = 0\}$ と定める. ここで X は, $\mathbb{C}^3$ の原点 O の近傍とする. V は weight vector$(7,6,4)$ を持つ weighted homogeneous complete intersection である. 変数 z に注目し, $p_1 = (\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x}),\ p_2 = (\frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial y}),\ p_{1,1} = (f_1, 0),\ p_{1,2} = (f_2, 0),\ p_{2,1} = (0, f_1),\ p_{2,2} = (0, f_2)$ とおき, $p_1, p_2, p_{1,1}, p_{1,2}, p_{2,1}, p_{2,2}$ が生成する加群を N_Γ とする. このとき, H_{N_Γ} は 13 次元であり, そのベクトル空間としての基底は

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ xyz \end{bmatrix} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ xy^2z \end{bmatrix} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ xyz^2 \end{bmatrix} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ xy^2z^2 \end{bmatrix} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ xyz \end{bmatrix} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ x^2yz \end{bmatrix} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ xyz^2 \end{bmatrix} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ x^2yz^2 \end{bmatrix} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ xyz^3 \end{bmatrix} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ x^2yz^3 \end{bmatrix} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\begin{bmatrix} 1 \\ xyz^3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ xy^2z \end{bmatrix} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -2\begin{bmatrix} 1 \\ xyz^4 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ xy^3z \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ xy^2z^2 \end{bmatrix} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\begin{bmatrix} 1 \\ xyz^5 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ xy^3z^2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ xy^2z^3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ x^3yz \end{bmatrix} \end{pmatrix},$$

で与えられる.

これらの local cohomology classes に $p_3 = (\frac{\partial f_1}{\partial z}, \frac{\partial f_2}{\partial z}) = (2yz, 3z^2)$ を掛けることで H_Δ の基底

$$\begin{bmatrix} 1 \\ xyz \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ xy^2z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ x^2yz \end{bmatrix}$$

を得る. 論文 [13, 23] にあるアルゴリズムを用いることにより, イデアル $Ann_{\mathcal{O}_{X,O}}(H_\Delta)$ の standard 基底 $\{x^2, y^2, xy, z\}$ を得る.

先程の定理により, V に沿う対数的ベクトル場 $v = a_1\frac{\partial}{\partial x} + a_2\frac{\partial}{\partial y} + a\frac{\partial}{\partial z}$ の $\frac{\partial}{\partial z}$ の係数 a は, $\{x^2, y^2, xy, z\}$ が生成するイデアルに属することになる.

対数的ベクトル場の構成に関する議論を先に進める前に, いままで用いた N_Γ の構造について考える必要がある. そのために, $\sigma \in H_{N_\Gamma}$ に対し $p_1\sigma$ を対応させる写像 γ を考える. ここで,

$$p_1 = (\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f_\ell}{\partial x_1}) \in (\mathcal{O}_{X,O})^\ell$$

である. また, $H_{N_T} \subset (\mathcal{H}^n_{\{O\}}(\mathcal{O}_X))^\ell$ を次で定める.

$$H_{N_T} = \{\tau \in (\mathcal{H}^n_{\{O\}}(\mathcal{O}_X))^\ell \mid p_i\tau = 0, i = 1, \cdots, n,\ p_{i,j}\tau = 0,\ i, j = 1, 2, \cdots, \ell\}.$$

このとき, $\mathrm{Ker}(\gamma) = H_{N_T}$ が成り立つことから, 次の完全系列

$$0 \longrightarrow H_{N_T} \longrightarrow H_{N_\Gamma} \longrightarrow H_{N_\Delta} \longrightarrow 0$$

を得る. したがって

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{X,O}/Ann_{\mathcal{O}_{X,O}}(H_{N_\Delta})) = \dim_{\mathbb{C}}(H_{N_\Gamma}) - \dim_{\mathbb{C}}(H_{N_T})$$

が成り立つ事がわかる ([22]).

ベクトル空間 H_{N_T} の次元は variety V の複素解析的不変量であるが ([7, 9]), H_{N_Δ} の次元は計算に用いた座標系, より正確には超平面の選び方に依る. 左辺にある

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{X,O}/Ann_{\mathcal{O}_{X,O}}(H_{N_\Delta})),$$

即ち $\dim_{\mathbb{C}}(H_{N_\Delta})$ は対数的ベクトル場の偏微分 $\frac{\partial}{\partial x_1}$ の係数が原点でどの程度 vanish するかを数値的に測っている. このことから, 対数的ベクトル場の複素解析的な構造に着目する際は, $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{X,O}/Ann_{\mathcal{O}_{X,O}}(H_{N_\Delta}))$ がもっとも小さくなるような座標系を予め求め, その座標系を用いて対数的ベクトル場を構成すべきであることが分かる.

§ 3. genericity

この節では, 対数的ベクトル場の複素解析的構造を調べるのに適した座標系をどのように選べばよいか, その方法についての概要を与える. この方法は, 理論的には polar variety に関する B. Teissier の結果 ([25, 26]) に基づいている. 算法として実現するために, parameter 付で Matlis duality を計算するアルゴリズムを用いる.

§ 3.1. Teissier's results on polar varieties

$\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n \backslash (0, 0, \cdots, 0)$, に対し超平面

$$L_\xi = \{x \in \mathbb{C}^n \mid \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_n x_n = 0\}$$

を考える. 一般性を失うことなく, ある $\xi_k = 1$ となる k が存在するとしてよい.

線形の座標変換

$z_i = x_i$ for $i \neq k$,

$z_k = \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_{k-1} x_{k-1} + x_k + \xi_{k+1} x_{k+1} + \cdots + \xi_n x_n$

を用いて

$$g_j(z, \xi) = f_j(z_1, \cdots, z_{k-1}, z_k - \xi_1 z_1 - \xi_2 z_2 - \cdots - \xi_{k-1} z_{k-1} - \xi_{k+1} z_{k+1} - \cdots - \xi_n z_n, z_{k+1}, \cdots, z_n)$$

と定め

$$q_i(z, \xi) = (\frac{\partial g_1}{\partial z_i}, \frac{\partial g_2}{\partial z_i}, \cdots, \frac{\partial g_\ell}{\partial z_i}) \in (\mathcal{O}_{X,O})^\ell, i = 1, 2, \cdots, n,$$

$$q_{i,j}(z, \xi) = e_i g_j(z, \xi) \in (\mathcal{O}_{X,O})^\ell,\ i, j = 1, 2, \cdots, \ell,$$

とおく．ここで $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ は parameter とみなしている．$(\mathcal{O}_{X,O})^\ell$ において $q_i, i\neq k$ と $q_{i,j}, i,j=1,2,\cdots,\ell$ が生成する $\mathcal{O}_{X,O}$ 部分加群を N_{Γ_ξ} で表す.

$$N_{\Gamma_\xi}=(q_1,q_2,\cdots,q_{k-1},q_{k+1},\cdots,q_n,q_{1,1},q_{1,2},\cdots,q_{\ell,\ell}).$$

N_{Γ_ξ} は L_ξ のみによることに注意し, 自然数 ν を次で定める.

$$\nu=\min_{[\xi]\in\mathbb{P}^{n-1}}(\dim_{\mathbb{C}}((\mathcal{O}_{X,O})^\ell/N_{\Gamma_\xi}).$$

ただし, $[\xi]$ は $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\mathbb{C}^n\backslash(0,0,\cdots,0)$ の同値類が定める射影空間 $\mathbb{P}^{n-1}$ の元を表す.

射影空間の部分集合 U を

$$U=\{[\xi]\in\mathbb{P}^{n-1}\mid\dim_{\mathbb{C}}((\mathcal{O}_{X,O})^\ell/N_{\Gamma_\xi})=\nu\}$$

で定める．B. Teissier の結果 [26] より U は $\mathbb{P}^{n-1}$ の Zariski open dense subset であることが従う．前の節と同様に

$$H_{N_{\Gamma_\xi}}=\{\sigma\in(\mathcal{H}^n_{\{O\}}(\mathcal{O}_X))^\ell\mid q_i\sigma=0, i\neq k,\ q_{i,j}\sigma=0, i,j=1,2,\cdots,\ell\},$$

$$H_{N_{\Delta_\xi}}=\{q_k\sigma\mid\sigma\in H_{N_{\Gamma_\xi}}\}$$

とおく．このとき, $[\xi]$ に対し, $\dim_{\mathbb{C}}(H_{N_{\Delta_\xi}})$ が最小となることと $\dim_{\mathbb{C}}((\mathcal{O}_{X,O})^\ell/N_{\Gamma_\xi})=\nu$ が成り立つことは, 同等であることに注意する.

§ 3.2. parametric Matlis duality

一般に, 集合 U, あるいは $\mathbb{P}^{n-1}\backslash U$ を求めることは極めて困難である．しかし幸いなことに, 以下に述べるように, Matlis duality を求めるアルゴリズム [21] をパラメータ付きに拡張し [16] に与えた方法を加群の場合に適用することで, ν の値を求めることは可能である.

いま $f_1,f_2,\cdots,f_\ell\in\mathbb{Q}[x]=\mathbb{Q}[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ は ℓ 個の多項式の組で, 原点 O の近傍 $X\subset\mathbb{C}^n$ における共通零点集合 $V=\{x\in X\mid f_1(x)=f_2(x)=\cdots=f_\ell(x)=0\}$ は, 原点 O を孤立特異点としてもつ complete intersection であるとする.

パラメータ $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-1},1)$ に対し, $H^n_{[O]}(\mathbb{Q}(\xi)[z])$ は有理関数体 $\mathbb{Q}(\xi)$ を係数に持つ local cohomology であるとする.

$$H^n_{[O]}(\mathbb{Q}(\xi)[z])=Ext^n_{k\to\infty}(\mathbb{Q}(\xi)[z]/(z_1,z_2,\cdots,z_n)^k,\mathbb{Q}(\xi)[z]).$$

次のアルゴリズムにより, ν の値を求めることが出来る.

Algorithm I

Input: $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_\ell(x)\in\mathbb{Q}[x]$: defining polynomials of an ICIS V

Output: ν

BEGIN

$g_j(z,\xi) \leftarrow f_j(z_1,\cdots,z_{n-1},z_n-\xi_1z_1-\xi_2z_2-\cdots-\xi_{n-1}z_{n-1}) \in \mathbb{Q}(\xi)[z], j=1,2,\cdots,\ell;$

$q_i(z,\xi) \leftarrow (\frac{\partial g_1}{\partial z_i}, \frac{\partial g_2}{\partial z_i},\cdots,\frac{\partial g_\ell}{\partial z_i}) \in \mathbb{Q}(\xi)[z], i=1,2,\cdots,n;$

$q_{i,j}(z,\xi) \leftarrow e_ig_j(z,\xi) \in (\mathbb{Q}(\xi)[z])^\ell,\ \ i,j=1,2,\cdots,\ell;$

$\Sigma \leftarrow$ compute a basis of the vector space $H_{N_{\Gamma_\xi}}$ in $H^n_{[O]}(\mathbb{Q}(\xi)[z])^\ell$;
/* use a parametric version of the algorithm on Matlis duality */

$\nu \leftarrow |\Sigma|$; /* the number of the elements of Σ */

return ν;

END

次のアルゴリズムは, 選んだ超平面が generic か否か判定し, generic な場合には対数的ベクトル場の構成に用いる local cohomology を出力する.

Algorithm II

Input: $f_1,f_2,\cdots,f_\ell,\ \ \nu,\ \ \beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\in\mathbb{Q}^n\backslash(0,0,\cdots,0)$ with $\beta_k=1$
Output: a basis of $H_{N_{\Gamma_\beta}}$, if β is generic.

BEGIN

$g_j(z,\beta) \leftarrow f_j(z_1,\cdots,z_{k-1},z_k-\beta_1z_1-\beta_2z_2-\cdots$
$-\beta_{k-1}z_{k-1}-\beta_{k+1}z_{k+1}-\cdots-\beta_nz_n,z_{k+1},\cdots,z_n), i=1,2,\cdots,\ell;$

$q_i(z) \leftarrow (\frac{\partial g_1}{\partial z_i}, \frac{\partial g_2}{\partial z_i},\cdots,\frac{\partial g_\ell}{\partial z_i}) \in (\mathbb{Q}[z])^\ell, i=1,2,\cdots,n;$

$q_{i,j}(z) \leftarrow e_ig_j(z) \in (\mathbb{Q}[z])^\ell,\ i,j=1,2,\ldots,\ell;$

$\Sigma_\beta \leftarrow$ compute a basis of the vector space $H_{N_{\Gamma_\beta}}$in $H^n_{[O]}(\mathbb{Q}[z])^\ell$;

if $|\Sigma_\beta|$ exceeds ν, then
  return "the hypersurface is not generic";
else if $|\Sigma_\beta|=\nu$, then
  return Σ_β;

END

計算例をふたつ与える. 最初の例は, 既に前の節において扱った weighted homogeneous な特異点の例である ([6]). 2 つ目の例は, quasi homogeneous でない complete intersection, 即ち, どの様に座標変換しても weighted homogeneous に変換できない特異点である ([2]).

例 1 の続き. $f_1(x,y,z)=x^2+yz^2,\ f_2(x,y,z)=y^2+z^3$ とおく. Algorithm I を実行すると $\nu=13$ を得る. 従って, 第 2 節の計算より, 超平面 $z=0$ は generic であることが分かる.

例 2 $f_1(x,y,z)=xy+z^2,\ f_2(x,y,z)=x^2+y^3+yz^2$ とする．Algorithm I より, $\nu=11$ を得る．

(i) 超平面 $z=0$ を考え, $\beta=(0,0,1)$ とおく．Algorithm II より, $z=0$ は generic でないことが分かる．実際, このとき, $\dim_{\mathbb{C}}(H_{N_{\Gamma_{(0,0,1)}}})=12$ である．

(ii) 次に, 超平面 $y=0$ を考え, $\beta=(0,1,0)$ とおき, Algorithm II を実行すると, $\dim_{\mathbb{C}}(H_{N_{\Gamma_{(0,1,0)}}})=11$ であり, $y=0$ は generic であることが分かる．$H_{N_{\Gamma_{(0,1,0)}}}$ の基底は次で与えられる．

$$\begin{pmatrix}\begin{bmatrix}1\\xyz\end{bmatrix}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\begin{bmatrix}1\\x^2yz\end{bmatrix}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\\begin{bmatrix}1\\xyz\end{bmatrix}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\\begin{bmatrix}1\\xy^2z\end{bmatrix}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\\begin{bmatrix}1\\xy^3z\end{bmatrix}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\\begin{bmatrix}1\\xyz^2\end{bmatrix}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}-2\begin{bmatrix}1\\xy^2z\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}1\\x^2yz\end{bmatrix}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\begin{bmatrix}1\\xyz^2\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}1\\xy^2z^2\end{bmatrix}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\begin{bmatrix}1\\xy^3z\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}1\\x^2y^2z\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\xyz^2\end{bmatrix}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\begin{bmatrix}1\\xy^2z^2\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}1\\xy^3z^2\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\x^2yz^2\end{bmatrix}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}-2\begin{bmatrix}1\\xy^4z\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1\\x^3yz\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\x^2y^2z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\xyz^3\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}1\\x^2y^3z\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\xy^4z\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\xy^2z^3\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\x^3yz\end{bmatrix}\end{pmatrix}$$

ちなみに, $H_{\Delta_{(0,0,1)}}$ は 4 次元, $H_{\Delta_{(0,1,0)}}$ は 3 次元であり, ベクトル空間としての基底は夫々,

$$\{\begin{bmatrix}1\\xyz\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\xy^2z\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\x^2yz\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\xy^3z\end{bmatrix}\},\quad\{\begin{bmatrix}1\\xyz\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\xyz^2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\x^2yz\end{bmatrix}-\frac{1}{10}\begin{bmatrix}1\\xy^2z\end{bmatrix}\}$$

である．対応するスタンダード基底を求めると, 夫々 $\{x^2,xy,y^3,z\}$, $\{x^2,x+10y,xz,z^2\}$ で与えられる．これらの事から, V に沿う対数的ベクトル場のなす加群の $\frac{\partial}{\partial z}$ の係数のなす (局所環 $\mathcal{O}_{X,O}$ における) イデアルは $\{x^2,xy,y^3,z\}$ で生成され, $\frac{\partial}{\partial y}$ の係数のなすイデアルは $\{x^2,x+10y,xz,z^2\}$ で生成されることが分かる．

§ 4. algorithms

以下, すでに必要な座標変換を行い, ある自然数 k に対し $\beta_k=1$ を満たす β と, β が定める超平面に付随する local cohomology の加群 $H_{N_{\Gamma_\beta}}$ の基底 $\Sigma_\beta\subset H^n_{[O]}(\mathbb{Q}[z])^\ell$ を求めてあるとする．また, $q_k=(\frac{\partial g_1}{\partial z_k},\frac{\partial g_2}{\partial z_k},\cdots,\frac{\partial g_\ell}{\partial z_k})\in\mathbb{Q}[z]^\ell$ を用いて

$$H_{\Delta_\beta}=\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}\{q_k\sigma\mid\sigma\in\Sigma_\beta\}$$

の基底も既に求めてあるとする. 収束冪級数環 $\mathcal{O}_{X,O}$ における H_{Δ_β} の annihilator $Ann_{\mathcal{O}_{X,O}}(H_{N_{\Delta_\beta}})$ のスタンダード基底を A で表す. このとき, $a \in A$ に対し $a(z)q_k \in \mathbb{Q}[z]^\ell$ は $\mathcal{O}_{X,O}$-加群 N_{Γ_β} に属す. 従って, V に沿う対数的ベクトル場であり $\frac{\partial}{\partial z_k}$ の係数が a である正則ベクトル場が存在することは, 第 2, 3 節で既に述べた通りである.

この節では, これらの生成元が与えられたとしそれに対応する対数的ベクトル場を構成する方法についてその概略を述べる. この問題は 基本的には収束冪級数環を係数とするような加群におけるシジジーの計算と捉えることができる. しかし, 局所環を係数とする加群の世界における問題であるため, 計算コストが非常に高い. 既存のアルゴリズムをそのまま用いても相当量のメモリーと時間が必要となり, 実際には答えを得ることが極めて困難であることが多い. 以下に紹介する計算法では, この計算上の困難を避けるために新たな技法を考案し, 改良を施すことで計算の効率化を図っている

まず, $q_i, i = 1, 2, \cdots, k-1, k+1, \cdots, n$ と $q_{i,j}, i, j = 1, 2, \cdots, \ell$ が $\mathbb{Q}[z]$ 上生成する $\mathbb{Q}[z]^\ell$ の部分加群を考え M_{Γ_β} とおく. 次に, 2 つの加群の多項式環 $\mathbb{Q}[z]$ における colon ideal $M_{\Gamma_\beta} : (a(z)q_k)$ を考える ([1]). このとき, colon ideal $M_{\Gamma_\beta} : (a(z)q_k)$ に属す多項式 $u(z)$ であり, $u(O) \neq 0$ を満たすものが存在する. 明らかに $u(z)a(z)q_k \in M_{\Gamma_\beta}$ を満たす.

$$\mathrm{QQ} = [q_1, q_2, \cdots, q_{k-1}, q_{k+1}, \cdots, q_n,\ q_{1,1}, q_{1,2}, \cdots, q_{1,\ell}, q_{2,1}, \cdots, q_{2,\ell}, \cdots, q_{\ell,\ell}]$$

とおく. QQ が生成する加群 M_{Γ_β} のグレブナ基底を $\mathrm{G}_{M_{\Gamma_\beta}} = \{gr_1, gr_2, \cdots, gr_\lambda\}$ とおく. グレブナ基底 gr_j と生成元 QQ の間の関係式のリストを R_{QQ} で表す.

$$gr_{j'} = \sum_{i \neq k} r_{j',i} q_i + \sum_{i,j} r_{j',i,j} q_{i,j}.$$

ただし $r_{j,i}, r_{j,i,j'} \in \mathbb{Q}[z]$ である. さらに, $\mathrm{Q} = [q_1, q_2, \cdots, q_{k-1}, q_{k+1}, \cdots, q_n]$ のシジジーのグレブナ基底を S_Q とする. 次の **procedure** を用意する ([12]).

procedure

Input: $\mathrm{G}_{M_{\Gamma_\beta}},\ \mathrm{R}_{\mathrm{QQ}},\ \mathrm{S}_\mathrm{Q},\ -u(z)a(z)q_k$

Output: $[b_1, b_2, \cdots, b_{k-1}, b_{k+1}, \cdots, b_n]$ such that there exist $d_{i,j}, i, j = 1, 2, \cdots, \ell$ that satisfy

$$\begin{aligned}-u(z)a(z)q_k(z) = {}& b_1(z)q_1(z) + b_2(z)q_2(z) + \cdots + b_{k-1}(z)q_{k-1}(z) + b_{k+1}(z)q_{k+1}(z) \\ &+ \cdots + b_n(z)q_n(z) + d_{1,1}(z)q_{1,1}(z) + d_{1,2}(z)q_{1,2}(z) + \cdots + d_{\ell,\ell}(z)q_{\ell,\ell}(z)\end{aligned}$$

BEGIN

step1: divide $-uaq_k$ by the Gröbner basis $\mathrm{G}_{M_{\Gamma_\beta}}$;

$$-uaq_k = c_1 gr_1 + c_2 gr_2 + \cdots + c_\lambda gr_\lambda$$

step2: rewrite the relation above by using R_{QQ} :

$$-uaq_k = \sum_{i \neq k} (\sum_{j'} c_{j'} r_{j',i}) q_i + \sum_{i,j} (\sum_{j'} c_{j'} r_{j',i,j}) q_{i,J}$$

step3: simplify the expression above by using $\mathrm{S_Q}$;
$$-u(z)a(z)q_k(z) = b_1(z)q_1(z) + b_2(z)q_2(z) + \cdots + b_{k-1}(z)q_{k-1}(z) + b_{k+1}(z)q_{k+1}(z) + \cdots + b_n(z)q_n(z) + d_{1,1}(z)q_{1,1}(z) + d_{1,2}(z)q_{1,2}(z) + \cdots + d_{\ell,\ell}(z)q_{\ell,\ell}(z)$$
return $[b_1, b_2, \cdots, b_{k-1}, b_{k+1}, \cdots, b_n]$;

END

Algorithm I, II を実行した後, 次の Algorithm III を用いることで対数的ベクトル場のなす加群の生成元を構成することができる.

Algorithm III

Input: Σ_β / * a basis of $H_{N_{\Gamma_\beta}}$, associated to β s.t. $\beta_k = 1$ */
Output: a set of generators of germs of logarithmic vector fields along V

BEGIN

$\mathrm{D} = [\ ];\ \mathrm{T} = [\ ]$;

$\mathrm{G}_{M_{\Gamma_\beta}} \leftarrow$ compute a Gröbner basis of the module M_{Γ_β};

$\mathrm{R_{QQ}} \leftarrow$ compute a list of relations between $\mathrm{G}_{M_{\Gamma_\beta}}$ and QQ;

$\mathrm{S_Q} \leftarrow$ compute a Gröbner basis of the syzygies of Q;

$\Delta \leftarrow$ compute a basis of the vector space H_{N_Δ};
/* use the algorithm in [23] */

$\mathrm{A} \leftarrow$ compute a standard basis of $Ann_{\mathcal{O}_{X,O}}(H_{N_{\Delta_\beta}})$ by using Δ_β;
/* use the algorithm in [23] */

while $\mathrm{A} \neq \emptyset$ **do**

select $a(z)$ from A;

$\mathrm{A} \leftarrow \mathrm{A} \backslash \{a(z)\}$;

Colon $\leftarrow$ compute a Gröbner basis of the colon ideal of modules;
$M_{\Gamma_\beta} : (uaq_k) = \{u(z) \in \mathbb{Q}[z] \mid u(z)a(z)q_k \subset M_{\Gamma_\beta}\}$;

$u(z) \leftarrow$ select $u(z) \in$ Colon s.t. $u(O) \neq 0$;

$\{b_1, b_2, \cdots, b_{k-1}, b_{k+1}, \cdots, b_n\}$
$\leftarrow$ compute $b_1, b_2, \cdots, b_{k-1}, b_{k+1}, \cdots, b_n$ that satisfy
$$-u(z)a(z)q_k(z) = b_1(z)q_1(z) + b_2(z)q_2(z) + \cdots + b_{k-1}(z)q_{k-1}(z) + b_{k+1}(z)q_{k+1}(z) + \cdots + b_n(z)q_n(z) + d_{1,1}(z)q_{1,1}(z) + d_{1,2}(z)q_{1,2}(z) + \cdots + d_{\ell,\ell}(z)q_{\ell,\ell}(z);$$
by using **procedure** for solving the extended membership problem
for $u(z)a(z)q_k(z)$ with respect to
$$\mathrm{QQ} = [q_1, q_2, \cdots, q_{k-1}, q_{k+1}, \cdots, q_n, q_{1,1}, q_{1,2}, \cdots, q_{\ell,\ell}].$$

$v \leftarrow b_1\frac{\partial}{\partial z_1} + b_2\frac{\partial}{\partial z_2} + \cdots + b_{k-1}\frac{\partial}{\partial z_{k-1}} + u(z)a(z)\frac{\partial}{\partial z_k} + b_{k+1}\frac{\partial}{\partial z_{k+1}} + \cdots + b_n\frac{\partial}{\partial z_n}$;
$\mathrm{D} \leftarrow \mathrm{D} \cup \{v\}$;

end-while

Syz $\leftarrow$ compute a Gröbner basis of syzygies of

$$\mathrm{QQ} = [q_1, q_2, \cdots, q_{k-1}, q_{k+1}, \cdots, q_n, q_{1,1}, q_{1,2}, \cdots, q_{\ell,\ell}];$$

while Syz $\neq \emptyset$ **do**

select $syz = (s_1, s_2, \cdots, s_{k-1}, s_{k+1}, \cdots, s_n, d_{1,1}, d_{1,2}, \cdots, d_{\ell,\ell})$ from Syz;

Syz $\leftarrow$ Syz$\backslash syz$;

if $(s_1, s_2, \cdots, s_{k-1}, s_{k+1}, \cdots, s_n) \neq (0, 0, \cdots, 0)$
$w \leftarrow s_1\frac{\partial}{\partial z_1} + s_2\frac{\partial}{\partial z_2} + \cdots s_{k-1}\frac{\partial}{\partial z_{k-1}} + s_{k+1}\frac{\partial}{\partial z_{k+1}} + \cdots + s_n\frac{\partial}{\partial z_n}$;
$\mathrm{T} \leftarrow \mathrm{T} \cup \{w\}$;

end-while

return $\mathrm{D} \cup \mathrm{T}$

END

本稿で紹介したアルゴリズムは, 数式処理システム Risa/Asir に実装してある ([17]). 以下に, 実行例を与える.

例 1 の続き. $f_1(x,y,z) = x^2 + yz^2$, $f_2(x,y,z) = y^2 + z^3$. $\beta = (0,0,1)$ である. 超平面 $z = 0$ に対応する standard 基底は $A = \{x^2, y^2, xy, z\}$ である. このとき, A の元 a に対する多項式環における加群の colon ideal $M_{\Gamma_{(0,0,1)}} : aM_3$ のグレブナ基底は 1 である. Algorithm III を用いて, 対数的ベクトル場を求めると, $D = [v_1, v_2, v_3, v_4]$ と T を得る. ただし

$v_1 = -7xyz\frac{\partial}{\partial x} - 6y^2z\frac{\partial}{\partial y} + 4x^2\frac{\partial}{\partial z}$, $v_2 = -7xz^2\frac{\partial}{\partial x} + 6x^2\frac{\partial}{\partial y} + 4y^2\frac{\partial}{\partial z}$,

$v_3 = -7y^2z\frac{\partial}{\partial x} - 6xz^2\frac{\partial}{\partial y} + 4xy\frac{\partial}{\partial z}$, $v_4 = 7x\frac{\partial}{\partial x} + 6y\frac{\partial}{\partial y} + 4z\frac{\partial}{\partial z}$,

$\mathrm{T} = [f_1\frac{\partial}{\partial x}, f_2\frac{\partial}{\partial x}, (x^2z - y^3)\frac{\partial}{\partial x}, (x^4 + y^4z)\frac{\partial}{\partial x}, (x^6 + y^7)\frac{\partial}{\partial x}, f_1\frac{\partial}{\partial y}, f_2\frac{\partial}{\partial y}, (x^2z - y^3)\frac{\partial}{\partial y},$
$(x^4 + y^4z)\frac{\partial}{\partial y}, (x^6 + y^7)\frac{\partial}{\partial y}]$

である. ここで T は $f_1\frac{\partial}{\partial x}, f_2\frac{\partial}{\partial x}, f_1\frac{\partial}{\partial y}, f_2\frac{\partial}{\partial y}$ で生成されるので, $\mathcal{O}_{X,O}$ 加群 $\mathcal{D}er_{X,O}(-\log V)$ は,

$$v_1, v_2, v_3, v_4, f_1\frac{\partial}{\partial x}, f_2\frac{\partial}{\partial x}, f_1\frac{\partial}{\partial y}, f_2\frac{\partial}{\partial y}$$

により生成されることが分かる. ベクトル場 v_4 はオイラーベクトル場である.

例 2 の続き. $f_1(x,y,z) = xy + z^2$, $f_2(x,y,z) = x^2 + y^3 + yz^2$.

(i) $\beta = (0,0,1)$, 即ち超平面 $z = 0$ に対する standard 基底は $A = \{x^2, xy, y^3, z\}$ である. この場合, 超平面 $z = 0$ は generic ではないが, Algorithm III を使えば対数的ベクトル場を構成することができる. A の元 a に対し, 多項式環における加群の colon ideal $M_{\Gamma_{(0,0,1)}} : aM_3$ のグレブナ基底を求めると

$$\{6y - 25, 18x - 125, 108z^2 + 3125\}$$

を得る. いま $u = 6y - 25$ とおき, Algorithm III を実行する. 出力として $D = [v_1, v_2, v_3, v_4]$ と T を得る. ただし

$$v_1 = (-8x^2z - 30y^2z - 32z^3)\tfrac{\partial}{\partial x} + (20xz - 2y^2z + 4z^3)\tfrac{\partial}{\partial y} + ux^2\tfrac{\partial}{\partial z},$$

$$v_2 = (30xz + 2y^2z + 8z^3)\tfrac{\partial}{\partial x} + (2xz - 6y^2z + 20yz)\tfrac{\partial}{\partial y} + uxy\tfrac{\partial}{\partial z},$$

$$v_3 = (6x^2z + 30y^2z + 6yz^3 + 2z^3)\tfrac{\partial}{\partial x} + (6x^2z - 20xz + 22y^2z + 6yz^3 - 6z^3)\tfrac{\partial}{\partial y} + uy^3\tfrac{\partial}{\partial z},$$

$$v_4 = (-30x - 2y^2 - 8z^2)\tfrac{\partial}{\partial x} + (-2x + 6y^2 - 20y)\tfrac{\partial}{\partial y} + uz\tfrac{\partial}{\partial z},$$

$$\mathrm{T} = [f_1\tfrac{\partial}{\partial x}, f_2\tfrac{\partial}{\partial x}, (x^3 - y^2z^2 - z^4)\tfrac{\partial}{\partial x}, (x^4 - xz^4 + yz^4)\tfrac{\partial}{\partial x}, f_1\tfrac{\partial}{\partial y}, f_2\tfrac{\partial}{\partial y},$$
$$(x^3 - y^2z^2 - z^4)\tfrac{\partial}{\partial y}, (x^4 - xz^4 + yz^4)\tfrac{\partial}{\partial y}]$$

である. T は $f_1\frac{\partial}{\partial x}, f_2\frac{\partial}{\partial x}, f_1\frac{\partial}{\partial y}, f_2\frac{\partial}{\partial y}$ で生成されるので, $\mathcal{D}er_{X,O}(-\log V)$ は,

$$v_1, v_2, v_3, v_4, f_1\frac{\partial}{\partial x}, f_2\frac{\partial}{\partial x}, f_1\frac{\partial}{\partial y}, f_2\frac{\partial}{\partial y}$$

により生成されることが分かる.

(ii) $\beta = (0,1,0)$ が定める超平面 $y = 0$ は, generic である. 対応する standard 基底 A は

$$A = \{x^2, x + 10y, xz, z^2\}$$

である. A の元 a に対し, 加群の colon ideal $M_{\Gamma_\beta} : aM_2$ のグレブナ基底は

$$\{x - 8, y - 4, z^2 + 32\}$$

である. ここで $u = y - 4$ を選び, Algorithm III を実行する. 出力として $\mathrm{D} = [v_1, v_2, v_3, v_4]$ と T を得る. ただし

$$v_1 = (4x^3 + 14xz^2 - 12yz^2)\tfrac{\partial}{\partial x} + 2ux^2\tfrac{\partial}{\partial y} + (3x^2z + 10y^2z + 11z^3)\tfrac{\partial}{\partial z},$$

$$v_2 = (-120x + 4x^2 - 8y^2 - 26z^2)\tfrac{\partial}{\partial x} + 2u(x + 10y)\tfrac{\partial}{\partial y} + (-100z + 3xz + 19yz)\tfrac{\partial}{\partial z},$$

$$v_3 = (4x^2z + 12y^2z + 14z^3)\tfrac{\partial}{\partial x} + 2uxz\tfrac{\partial}{\partial y} + (10x^2 + 3xz^2 - yz^2)\tfrac{\partial}{\partial z},$$

$v_4 = (12x^2+4xz^2-2yz^2)\frac{\partial}{\partial x} + 2uz^2\frac{\partial}{\partial y} + (10xz+y^2z+3z^3)\frac{\partial}{\partial z}$,
$\mathrm{T} = [f_1\frac{\partial}{\partial x}, f_2\frac{\partial}{\partial x}, (x^3-y^2z^2-z^4)\frac{\partial}{\partial x}, (x^4-xz^4+yz^4)\frac{\partial}{\partial x}, f_1\frac{\partial}{\partial z}, f_2\frac{\partial}{\partial z},$
$(x^3-y^2z^2-z^4)\frac{\partial}{\partial z}, (x^4-xz^4+yz^4)\frac{\partial}{\partial z}]$.

従って, 対数的ベクトル場のなす加群の $\mathcal{O}_{X,O}$ 加群としての生成元として

$$v_1, v_2, v_3, v_4, f_1\frac{\partial}{\partial x}, f_2\frac{\partial}{\partial x}, f_1\frac{\partial}{\partial z}, f_2\frac{\partial}{\partial z}$$

を得る.

References

[1] W. Adams and P. Loustaunau, An Introduction to Gröbner Bases, AMS, Providence, 1994.

[2] D. Afzal, F. Afzal, M. Mulback, G. Pfister and A. Yaqub, *Unimodal ICIS, a classifier*, Studia Scientiarum Math. Hungarica **54** (2017), 374–403.

[3] A. Aleksandrov, *Cohomology of a quasihomogeneous complete intersection*, Math. USSR Izvestiya **26** (1986), 437–477.

[4] J. W. Bruce and R. M. Roberts, *Critical points of functions on an analytic varieties*, Topology **27** (1988), 57–90.

[5] W. Bruns and J. Herzog, Cohen-Macaulay Rings, Cambridge 1993.

[6] M. Giusti, *Classification des singularités isolées simples d'intersections complètes*, Singularities Part I, 457–494 Proc. Sympos. Pure Math. **40** AMS, 1983.

[7] A. Kas and M. Schlessinger, *On the versal deformation of a complex space with an isolated singularity*, Math. Ann. **196** (1972), 23–29.

[8] M. Kashiwara and T. Kawai, *On holonomic systems of microdifferential equations. III*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **17** (1981), 813–979.

[9] E. J. N. Looijenga, Isolated Singular Points on Complete Intersections, London Math. Soc. Lecture Note Series **77** (1984), Cambridge.

[10] E. Matlis, *Injective modules over Noetherian rings*, Pacific J. Math. **8** (1958), 511–528.

[11] K. Nabeshima and S. Tajima, *Computing logarithmic vector fields associated with parametric semi-quasihomogeneous hypersurface isolated singularities*, in D. Robertz (Ed.), International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC) (2015). ACM, 334–348.

[12] K. Nabeshima and S. Tajima, *Solving extended ideal membership problems in rings of convergent power series via Gröbner bases,* Lecture Notes in Computer Sciences **9582** (2016), 252–267, Mathematical Aspects of Computer and Information Sciences.

[13] K. Nabeshima and S. Tajima, *Algebraic local cohomology with parameters and parametric standard bases for zero-dimensional ideals*, Journal of Symbolic Computation, **82** (2017), 91–122.

[14] K. Nabeshima and S. Tajima, *Computation methods of logarithmic vector fields associated with semi-weighted homogeneous isolated hypersurface singularities*, Tsukuba J. of Math. **42** (2018), 191–231.

[15] K. Nabeshima and S. Tajima, *Computing logarithmic vector fields and Bruce-Roberts Mil-*

nor numbers via local cohomology classes, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **64** (2019), 521–538.

[16] K. Nabeshima and S. Tajima, *Alternative algorithms for computing generic μ^*-sequences and local Euler obstructions of isolated hypersurface singularities*, Journal of Algebra and its Applications **18** No. 8 (2019) DOI: 10.1142/S02194988195015614

[17] M. Noro and T. Takeshima, Risa/Asir- *A computer algebra system*, in Wang, P. (Ed.), International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC) (1992). ACM, 387–396.

[18] J. J. Nuño-Ballesteros, B. Oréfice and J. N. Tomazella, *The Bruce-Roberts number of a function on a weighted homogeneous hypersurface*, Q. J. Math. **64** (2013), 269–280.

[19] B. Oréfice-Okamoto, *O número de Milnor de uma singularidade isolada*, Tese, São Carlos, 2011.

[20] K. Saito, *Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math **27** (1980), 265–291.

[21] T. Shibuta and S. Tajima, *An algorithm for computing the Hilbert-Samuel multiplicities and reductions of zero-dimensional ideals of Cohen-Macaulay local ring*, Journal of Symbolic Computation, **96** (2020), 108–121.

[22] S. Tajima, *On polar varieties, logarithmic vector fields and holonomic D-modules*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu **40** (2013), 41–51.

[23] S. Tajima, Y. Nakamura and K. Nabeshima, *Standard bases and algebraic local cohomology for zero dimensional ideals*, Advanced Studies in Pure Mathematics **56** (2009), 341–361.

[24] S. Tajima and K. Nabeshima, *An algorithm for computing torsion differential forms associated to an isolated hypersurface singularity*, to appear in Mathematics in Computer Scinece.

[25] B. Teissier, *Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney*, Singularités à Cargèse, Astérisque **7-8** (1973), 285–362.

[26] B. Teissier, *Variétés polaires, II, Multiplicités polaires, sections planes , et conditions de Whitney*, Lecture Notes in Math. **961** (1982), 314–491.

[27] F. Treves, Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels, Academic Press, 1967.

[28] J. Wahl, *Automorphisms and deformations of quasi-homogeneous singularities*, in Sympos. Pure. Math. **40-2**. Amer. Math. Soc., Providence, RI (1983), 613–624.