

パネルデータモデルを用いた グリーンボンドプレミアムの推定について

高崎経済大学・経済学部* 宮田 庸一

Yoichi Miyata

Faculty of Economics,

Takasaki City University of Economics

高崎経済大学・経済学部* 佐藤 敦子

Atsuko Sato

Faculty of Economics,

Takasaki City University of Economics

概要

アンバランスなパネルデータに対する固定効果推定量に対する一致性および漸近正規性の厳密な証明を与える。さらに固定効果モデルを用いたグリーンボンドプレミアムの推定の仕方を説明し、実データ解析を行う。

1 はじめに

近年、日本を含む世界各地で、気候変動に伴う多くの自然災害により大きな被害を受けている。このような現状を改善するために、ESG投資といわれる環境 (Environment)、社会 (Social)、ガバナンス (Governance) の要素も考慮にいった持続可能で責任ある投資を行う動きが、ここ十年の間で大きく注目を集めている。環境分野に関連する資金調達を目的に発行されるグリーンボンドは ESG 投資対象として市場認知が高まっている。グリーンボンド (Green Bond) とは、企業や地方自治体等が、国内外のグリーンプロジェクトに要する資金を調達するために発行する債券と定義される (グリーンボンド発行促進プラッ

* 〒370-0801 高崎市上並榎町 1300

トフォーム^{*1}(環境省)より)。このホームページによると、2019年の世界のグリーンボンド発行額は2500億ドルを超えていることから注目の強さがわかる。このとき、投資家の観点から見ると、グリーンボンドと通常の社債や地方債(バニラボンド, Vanilla Bond)を比較したときに、どちらに投資すべきか?という問題がある。なぜなら同一発行体によるグリーンボンドとバニラボンドは同じ社債格付けを有し、かつ一般的なグリーンボンドのコベナンツ(資金調達に関する特約条項)はバニラボンドと同じであることが多いからである。一方で、グリーンボンドへの投資は、持続可能な社会を作ることに貢献するといった、投資家の意志を反映する機会と捉えることもできる。グリーンボンドの持つ魅力を評価する一つの手法として、グリーンボンドプレミアム^{*2}が知られており、“同じ年限”を持つグリーンボンドとバニラボンドの利回り差(スプレッド差)として定義される(Larcker and Watts, 2020)。Zerbib (2019)においては、グリーンボンドと満期までの残存期間が近く、格付け、債券の支払い順位、元利払いの仕組みなどが同じバニラボンドを人工的に構築し、そのグリーンボンドの利回り^{*3}からこの人工的に作ったバニラボンドの利回りを差し引いたものを考えた。そして、そこから流動性のもつ情報を、固定効果モデルを用いて差し引いた量をグリーンボンドプレミアムとして定義した。

このため、本報告においては、Zerbib (2019)で与えられた固定効果モデルを用いたグリーンボンドプレミアムの推定方法を説明し、最近の債券の利回りのデータを用いて、グリーンボンドプレミアムの推定を行う。債券の場合、それぞれが異なる発行日と満期日を持つため、対象とする期間において、複数の債券のデータが全て揃っていない状況にある。このため、このようなアンバランスなデータに対して、固定効果モデルを適用する必要がある。アンバランスなパネルデータに対する固定効果モデルを用いた推定については、Balestra and Krishnakumar (2008), Baltagi (2008), Greene (2003)のような多くの書籍で触れてはいるが、大抵、通常の固定効果モデルにおける推定と同様のことがいえると述べるにとどまり、テクニカルな条件については説明していないことが多い。このため、アンバランスな固定効果モデルの固定効果推定量に対して、時系列方向のサイズを固定し、クロスセクショナルの方向のサイズを大きくしたときの、固定効果推定量の一致性と漸近正規性に対する条件についても補足を行う。2章および3章では、グリーンボンドと比較するバニラボンドをどのようにして作るのかを宮田、佐藤(2020)に従って説明を行う。

*1 <http://greenbondplatform.env.go.jp/policies-data/list/world.html>

*2 しばしば Greenium, Green Premium とも呼ばれる

*3 アスクサイドの利回りを使う考え方と、ビッドサイドの利回りを使う考え方がある

2 マッチング法

グリーンボンドと、満期までの残存期間が近いもので、格付け、債券の支払い順位などが同じようなバニラボンドを人工的に作るためには、グリーンボンドに似た特徴を持つバニラボンド (Conventional bond ともいう。以後 CB と略記) を見つける必要がある。ここでは、Zerbib (2019) の方法に従ったグリーンボンド (Green Bond, 以後 GB と略記) に近い動きをするバニラボンドの選び方を説明する。なお、Maturity はある時点 (ここでは 2019 年 12 月 12 日とした) から満期までの残存期間 (単位は年) を表す。それぞれの GB に対して、以下の条件を満たす CB を選ぶ:

1. 同じ発行体
2. 同じ通貨 (ドル, ユーロ,...)
3. グリーンボンドと同じ格付け AAA, AA, A, BBB, BB, non-rated. 3つの格付け会社 (S&P, Moody's, Fitch) の格付けを利用する。ただし A^+ や AA^- のような $+$ と $-$ は取り除く。そのうえで、多数決の原理で、最も多数を占める格付けをその債券の評価とする。例えば、ある債券の格付けが、S&P: AA, Moody's: AA, Fitch: AAA のときは、この債券の格付けは AA となる。また債券に対する評価が2つしかないときには、高い評価の方を採用した。例えば、ある債券 B の格付けが、S&P: AA, Moody's: ×, Fitch: AAA のときは、この債券の格付けは AAA となる。
4. 同じ Bond structure: 満期一括償還かコーラブル債か (本研究では満期一括償還のみを取り扱う)
5. 同じ Seniority (発行体の投資家に対する支払い順位)
6. 同じ Collateral (債券の支払いに発行体が担保を付けているかどうか)
7. 同じ Coupon type (固定利率か否か)
8. $|\text{GB の Maturity} - \text{CB の Maturity}| < 2(\text{年})$
9. $|\text{GB の発行日} - \text{CB の発行日}| < 6(\text{年})$
10. $\frac{1}{4} < \frac{\text{GB の発行額}}{\text{CB の発行額}} < 4$

ただし、上記の 9., 10. は流動性 (Liquidity) に関係している変数となる。もし、上記の条件を満たす CB が 2 個以上ない場合には、その GB は対象から除外する。これらの操作により絞り込まれた、2 個以上の CB に対して、その GB と最も Maturity が近い CB を 2 個選ぶ。ここでは、これを CB1, CB2 とする。

なお、上記の条件を満たす各債券におけるアスクサイドの利回りのデータ

$\{y_{it}^{CB1}, y_{it}^{CB2}, y_{it}^{GB}\}$ ($i = 1, \dots, N, t = t_i, \dots, t_i - 1 + T_i$) を集める. 記号の簡略化のため, 今後は $T_i^* = t_i - 1 + T_i$ とおく. この表記は, 時系列データ方向については, 開始時点 t_i と終了時点 T_i^* が, 各 i について異なってよいということである.

3 グリーンボンドプレミアムの推定

3.1 人工的なバニラボンドの作成

Zerbib (2019, p.43) による補間法を説明する. ここで $Maturity_{s,t}$ は債券 $s \in \{GB, CB1, CB2\}$ の満期までの残存期間 (単位は年) とする.

Step 1. 3つの組 (GB, CB1, CB2) に対する利回りと $Maturity$ の時系列データ

$(Maturity_{CB1,t}, y_t^{CB1}), (Maturity_{CB2,t}, y_t^{CB2}), Maturity_{GB,t}$ を準備する.

Step 2. それぞれの t に対して, 直線の傾きを $a_t^* = \frac{y_t^{CB1} - y_t^{CB2}}{Maturity_{CB1,t} - Maturity_{CB2,t}}$, および直線の切片を $b_t^* = y_t^{CB1} - a_t^* Maturity_{CB1,t}$ で計算する.

Step 3. 線形補間により, グリーンボンドとマッチングさせる人工のバニラボンドの利回りを $\tilde{y}_t^{CB} = a_t^* Maturity_{GB,t} + b_t^*$ により推定する.

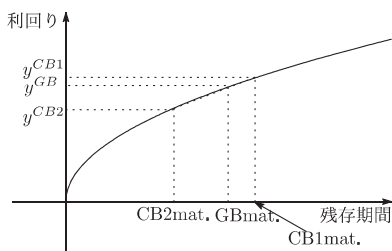


図1 内挿 (補間)

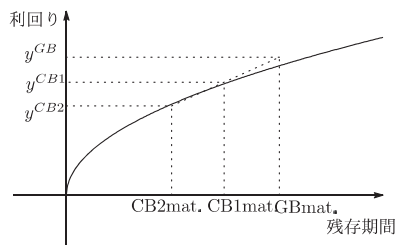


図2 外挿

3.2 流動性に対する代理変数のデータの作成

GB の流動性と人工的に作った CB の流動性の代理変数としては, それぞれの債券の bid ask yields spread (BA) を用いる. 例えば, i 番目のグリーンボンドにおいては, $BA_{it}^{*GB} := \text{ビッドサイドの利回り}(\%)_{it} - \text{アスクサイドの利回り}(\%)_{it}$ となる. これは流動性の指標として, 実務においては, よく使われている (角間, 2012). ここで, マッチングさせた CB1, CB2, GB の i 番目の系列の流動性を $\{BA_{it}^{CB1}, BA_{it}^{CB2}, BA_{it}^{GB}\}_{t=t_i, \dots, T_i^*}$ とす

る。また、 $d_1 = |\text{Green Bond maturity} - \text{CB1 maturity}|$, $d_2 = |\text{Green Bond maturity} - \text{CB2 maturity}|$ とおく。これを用いて、人工的な CB の bid ask yields spread を以下のようにして作成する：

$$BA_{it}^{CB} = \frac{d_2}{d_1 + d_2} BA_{it}^{CB1} + \frac{d_1}{d_1 + d_2} BA_{it}^{CB2}. \quad (1)$$

そして、これにより作られた系列 BA_{it}^{CB} を用いて、GB と CB の流動性のずれを

$$\Delta BA_{it} = BA_{it}^{GB} - BA_{it}^{CB} \quad (2)$$

と定義する。

3.3 推定手法

ΔBA_{it} を説明変数とし、 $\Delta \tilde{y}_{it} = y_{it}^{GB} - \tilde{y}_{it}^{CB}$ を被説明変数とした、以下の固定効果モデルを考える。

$$\Delta \tilde{y}_{it} = p_i + \beta \Delta BA_{it} + \epsilon_{it} \quad (i = 1, \dots, N, t = t_i, \dots, T_i^*), \quad (3)$$

ただし p_i を観測できない個別効果とし、 ϵ_{it} を攪乱項とする。ここで、

$$\mathbf{y}_i = \begin{pmatrix} \Delta \tilde{y}_{it_i} \\ \vdots \\ \Delta \tilde{y}_{iT_i^*} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_i = \begin{pmatrix} \Delta BA_{it_i} \\ \vdots \\ \Delta BA_{iT_i^*} \end{pmatrix}, \quad (i = 1, \dots, N)$$

とおき、 ι を転置行列を表す記号、 $\mathbf{1}_{T_i}$ は $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)'$ は 1 が T_i 個並んだベクトルとし、 $\boldsymbol{\epsilon}_i = (\epsilon_{it_i}, \dots, \epsilon_{iT_i^*})'$ とすると、(3) 式は

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{1}_{T_i} p_i + \mathbf{X}_i \beta + \boldsymbol{\epsilon}_i \quad (i = 1, \dots, N) \quad (4)$$

となる。これらはアンバランスなパネルデータモデルのため、 \mathbf{y}_i は T_i 次元のベクトルとなる。これより (8) 式の Within 変換を行う行列 $\mathbf{W}_{N,i} = \mathbf{I}_{T_i} - \mathbf{1}_{T_i} \mathbf{1}'_{T_i} / T_i$ を (4) 式の左から乗ざると、 $\mathbf{W}_{N,i} \mathbf{1}_{T_i} = \mathbf{0}$ より、 $\mathbf{W}_{N,i} \mathbf{y}_i = \mathbf{W}_{N,i} \mathbf{1}_{T_i} p_i + \mathbf{W}_{N,i} \mathbf{X}_i \beta + \mathbf{W}_{N,i} \boldsymbol{\epsilon}_i$ となる。これより

$$\dot{\mathbf{y}}_i = \ddot{\mathbf{X}}_i \beta + \ddot{\boldsymbol{\epsilon}}_i \quad (i = 1, \dots, N) \quad (5)$$

となる。ただし $\dot{\mathbf{y}}_i = \mathbf{W}_{N,i} \mathbf{y}_i$, $\ddot{\mathbf{X}}_i = \mathbf{W}_{N,i} \mathbf{X}_i$, $\ddot{\boldsymbol{\epsilon}}_i = \mathbf{W}_{N,i} \boldsymbol{\epsilon}_i$ とする。よって、Fixed Effect (FE) 推定量は $\hat{\beta}_{FE} = \left(\sum_{i=1}^N \ddot{\mathbf{X}}_i' \ddot{\mathbf{X}}_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^N \ddot{\mathbf{X}}_i' \dot{\mathbf{y}}_i$ となる。FE 推定量の漸近的

な性質は5章で説明する。また、 $\hat{\beta}_{FE}$ の分散に対しては、Arellano (1987)によるWhite型の推定を行う。これは、以下の形で与えられる： $\hat{\epsilon}_i := \ddot{y}_i - \ddot{X}_i \hat{\beta}_{FE}$ とおく。そして、

$$V_{Arellano}(\hat{\beta}_{FE}) := \left(\sum_{i=1}^N \ddot{X}_i' \ddot{X}_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^N \ddot{X}_i' \hat{\epsilon}_i \hat{\epsilon}_i' \ddot{X}_i \right) \left(\sum_{i=1}^N \ddot{X}_i' \ddot{X}_i \right)^{-1} \quad (6)$$

を計算する。これにより、グリーンボンドプレミアムを $\hat{p}_i := \frac{1}{T_i} \sum_{t=t_i}^{T_i^*} \Delta \tilde{y}_{it} - \left(\frac{1}{T_i} \sum_{t=t_i}^{T_i^*} \Delta BA_{it} \right) \hat{\beta}_{FE}$ として推定する。

4 実データ解析

4.1 データ

クロスセクションの数 $N = 54$ 、計測期間は2019年8月1日から2019年12月20日までであり、系列の長さ $T = 52 \sim 102$ のアンバランスなパネルデータを使用する。尚、データの総数は5284個となる。2章に従って、1つのグリーンボンドと、そのグリーンボンドと似た特徴をもつ2つのバニラボンドの組を作る。そしてCB1, CB2, GBの*i*番目の系列の流動性の組の代理変数 $\{BA_{it}^{*CB1}, BA_{it}^{*CB2}, BA_{it}^{*GB}\}$ としては、3.2章で述べたbid-ask yields spread BA_{it}^* を利用する。

4.2 Bloomberg Industry Classification System (BICS) level1 について

2020年2月22日現在、以下の11個のセクターカテゴリーに分類されていることを確認した。この分類は、グリーンボンドプレミアムを推定した後のカテゴリー分けをするときに用いる。

- Communications (C)
- Consumer Discretionary (CD, 一般消費財)
- Consumer Staples (CS, 生活必需品)
- Energy (E, エネルギー)
- Financials (F, 金融)
- Government (G, 政府)
- Health Care
- Industrials (I, 工業)
- Materials
- Technology

- Utilities (U, 公共事業)

今回使用するグリーンボンドのデータの所属しているセクターは、C, CD, F, G, I, U の 6 種類である。

4.3 グリーンボンドプレミアム の推定

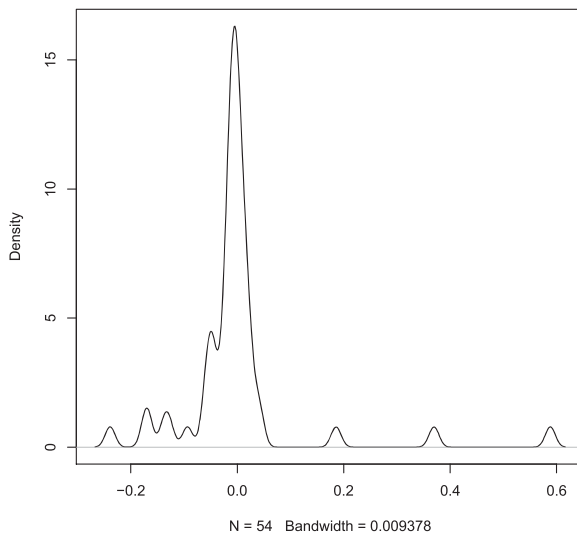
3.3 章で与えたモデル (3) における固定効果推定量 $\hat{\beta}_{FE}$ と, (6) 式で与えた Arellano 推定量に基づく標準誤差は下記の形で与えられる。

	推定値	標準誤差	p 値
β	-0.8055	0.1329	8.57E-10

また決定係数は $R^2 = 0.055$ となる。この値は低い値ではあるが, Zerbib (2019) の決定係数が 0.013 なので, ここではこの結果を認めることにする。^{*4}

以下がグリーンボンドプレミアム \hat{p}_i のデータに対する密度推定および要約統計量となる。グリーンボンドプレミアム \hat{p}_i は, マイナスの値であればあるほど, グリーンボンドの方が, 投資家から好まれていると解釈できる。

^{*4} 実際, 動的なパネルモデルを適用することができ, その場合は決定係数は劇的に改善することを確認した。しかしながら, ラグ付きの説明変数 $\Delta \hat{y}_{i,t-1}$ は流動性の情報を含んでいるため, 流動性の情報を 2 回引いてしまうことになる。



Min	Q1	Median	Mean	Q3	Max
-0.2388	-0.0252	-0.0066	-0.0027	0.0058	0.5881

ただし Q1, Q3 は第 1 四分位, 第 3 四分位点とする. なお, グリーンボンドプレミアムの平均は -0.0027 と極めて 0 に近い値を取っているが, これは外れ値の影響もあると考えられる. これらのグリーンボンドプレミアムのデータに対して, 分布の中心が 0 であるかの検定を行うために, Zerbib (2019) は Wilcoxon signed rank test を用いている. 今回も”形式的”に, この検定 $H_0 : Me = 0$ vs $H_a : Me < 0$ を行う^{*5}と, p 値 = 0.0150 となり, 有意水準 5% の下では有意であるが, 今回の推定値の列 (\hat{p}_i) ($i = 1, \dots, N$) においては, Wilcoxon signed rank test で条件で必要となる母集団分布の対称性は成り立たない可能性が高いことが密度プロットからわかる. このため, Fisher の符号検定も併せて行ったところ p 値 = 0.010 となり, 有意性を確認することができた. しかし, グリーンボンドプレミアムの中央値が約 -0.7bp というのは非常に小さい値である. なお, ここで用いた 2 つのノンパラメトリック検定については, Hollander et al. (2013) を参照のこと.

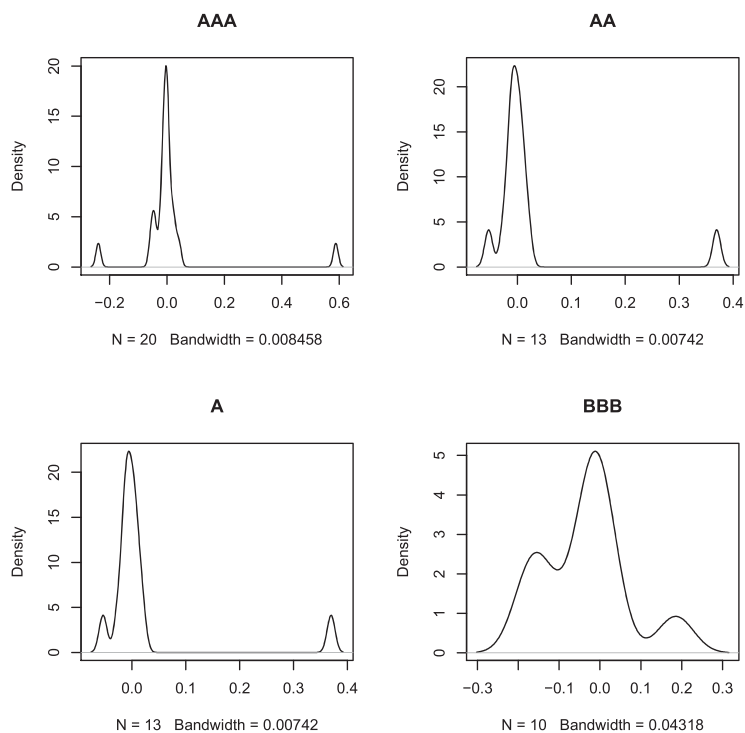
^{*5} Me はグリーンボンドプレミアムの母集団があったと考え, その母集団における中央値を表している

4.4 各特長ごとのグリーンボンドプレミアムの推定

ここでは、前の章にて推定された 54 個のグリーンボンドプレミアム \hat{p}_i ($i = 1, \dots, 54$) に対して、各カテゴリーに分けて、その中央値に対する仮説検定 $H_0 : \text{Me} = 0$ vs $H_a : \text{Me} < 0$ を行った。W は Wilcoxon signed rank test, F は Fisher の符号検定の省略記号とする。

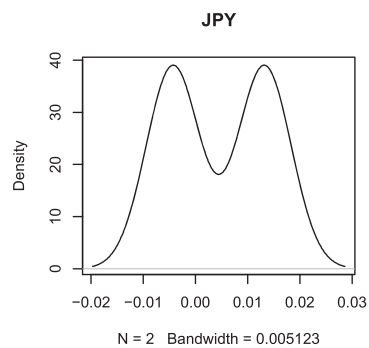
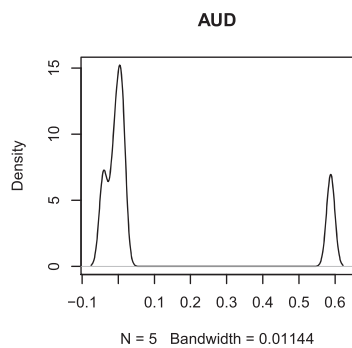
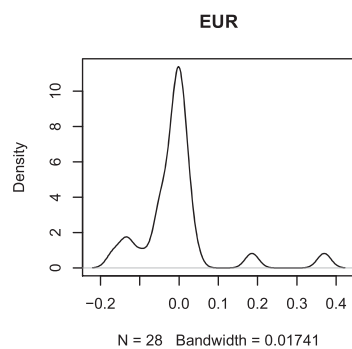
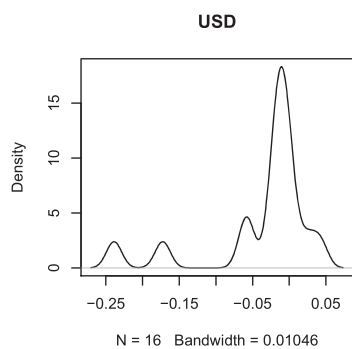
rate	size	中央値	平均値	p-value(W)	p-value(F)
AAA	20	-0.0035	0.0118	0.1841	0.1316
AA	13	-0.0043	0.0217	0.2487	0.2905
A	13	-0.0043	0.0217	0.2487	0.2905
BBB	10	-0.0164	-0.0349	0.0967	0.0547

また、それぞれの格付けのグリーンボンドプレミアムに対する密度推定は下記のとおりである。



以下は通貨別のグリーンボンドプレミアムに対する仮説検定および各種統計量となる。

currency	size	中央値	平均値	p-value(W)	p-value(F)
USD	16	-0.0133	-0.0353	0.0125	* 0.0106 *
EUR	28	-0.0053	-0.0051	0.0785	0.0925
AUD	5	0.0043	0.1102	0.5938	0.8125
CAD	1	-0.0033	-0.0033	—	—
SEK	1	0.0219	0.0219	—	—
JPY	2	0.0045	0.0045	0.75	0.75



sector	size	中央値	平均値	p-value(W)	p-value(F)	
C	1	-0.0045	-0.0045	0.5	0.5	
CD	1	-0.0043	-0.0043	0.5	0.5	
F	26	-0.0102	-0.0215	0.0204	*	0.0378 *
G	23	-0.0071	0.0033	0.0948	0.105	
I	1	0.3696	0.3696	1	1	
U	2	-0.012	-0.012	0.5	0.75	

結論としては、USD におけるグリーンボンドにおいては、有意水準 5% の下でグリーンボンドプレミアムを確認することができた。USD 発行のグリーンボンドは、バニラボンドと比べて平均で-3.5bp、中央値としては-1.3bp タイトな状況となっていることがわかる。一方、それ以外の通貨に対しては、有意性は確認できていない。またセクター別においては、ファイナンス部門が、平均で-2.2bp、中央値としては-1.0bp タイトな状況になっており、有意水準 5% の下で有意性を確認することができた。なお、国別におけるグリーンボンドプレミアムにおいては、有意水準 5% の下では確認できなかった。

5 固定効果モデルにおける推定理論

ここではアンバランスなパネルデータに対する固定効果モデル

$$y_{it} = \alpha_i + \mathbf{x}'_{it}\boldsymbol{\beta} + \epsilon_{it}, \quad (i = 1, \dots, N, t = t_i, \dots, T_i^*) \quad (7)$$

における固定効果推定量の漸近的な性質について説明を行う。ただし y_{it} は被説明変数、 \mathbf{x}_{it} を k 変量の説明変数のベクトル、 ϵ_{it} を攪乱項とする。また $T_i^* = t_i - 1 + T_i$ は 2 章で定義した記号とする。 k 次元ベクトル $\boldsymbol{\beta}$ を推定するためには、モデル (7) において、それぞれの i に対して平均を取ると

$$\frac{1}{T_i} \sum_{t=t_i}^{T_i^*} y_{it} = \alpha_i + \frac{1}{T_i} \sum_{t=t_i}^{T_i^*} \mathbf{x}'_{it}\boldsymbol{\beta} + \frac{1}{T_i} \sum_{t=t_i}^{T_i^*} \epsilon_{it}$$

となる。ここで $\bar{y}_i = (1/T_i) \sum_{t=t_i}^{T_i^*} y_{it}$ 、 $\bar{\mathbf{x}}_i = (1/T_i) \sum_{t=t_i}^{T_i^*} \mathbf{x}_{it}$ 、 $\bar{\epsilon}_i = (1/T_i) \sum_{t=t_i}^{T_i^*} \epsilon_{it}$ とおき、モデル (7) から引くと

$$y_{it} - \bar{y}_i = (\mathbf{x}_{it} - \bar{\mathbf{x}}_i)' \boldsymbol{\beta} + \epsilon_{it} - \bar{\epsilon}_i \quad (8)$$

となる。これより、

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_{1t_1} - \bar{y}_1 \\ \vdots \\ y_{1T_1^*} - \bar{y}_1 \\ y_{2t_2} - \bar{y}_2 \\ \vdots \\ y_{NT_N^*} - \bar{y}_N \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{y}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{x}'_{1t_1} - \bar{\mathbf{x}}'_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}'_{1T_1^*} - \bar{\mathbf{x}}'_1 \\ \mathbf{x}'_{2t_2} - \bar{\mathbf{x}}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}'_{NT_N^*} - \bar{\mathbf{x}}'_N \end{pmatrix}}_{\ddot{\mathbf{X}}} \boldsymbol{\beta} + \underbrace{\begin{pmatrix} \epsilon_{1t_1} - \bar{\epsilon}_1 \\ \vdots \\ \epsilon_{1T_1^*} - \bar{\epsilon}_1 \\ \epsilon_{2t_2} - \bar{\epsilon}_2 \\ \vdots \\ \epsilon_{NT_N^*} - \bar{\epsilon}_N \end{pmatrix}}_{\ddot{\boldsymbol{\epsilon}}} \quad (9)$$

となり、

$$\dot{\mathbf{y}} = \ddot{\mathbf{X}}\boldsymbol{\beta} + \ddot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (10)$$

という表現を得る。このモデルの最小二乗推定量 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{FE} = (\ddot{\mathbf{X}}'\ddot{\mathbf{X}})^{-1}\ddot{\mathbf{X}}'\dot{\mathbf{y}}$ が、 $\boldsymbol{\beta}$ に対する固定効果推定量となる。

なお、 $\dot{\mathbf{y}}_i = \begin{pmatrix} y_{it_i} - \bar{y}_i \\ \vdots \\ y_{iT_i^*} - \bar{y}_i \end{pmatrix}$, $\ddot{\boldsymbol{\epsilon}}_i = \begin{pmatrix} \epsilon_{it_i} - \bar{\epsilon}_i \\ \vdots \\ \epsilon_{iT_i^*} - \bar{\epsilon}_i \end{pmatrix}$, $\ddot{\mathbf{X}}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{x}'_{it_i} - \bar{\mathbf{x}}'_i \\ \vdots \\ \mathbf{x}'_{iT_i^*} - \bar{\mathbf{x}}'_i \end{pmatrix}$ とおくと、 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{FE} = (\sum_{i=1}^N \ddot{\mathbf{X}}_i'\ddot{\mathbf{X}}_i)^{-1} \sum_{i=1}^N \ddot{\mathbf{X}}_i'\dot{\mathbf{y}}_i$ と表すことができる。ここで、以下の条件を仮定する。

- (A1) $(\mathbf{X}_i, \alpha_i, \boldsymbol{\epsilon}_i)$ ($i = 1, \dots, N$) は独立である。
- (A2) 任意の $i \in \{1, \dots, N\}$ に対して、 $E(\boldsymbol{\epsilon}_i | \mathbf{X}_i, \alpha_i) = \mathbf{0}$ 、ただし $\boldsymbol{\epsilon}_i = (\epsilon_{it_i}, \dots, \epsilon_{iT_i^*})'$ とする。
- (A3) ある定数 $c > 0$ が存在して、 $\forall n \in \mathbb{N}$, $\det\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E(\ddot{\mathbf{X}}_i'\ddot{\mathbf{X}}_i)\right) \geq c$ 。
- (A4) $E(\boldsymbol{\epsilon}_i \boldsymbol{\epsilon}_i' | \mathbf{X}_i, \alpha_i) = \boldsymbol{\Sigma}_i$ は \mathbf{X}_i, α_i に依存しない。また $\sup_{i \in \mathbb{N}} \lambda_{\max}(\boldsymbol{\Sigma}_i) < \infty$ とする。ただし、 $\lambda_{\max}(\mathbf{M})$ は行列 \mathbf{M} の最大固有値を表す。
- (A5) $\sup_{i \in \mathbb{N}} E\left\{\|\ddot{\mathbf{X}}_i'\ddot{\mathbf{X}}_i\|^2\right\} < \infty$
- (A6) (Lindeberg 条件) 任意の $\epsilon > 0$ に対して、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N E\left\{\left\|\frac{1}{\sqrt{N}}\ddot{\mathbf{X}}_i'\ddot{\boldsymbol{\epsilon}}_i\right\|^2 1_{\|\ddot{\mathbf{X}}_i'\ddot{\boldsymbol{\epsilon}}_i/\sqrt{N}\| \geq \epsilon}\right\} = 0 \quad (11)$$

が成り立つ。また正値定符号行列 \mathbf{V} が存在して、

$$\sum_{i=1}^N \text{Var}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\ddot{\mathbf{X}}_i'\ddot{\boldsymbol{\epsilon}}_i\right) \rightarrow \mathbf{V} \quad (N \rightarrow \infty) \quad (12)$$

とする。 $\text{Var}(\bullet)$ は分散共分散行列を表す記号、 1_{\bullet} は定義関数とする。

上記の条件について、 α_i は確率変数であっても、定数であってもどちらでもよい。もし α_i を定数として扱う場合は、条件 (A1), (A2), (A4) において α_i を削除すればよい。(A2) は狭義の外生性 (strict exogeneity) の仮定であり、固定効果推定量の一致性を示すための本質的な条件となる。ここで、条件 $E(\epsilon_i | \mathbf{x}_{it}, \alpha_i) = \mathbf{0}$ の下では一致性を示すことができないことに注意されたい。その理由としては千木良 (2008) に丁寧な説明がある。また条件 (A1), (A3) および (A5) の下で、 $\hat{\beta}_{FE}$ の $(\ddot{\mathbf{X}}' \ddot{\mathbf{X}})^{-1}$ が定義可能となる。

このとき、 T_i は全て固定し、 $N \rightarrow \infty$ とした時に以下のことが成り立つ。なお証明は付録 A に載せてある。

定理 1 (一致性) 条件 (A1)–(A5) の下で、 $\hat{\beta}_{FE} \xrightarrow{a.s.} \beta$ 。ただし、 $\xrightarrow{a.s.}$ は概収束を表す記号とする。

定理 2 (漸近正規性) 条件 (A1)–(A4), (A6) の下で、

$$\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ddot{\mathbf{X}}_i' \ddot{\mathbf{X}}_i \right) \sqrt{N}(\hat{\beta}_{FE} - \beta) \xrightarrow{L} N(\mathbf{0}, \mathbf{V}) \quad (13)$$

が成り立つ。ただし、 \xrightarrow{L} は分布収束を意味する。さらに (A5) を加えると、以下の結果が成り立つ。

$$\mathbf{V}^{-1/2} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E(\ddot{\mathbf{X}}_i' \ddot{\mathbf{X}}_i) \right) \sqrt{N}(\hat{\beta}_{FE} - \beta) \xrightarrow{L} N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_k) \quad (14)$$

次に攪乱項 ϵ_i に対して、強い仮定を入れた条件を考える。

(A4)⁺ $E(\epsilon_i \epsilon_i' | \mathbf{X}_i, \alpha_i) = \sigma^2 \mathbf{I}_{T_i}$ 、ただし \mathbf{I}_{T_i} は $T_i \times T_i$ の単位行列とする。

条件 (A6) の代わりに、以下の仮定 (A6)* を考える。

(A6)* (11) 式が成り立つ。正値定符号行列 $\tilde{\mathbf{V}}$ が存在して、

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E(\ddot{\mathbf{X}}_i' \ddot{\mathbf{X}}_i) \rightarrow \tilde{\mathbf{V}} \quad (N \rightarrow \infty). \quad (15)$$

命題 3 条件 (A1), (A2), (A4)⁺, (A5), (A6)* の下で、

$$\sqrt{N}(\hat{\beta}_{FE} - \beta) \xrightarrow{L} N(\mathbf{0}, \sigma^2 \tilde{\mathbf{V}}^{-1}) \quad (16)$$

が成り立つ。

命題3から、 $\hat{\beta}_{FE}$ の漸近分散は $\sigma^2 \tilde{V}^{-1}/N$ となり、その推定量は、 σ^2 の一致推定量 $\hat{\sigma}^2$ (即ち、 $\text{plim} \hat{\sigma}^2 = \sigma^2$)を用いて、 $\hat{\sigma}^2 \left(\sum_{i=1}^N \ddot{X}'_i \ddot{X}_i \right)^{-1}$ で与えられる。しかし、これは条件(A4)⁺が成り立つことを前提として作られたものであり、実際には強い仮定となる。しかし、条件(A4)⁺が成り立たない場合(即ち(A4)の場合)にでも、一致性を持つ漸近分散の推定量が、(6)式で与えたArellano-White推定量となる。^{*6}

なお、切片 α_i に対する推定量は、 $\hat{\alpha}_i := \frac{1}{T_i} \sum_{t=t_i}^{T_i^*} \ddot{y}_{it} - \left(\frac{1}{T_i} \sum_{t=t_i}^{T_i^*} \ddot{x}'_{it} \right) \hat{\beta}_{FE}$ となるが、一致性を持たない。 $\hat{\alpha}_i$ が一致性を持つためには、 $T_i \rightarrow \infty$ とする必要がある。

6 最後に

我々はこれまで、Zerbib (2019) で用いられた固定効果モデルを用いたグリーンボンドプレミアムの推定方法について解説した。この手法は統計ソフトR, Stataなどにより容易に計算することができる。しかし以下の点に留意する必要がある。

1. T_i のサイズが N よりも大きい債券も多々あるため、 T_i ($i = 1, \dots, N$)を固定して $N \rightarrow \infty$ の場合だけでなく、 $\min_i T_i \rightarrow \infty$ かつ $N \rightarrow \infty$ の場合の、推定量および検定統計量の漸近的な評価を考える必要がある。幸い、固定効果推定量の一致性においてはそのような場合であったとしても、Pesaran (2015, pp.641-642)により、自然な拡張が可能である。一方で、推定量の漸近分布においても、攪乱項に正規性を仮定することによりPesaran (2015), Ahn and Moon (2014)のような拡張が可能であろう。
2. 今回、固定効果モデルにおける説明変数である流動性の差の代理変数としては、GBと人工的に構築したCBのbid-ask yields spreadの差を用いた。一方で流動性の別の代理変数としては、closing percent quoted bid-ask spread (Fong et al., 2017)がある。Zerbib (2019)はこれを採用している。しかし我々が計測した期間においては、利回りのデータに対してclosing percent quoted bid-ask spread型の指標を適用するのは、利回りがマイナスになる場合もあったこともあり、うまくいかなかった。またBachelet et al. (2019, Table 4)の固定効果モデルにおいては、流動性の差よりも、利回りのデータに対して20日移動平均を施した後の数値の分散の差の方が有意になることを示している。どのような流動性の代理変数がよいかについては、さらなる議論が必要になる。

^{*6} この推定量の一致性を示すためには、追加のモーメント条件が必要になる。

謝辞

本研究は、「平成 31 年度 ESG 金融ステップアップ・プログラム推進事業におけるグリーンファイナンス・ポータルサイト整備委託業務」(株式会社日本総合研究所)からの研究助成を受けている。

参考文献

- Ahn, S. C., and Moon, H. R. (2014). Large-N and large-T properties of panel data estimators and the Hausman test. In *Festschrift in Honor of Peter Schmidt* (pp. 219-258). Springer, New York, NY.
- Arellano, M. (1987). Practitioners' Corner: Computing robust standard errors for within-groups estimators. *Oxford bulletin of Economics and Statistics*, 49(4), 431-434.
- Bachelet, M. J., Becchetti, L., and Manfredonia, S. (2019). The green bonds premium puzzle: The role of issuer characteristics and third-party verification. *Sustainability*, 11(4), 1098.
- Balestra, P., and Krishnakumar, J. (2008). Fixed effects models and fixed coefficients models. In *The econometrics of panel data* (pp. 23-48). Springer, Berlin, Heidelberg.
- Baltagi, B. (2008). *Econometric analysis of panel data*. John Wiley & Sons.
- Fong, K. Y., Holden, C. W., and Trzcinka, C. A. (2017). What are the best liquidity proxies for global research?. *Review of Finance*, 21(4), 1355-1401.
- Greene, W. H. (2003). *Econometric Analysis*, 5th edn Prentice-Hall.
- Harville, D. A. (1998). *Matrix algebra from a statistician's perspective*. New York: Springer-Verlag.
- Hollander, M., Wolfe, D. A., and Chicken, E. (2013). *Nonparametric statistical methods* (Vol. 751). John Wiley & Sons.
- Larcker, D. F., and Watts, E. M. (2020). Where's the Greenium??. *Journal of Accounting and Economics*, 101312. (In press)
- Pesaran, M. H. (2015). *Time series and panel data econometrics*. Oxford University Press.
- White, H. (2014). *Asymptotic theory for econometricians*. Academic press.

Zerbib, O. D. (2019). The effect of pro-environmental preferences on bond prices: Evidence from green bonds. *Journal of Banking and Finance*, 98, 39–60.

角間和男. (2012). 日本国債市場の流動性構造と執行コスト: 電子取引プラットフォームにおける引き合いデータの分析と考察 (特集 市場流動性について). *証券アナリストジャーナル*, 50(9), 42–53.

千木良弘朗. (2008). 静学的パネルデータ分析一観一. *経済研究*, 59(2), 97–111.

宮田庸一, 佐藤敦子. (2020). 環境省「平成 31 年度 ESG 金融ステップアップ・プログラム推進事業におけるグリーンファイナンス・ポータルサイト整備委託業務」に係る研究「グリーンボンド等のプライシング・リスク・インパクト等に関する調査研究」報告書.

付録 A 証明

定理 4 (White (2014), p.49, Corollary 3.48) $\{Z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ を独立な実確率変数の列とする. $\mu_i = E(Z_i)$ とし, $\bar{Z}_n = (1/n) \sum_{i=1}^n Z_i$, $\bar{\mu}_n = (1/n) \sum_{i=1}^n \mu_i$ とおく. ある正の定数 $\delta > 0$ が存在して, $\sup_{i \in \mathbb{N}} E|Z_i|^{1+\delta} < \infty$ となるとき,

$$\bar{Z}_n - \bar{\mu}_n \xrightarrow{a.s.} 0$$

が成り立つ.

証明: White (2014, p.49) に証明の概略が書いてあるため, 省略する.

補題 5 (Harville (1998), p.196, Theorem 13.7.3) B を $k \times k$ 行列, $D = \text{diag}\{d_1, \dots, d_k\}$ とする. このとき,

$$|D + B| = \sum_{\{i_1, \dots, i_r\}} d_{i_1} \dots d_{i_r} |B^{\{i_1, \dots, i_r\}}|$$

ただし, $\{i_1, \dots, i_r\}$ は $\{1, \dots, k\}$ の部分集合とする. このため, この総和記号には 2^k 個の項がある. $B^{\{i_1, \dots, i_r\}}$ は行列 B の i_j ($j = 1, \dots, r$) 番目の行と列を取り除いた小行列式 (Principal submatrix) とする. $\{i_1, \dots, i_r\} = \emptyset$ のとき, $|B^{\{i_1, \dots, i_r\}}| = |B|$ となる. また便宜上 $\{i_1, \dots, i_r\} = \{1, \dots, k\}$ のとき, $|B^{\{i_1, \dots, i_r\}}| = 1$ とする.

証明: 略.

補題 6 $\{Z_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ を $k \times k$ の確率行列の列とする. このとき, $k \times k$ の定数 (非確率) 行列の列 $\{A_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ が存在して, 以下の条件を満たすと仮定する.

- (i) $\mathbf{Z}_N - \mathbf{A}_N \xrightarrow{a.s.} \mathbf{O}$
- (ii) $\mathbf{A}_N = O(1)$, 即ち $\limsup_{N \rightarrow \infty} \|\mathbf{A}_N\| < \infty$
- (iii) ある定数 $c > 0$ が存在して, 全ての大きな $N \in \mathbb{N}$ に対して, $\det(\mathbf{A}_N) \geq c$.

そのとき, 以下のことが成り立つ. (a) ある定数 $c_1 > 0$ が存在して, $P(\liminf_{N \rightarrow \infty} \det(\mathbf{Z}_N) \geq c_1) = 1$. (b) $\mathbf{Z}_N^{-1} - \mathbf{A}_N^{-1} \xrightarrow{a.s.} \mathbf{O}$.

証明:概略のみを説明する. $\mathbf{E}_N = \mathbf{Z}_N - \mathbf{A}_N$ とおくと, 仮定 (i) より $\mathbf{E}_N = o(1)$ となる.

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{Z}_N) &= \det(\mathbf{E}_N + \mathbf{A}_N) \\ &= \det(\mathbf{A}_N) \det(\mathbf{I}_k + \mathbf{E}_N \mathbf{A}_N^{-1}). \end{aligned} \quad (17)$$

ここで $\mathbf{G}_N = \mathbf{E}_N \mathbf{A}_N^{-1}$ とおくと, 仮定 (ii), (iii) より $\mathbf{G}_N = o(1)$. ここで補題 5 より,

$$\det(\mathbf{I}_k + \mathbf{E}_N \mathbf{A}_N^{-1}) = 1 + \sum_{S_N} |\mathbf{G}_N^{\{i_1, \dots, i_r\}}| \rightarrow 1, \quad \text{a.s.},$$

ただし $S_N = \{i_1, \dots, i_r | \{1, \dots, k\} \text{ の部分集合すべて } \} \setminus \{1, \dots, k\}$. よって $\det(\mathbf{Z}_N) - \det(\mathbf{A}_N) \rightarrow 0$ a.s. これより (a) が成り立つ. (b) は $\mathbf{Z}_N^{-1} - \mathbf{A}_N^{-1} = -\mathbf{Z}_N^{-1} \mathbf{E}_N \mathbf{A}_N^{-1}$ より示せる. \square

定理 1 の証明. (10) 式から, $\dot{\mathbf{y}}_i = \ddot{\mathbf{X}}_i \boldsymbol{\beta} + \ddot{\boldsymbol{\epsilon}}_i$ となるより, 最小二乗推定量の確率的表現を導く方法により

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{FE} = \boldsymbol{\beta} + \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ddot{\mathbf{X}}_i' \ddot{\mathbf{X}}_i \right)^{-1} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ddot{\mathbf{X}}_i' \ddot{\boldsymbol{\epsilon}}_i \quad (18)$$

となる. ここで $\mathbf{e}_l = (0 \cdots 0, 1, 0, \dots, 0)'$ を l 番目の成分のみ 1 となる k 次元ベクトルとする. \mathbf{D}_i はベキ等であることより,

$$\begin{aligned} E \|\mathbf{e}_l' \ddot{\mathbf{X}}_i' \ddot{\boldsymbol{\epsilon}}_i\|^2 &= E(\mathbf{e}_l' \ddot{\mathbf{X}}_i' \boldsymbol{\Sigma}_i \ddot{\mathbf{X}}_i \mathbf{e}_l) \\ &\leq \mathbf{e}_l' E(\ddot{\mathbf{X}}_i' \ddot{\mathbf{X}}_i) \mathbf{e}_l \lambda_{\max}(\boldsymbol{\Sigma}_i) \\ &\leq E(\|\ddot{\mathbf{X}}_i' \ddot{\mathbf{X}}_i\|) \lambda_{\max}(\boldsymbol{\Sigma}_i) \end{aligned}$$

となる. これより, 仮定 (A4), (A5) から $\sup_{i \in \mathbb{N}} E \|\mathbf{e}_l' \ddot{\mathbf{X}}_i' \ddot{\boldsymbol{\epsilon}}_i\|^2 < \infty$ となる. ここで, 定理 4 をから, それぞれの $l \in \{1, \dots, k\}$, $(1/N) \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_l' \ddot{\mathbf{X}}_i' \ddot{\boldsymbol{\epsilon}}_i \xrightarrow{a.s.} 0$. これより,

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ddot{\mathbf{X}}_i' \ddot{\boldsymbol{\epsilon}}_i \xrightarrow{a.s.} \mathbf{0} \quad (19)$$

となる.

次に, $\left((1/N) \sum_{i=1}^N \ddot{\mathbf{X}}_i' \ddot{\mathbf{X}}_i \right)^{-1} = O(1)$ であることを示す.

仮定 (A1), (A5) より定理 4 を用いると, ある正の定数 $M_1 > 0$ が存在して,

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\ddot{\mathbf{X}}_i' \ddot{\mathbf{X}}_i - E(\ddot{\mathbf{X}}_i' \ddot{\mathbf{X}}_i) \right) \xrightarrow{a.s.} \mathbf{O} \quad (20)$$

となる. $\mathbf{A}_N = (1/N) \sum_{i=1}^N E(\ddot{\mathbf{X}}_i' \ddot{\mathbf{X}}_i)$ とおく. このとき, 仮定 (A5) より,

$$\|\mathbf{A}_N\| \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sqrt{E\|\ddot{\mathbf{X}}_i' \ddot{\mathbf{X}}_i\|^2} \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sqrt{M_1} = \sqrt{M_1}$$

となる. よって, 仮定 (A3), 補題 6 より, $\left((1/N) \sum_{i=1}^N \ddot{\mathbf{X}}_i' \ddot{\mathbf{X}}_i \right)^{-1} - \left((1/N) \sum_{i=1}^N E(\ddot{\mathbf{X}}_i' \ddot{\mathbf{X}}_i) \right)^{-1} \xrightarrow{a.s.} \mathbf{O}$ となる. よって $\left((1/N) \sum_{i=1}^N \ddot{\mathbf{X}}_i' \ddot{\mathbf{X}}_i \right)^{-1} = O(1)$. この結果と, 式 (19) を式 (18) に適用すると, 結果が証明される. \square

定理 2 の証明. 式 (18) を変形することにより,

$$\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ddot{\mathbf{X}}_i' \ddot{\mathbf{X}}_i \right) \sqrt{N}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{FE} - \boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \ddot{\mathbf{X}}_i' \ddot{\boldsymbol{\epsilon}}_i \quad (21)$$

となる. 仮定 (A6) より, Lindeberg-Feller の中心極限定理を用いると, 式 (13) が成り立つ. (14) 式は自明なので, 証明を省略する. \square

命題 3 の証明. 条件 (A6)* において,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \text{Var} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \ddot{\mathbf{X}}_i' \ddot{\boldsymbol{\epsilon}}_i \right) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E \left(\ddot{\mathbf{X}}_i' \ddot{\boldsymbol{\epsilon}}_i \ddot{\boldsymbol{\epsilon}}_i' \ddot{\mathbf{X}}_i \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma^2 E \left(\ddot{\mathbf{X}}_i' \ddot{\mathbf{X}}_i \right) \longrightarrow \sigma^2 \tilde{\mathbf{V}}. \end{aligned}$$

すなわち, 条件 (A6) の (12) 式に相当するものを確認できる. 条件 (A1), (A5), $\tilde{\mathbf{V}}$ の正値定符号性より, $(1/N) \sum_{i=1}^N \ddot{\mathbf{X}}_i' \ddot{\mathbf{X}}_i - (1/N) \sum_{i=1}^N E(\ddot{\mathbf{X}}_i' \ddot{\mathbf{X}}_i) \longrightarrow \mathbf{O}$ a.s. ($N \rightarrow \infty$), かつ $\liminf_{N \rightarrow \infty} \det \left((1/N) \sum_{i=1}^N \ddot{\mathbf{X}}_i' \ddot{\mathbf{X}}_i \right) > 0$ a.s. これより, $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{FE}$ はほとんど至る所で定義可能となる. よって $\tilde{\mathbf{V}} \sqrt{N}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{FE} - \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{L} N(\mathbf{0}, \sigma^2 \tilde{\mathbf{V}})$ となり, 求める式が導出される. \square