On the extension of maximum likelihood estimation to a one-sided truncated family of distributions

筑波大学　赤平　昌文
Masafumi Akahira
University of Tsukuba

1. はじめに

従来, 下側切断分布の典型としてパレート分布が知られていて, これはファイナンス, 物理学, 水文学等の多くの分野でよく用いられ, 母数の推定について多くの文献がある (Johnson et al.[JKB94], Arnold[Ar15]). そして, パレート分布を含む, 切断母数 γ と自然母数 θ をもつ下側切断指数型分布族において, γ を局外母数として大きさ n の無作為標本に基づく θ の推定問題が論じられた. 特に, γ が既知のときの θ の最尤推定量 (maximum likelihood estimator, 略して MLE) $\hat{\theta}^{\gamma}_{ML}$ と γ が未知のときの θ の MLE $\hat{\theta}_{ML}$ が 1 次のオーダーでは漸近的に同等になることが Bar-Lev[B84] において示されたが, 2 次のオーダーでは補正 MLE $\hat{\theta}_{ML^*}$ が $\hat{\theta}^{\gamma}_{ML}$ より漸近的に良くないことが Akahira[A16] において示された. その際, 2 次の漸近分散の差による 2 次の漸近損失の概念が用いられたが, これは Hodges and Lehmann [HL70] による漸近欠損性 (asymptotic deficiency) に類似している. その他にも, 局外母数が存在する場合に関心のある母数の推定について様々論じられている (Barndorff-Nielsen and Cox[BC94], Lehmann[L99]). 最近, 両側切断指数型分布族でも片側切断の場合と同様な結果が得られ, さらに, θ を局外母数としたときに γ の推定問題も考えられて, 最尤推定やベイズ推定の観点から興味ある結果が得られ, それらはまとめられて Akahira[A17] のモノグラフとして出版されている.

本稿では切断指数型分布族より一般的な切断分布族に拡張しても最尤推定量に関して同様の結果が成り立つことを示し, その例として切断コーシー分布等の場合を挙げる. その適用範囲はかなり広くなる.

2. 準備

まず, $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ をたがいに独立に, いずれも (Lebesgue 測度に関する) 密度

$$f(x;\theta,\gamma) = \begin{cases} p(x,\theta)/b(\theta,\gamma) & (c < \gamma \le x < d), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \tag{2.1}$$

をもつ分布 $P_{\theta,\gamma}$ に従う確率変数列とする. ただし, $-\infty \le c < d \le \infty$ とし, $p(x,\theta)$ は区間 $[\gamma, d)$ 上で正値とする. また, $\gamma \in (c,d)$ について

$$\Theta(\gamma) := \left\{ \theta \;\middle|\; 0 < b(\theta,\gamma) := \int_\gamma^d p(x,\theta)dx < \infty \right\}$$

とおくと, $\gamma_1 < \gamma_2$ となる任意の $\gamma_1,\ \gamma_2 \in (c,d)$ について $\Theta(\gamma_1) \subset \Theta(\gamma_2)$ になる. ここで, 任意の $\gamma \in (c,d)$ について $\Theta \equiv \Theta(\gamma)$ は空でない開区間であると仮定する. このとき,

分布族 $\mathcal{P}_o = \{P_{\theta,\gamma} \mid \theta \in \Theta,\ \gamma \in (c,d)\}$ を片側切断分布族 (one-sided truncated family (oTF) of distributions) という．厳密には下側切断分布族 (lower-truncated family (ℓTF) of distributions) という．特に, (2.1) において

$$p(x,\theta) = a(x)e^{\theta u(x)} \tag{2.2}$$

の形になるとき, 片側切断指数型分布族 (one-sided truncated exponential family (oTEF) of distributions) $\mathcal{P}_e$ という ([B84], [A16], [A17])．ただし, $a(\cdot)$ は正値でほとんど至るところ連続で, 区間 (γ,d) 上で $u(\cdot)$ は絶対連続で $du(x)/dx \not\equiv 0$ とする．

次に, $p(x,\theta)$ が区間 $[\gamma,d)$ のほとんどすべての x について, θ に関して 3 回微分可能であるとし, $b(\theta,\gamma)$ の積分記号下で θ に関して 3 回微分可能であると仮定する．また,

$$\lambda_1(\theta,\gamma) := E_{\theta,\gamma}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\log p(X_1,\theta)\right], \quad \lambda_2(\theta,\gamma) = V_{\theta,\gamma}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log p(X_1,\theta)\right), \tag{2.3}$$

$$\tilde{\lambda}_j(\theta,\gamma) := \frac{\partial^{j-1}}{\partial\theta^{j-1}}\lambda_1(\theta,\gamma) \quad (j=2,3,\cdots), \tag{2.4}$$

$$\lambda_{(j)}(\theta,\gamma) := \frac{1}{b(\theta,\gamma)}\left\{\frac{\partial^j}{\partial\theta^j}b(\theta,\gamma)\right\} \quad (j=1,2,3) \tag{2.5}$$

とおく．このとき

$$\lambda_{(1)}(\theta,\gamma) = \lambda_1(\theta,\gamma) \tag{2.6}$$

になる．また, $\ell(\theta,x) := \log p(x,\theta)$, $\ell^{(j)}(\theta,x) := (\partial^j/\partial\theta^j)\ell(\theta,x)$ $(j=1,2,3)$ とおき, 次の期待値は存在すると仮定し, それらを左辺の記号で表わす．

$$I_p(\theta,\gamma) := E_{\theta,\gamma}\left[\left\{\ell^{(1)}(\theta,X_1)\right\}^2\right], \tag{2.7}$$

$$J_p(\theta,\gamma) := E_{\theta,\gamma}\left[\left\{\ell^{(1)}(\theta,X_1)\right\}\left\{\ell^{(2)}(\theta,X_1)\right\}\right], \tag{2.8}$$

$$K_p(\theta,\gamma) := E_{\theta,\gamma}\left[\left\{\ell^{(1)}(\theta,X_1)\right\}^3\right], \tag{2.9}$$

$$L_p(\theta,\gamma) := E_{\theta,\gamma}\left[\left\{\ell^{(1)}(\theta,X_1)\right\}\left\{\ell^{(3)}(\theta,X_1)\right\}\right], \tag{2.10}$$

$$H_p(\theta,\gamma) := E_{\theta,\gamma}\left[\left\{\ell^{(1)}(\theta,X_1)\right\}^4\right] - 3I_p^2(\theta,\gamma), \tag{2.11}$$

$$M_p(\theta,\gamma) := E_{\theta,\gamma}\left[\left\{\ell^{(2)}(\theta,X_1)\right\}^2\right] - I_p^2(\theta,\gamma), \tag{2.12}$$

$$N_p(\theta,\gamma) := E_{\theta,\gamma}\left[\left\{\ell^{(1)}(\theta,X_1)\right\}^2\ell^{(2)}(\theta,X_1)\right] + I_p^2(\theta,\gamma). \tag{2.13}$$

そして, $E_{\theta,\gamma}[\ell^{(1)}(\theta,X_1)\{\ell^{(2)}(\theta,X_1)\}^2]$, $E_{\theta,\gamma}[\{\ell^{(1)}(\theta,X_1)\}^2\ell^{(3)}(\theta,\gamma)]$ が存在すると仮定する．このとき, (2.5), (2.7)〜(2.13) より

$$\kappa_{(2)}(\theta,\gamma) := E_{\theta,\gamma}\left[\ell^{(2)}(\theta,X_1)\right] = \lambda_{(2)}(\theta,\gamma) - I_p(\theta,\gamma), \tag{2.14}$$

$$\kappa_{(3)}(\theta,\gamma) := E_{\theta,\gamma}\left[\ell^{(3)}(\theta,X_1)\right] = \lambda_{(3)}(\theta,\gamma) - 3J_p(\theta,\gamma) - K_p(\theta,\gamma), \tag{2.15}$$

$$\kappa_{(4)}(\theta,\gamma) := E_{\theta,\gamma}\left[\ell^{(4)}(\theta,X_1)\right] = \lambda_{(4)}(\theta,\gamma) - 4L_p(\theta,\gamma) - 6N_p(\theta,\gamma) - H_p(\theta,\gamma) - 3M_p(\theta,\gamma) \tag{2.16}$$

になる. また

$$Z_1(\theta,\gamma) := \frac{1}{\sqrt{\lambda_2(\theta,\gamma)n}}\sum_{i=1}^{n}\left\{\ell^{(1)}(\theta,X_i) - \lambda_1(\theta,\gamma)\right\}, \tag{2.17}$$

$$Z_j(\theta,\gamma) := \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\left\{\ell^{(j)}(\theta,X_i) - \kappa_{(j)}(\theta,\gamma)\right\} \quad (j=2,3) \tag{2.18}$$

とおく. 上記の設定の下で, oTF において θ の最尤推定について考える.

3. 切断母数 γ が既知のときの θ の最尤推定量 $\hat{\theta}_{ML}^{\gamma}$ の 2 次の漸近的性質

まず, 確率ベクトル $(X_1,\cdots,X_n)$ を $\boldsymbol{X}$ とし, $X_{(1)} \le \cdots \le X_{(n)}$ を $\boldsymbol{X}$ に基づく順序統計量とする. いま, $\gamma \le x_{(1)} = \min_{1\le i\le n} x_i$, $x_{(n)} = \max_{1\le i\le n} x_i < d$ となる $\boldsymbol{x} = (x_1,\cdots,x_n)$ について, θ の尤度関数は

$$L^{\gamma}(\theta;\boldsymbol{x}) = \frac{1}{b^n(\theta,\gamma)}\prod_{i=1}^{n} p(x_i,\theta)$$

になる. ここで, θ の MLE を $\hat{\theta}_{ML}^{\gamma}$ とすると, これは尤度方程式

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l^{(1)}(\theta,X_i) = \lambda_1(\theta,\gamma) \tag{3.1}$$

を満たす. また

$$U_\gamma := \sqrt{\lambda_2(\theta,\gamma)n}\left(\hat{\theta}_{ML}^{\gamma} - \theta\right) \tag{3.2}$$

とおく. このとき, 次のことが成り立つ.

定理 3.1 密度 (2.1) をもつ oTF $\mathcal{P}_o$ において, γ が既知のとき θ の MLE $\hat{\theta}_{ML}^{\gamma}$ について U_γ の確率展開は

$$\begin{aligned} U_\gamma = Z_1 &+ \frac{1}{\lambda_2\sqrt{n}}Z_1Z_2 + \frac{\kappa_{(3)} - \tilde{\lambda}_3}{2\lambda_2^{3/2}\sqrt{n}}Z_1^2 + \frac{1}{\lambda_2^2 n}Z_1Z_2^2 + \frac{3(\kappa_{(3)} - \tilde{\lambda}_3)}{2\lambda_2^{5/2}n}Z_1^2Z_2 \\ &+ \frac{1}{2\lambda_2^{3/2}n}Z_1^2Z_3 + \frac{1}{2\lambda_2^2 n}\left\{\frac{1}{\lambda_2}\left(\kappa_{(3)} - \tilde{\lambda}_3\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\kappa_{(4)} - \tilde{\lambda}_4\right)\right\}Z_1^3 + O_p\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \end{aligned} \tag{3.3}$$

である. また, U_γ の 2 次の漸近平均, 漸近分散は, それぞれ

$$E_{\theta,\gamma}(U_\gamma) = \frac{1}{\lambda_2^{3/2}\sqrt{n}}\left\{J_p - \lambda_1\kappa_{(2)} + \frac{1}{2}\left(\kappa_{(3)} - \tilde{\lambda}_3\right)\right\} + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{3.4}$$

$$
\begin{aligned}
V_{\theta,\gamma}(U_\gamma) =& 1+\frac{1}{n}\left[\frac{2}{\lambda_2^2}\left\{N_p-I_p^2-2\lambda_1 J_p+\kappa_{(2)}\left(\lambda_1^2-\lambda_2\right)\right\}\right. \\
&+\frac{1}{\lambda_2^3}\left(\kappa_{(3)}-\tilde{\lambda}_3\right)\left(K_p-3\lambda_1 I_p+2\lambda_1^3\right) \\
&+\frac{3}{\lambda_2^2}\left\{M_p+I_p^2-\kappa_{(2)}^2+\frac{2}{\lambda_2}\left(J_p-\lambda_1\kappa_{(2)}\right)^2\right\}+\frac{11}{\lambda_2^3}\left(\kappa_{(3)}-\tilde{\lambda}_3\right)\left(J_p-\lambda_1\kappa_{(2)}\right) \\
&\left.-\frac{1}{\lambda_2^3}\left(J_p-\lambda_1\kappa_{(2)}\right)^2+\frac{7}{2\lambda_2^3}\left(\kappa_{(3)}-\tilde{\lambda}_3\right)^2+\frac{1}{\lambda_2^2}\left(\kappa_{(4)}-\tilde{\lambda}_4\right)+\frac{3}{\lambda_2^2}\left(L_p-\lambda_1\kappa_{(3)}\right)\right] \\
&+O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

である.

証明については, $\hat{\theta}_{ML}^{\gamma}$ は尤度方程式 (3.1) を満たすので, Taylor 展開を用いて (3.2) の U_γ の確率展開 (3.3) を導出し, (2.7)〜(2.16) より (3.4), (3.5) を得る (Akahira[A20]).

系 3.1([A16]) $p(x,\theta)$ として (2.2) を伴う密度 (2.1) をもつ oTEF $\mathcal{P}_e$ において, γ が既知のとき θ の MLE $\hat{\theta}_{ML}^{\gamma}$ について U_γ の確率展開は

$$
U_\gamma=Z_1-\frac{\lambda_3}{2\lambda_2^{3/2}\sqrt{n}}Z_1^2+\frac{1}{2n}\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^3}-\frac{\lambda_4}{3\lambda_2^2}\right)Z_1^3+O_p\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \qquad (3.6)
$$

である. ただし, $\lambda_j=\lambda_j(\theta,\gamma)=(\partial^j/\partial\theta^j)\log b(\theta,\gamma)\ (j=3,4)$. また, U_γ の 2 次の漸近平均, 漸近分散は, それぞれ

$$
E_{\theta,\gamma}(U_\gamma)=-\frac{\lambda_3}{2\lambda_2^{3/2}\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right), \qquad (3.7)
$$

$$
V_{\theta,\gamma}(U_\gamma)=1+\frac{1}{n}\left(\frac{5\lambda_3^2}{2\lambda_2^3}-\frac{\lambda_4}{\lambda_2^2}\right)+O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \qquad (3.8)
$$

である.

証明については, oTEF $\mathcal{P}_e$ のとき $Z_2=Z_3=0$, $\kappa_{(2)}=\kappa_{(3)}=\kappa_{(4)}=0$, $\tilde{\lambda}_j=\lambda_j\ (j=3,4)$, $I_p=\lambda_1^2+\lambda_2$, $J_p=0$, $K_p=\lambda_3+3\lambda_1\lambda_2+\lambda_1^3$, $L_p=0$, $M_p=-I_p^2$, $N_p=I_p^2$ になるから, (3.3)〜(3.5) より (3.6)〜(3.8) を得る.

4. 切断母数 γ が未知のときの θ の最尤推定量 $\hat{\theta}_{ML}$ の 2 次の漸近的性質

まず, $\gamma\le x_{(1)},\ x_{(n)}<d$ となる $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ が与えられるとき, (θ,γ) の尤度関数は

$$
L(\theta,\gamma;\boldsymbol{x})=\frac{1}{b^n(\theta,\gamma)}\prod_{i=1}^n p(x_i,\theta) \qquad (4.1)
$$

になる. ここで, θ と γ のそれぞれの MLE を $\hat{\theta}_{ML}$, $\hat{\gamma}_{ML}$ とすれば, (4.1) から $\hat{\gamma}_{ML}=X_{(1)}$ になり, $L(\hat{\theta}_{ML},X_{(1)};\boldsymbol{X})=\sup_{\theta\in\Theta}L(\theta,X_{(1)};\boldsymbol{X})$ になるので $\hat{\theta}_{ML}$ は尤度方程式を満たす, す

なわち

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ell^{(1)}\left(\hat{\theta}_{ML}, X_i\right) = \lambda_1\left(\hat{\theta}_{ML}, X_{(1)}\right) \tag{4.2}$$

になる. ただし, $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ とする. ここで, $\lambda_2 = \lambda_2(\theta, \gamma)$ とし,

$$U = \sqrt{\lambda_2 n}\left(\hat{\theta}_{ML} - \theta\right), \quad T_{(1)} = n\left(X_{(1)} - \gamma\right)$$

とおく. このとき, 次のことを得る ([A20]).

定理 4.1 密度 (2.1) をもつ oTF $\mathcal{P}_o$ において, γ が未知のときの θ の MLE $\hat{\theta}_{ML}$ を γ が既知のときの θ の MLE $\hat{\theta}^{\gamma}_{ML}$ と同じ 2 次の漸近的偏りをもつように補正した MLE を

$$\hat{\theta}_{ML^*} := \hat{\theta}_{ML} - \frac{1}{b_{(1)}\left(\hat{\theta}_{ML}, X_{(1)}\right)\lambda_2\left(\hat{\theta}_{ML}, X_{(1)}\right)n}\left\{\frac{\partial}{\partial\gamma}\lambda_1\left(\hat{\theta}_{ML}, X_{(1)}\right)\right\} \tag{4.3}$$

とする. ただし, $b_{(1)}(\theta, \gamma) = (\partial/\partial\gamma)\log b(\theta, \gamma)$ とする. このとき, $U^* = \sqrt{\lambda_2 n}(\hat{\theta}_{ML^*} - \theta)$ の確率展開は

$$\begin{aligned} U^* = U &- \frac{1}{b_{(1)}\sqrt{\lambda_2 n}}\left(\frac{\partial\lambda_1}{\partial\gamma}\right) + \frac{1}{b_{(1)}\lambda_2 n}\left\{\frac{\partial\lambda_1}{\partial\gamma}\left(\frac{1}{\lambda_2}\left(\frac{\partial\lambda_2}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{b_{(1)}}\left(\frac{\partial b_{(1)}}{\partial\theta}\right)\right) - \frac{\partial\tilde{\lambda}_2}{\partial\gamma}\right\}Z_1 \\ &+ O_p\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \end{aligned} \tag{4.4}$$

である. ただし

$$\begin{aligned} U = &Z_1 + \frac{1}{\lambda_2\sqrt{n}}Z_1Z_2 + \frac{\kappa_{(3)} - \tilde{\lambda}_3}{2\lambda_2^{3/2}\sqrt{n}}Z_1^2 - \frac{1}{\sqrt{\lambda_2 n}}\left(\frac{\partial\lambda_1}{\partial\gamma}\right)T_{(1)} + \frac{1}{\lambda_2^2 n}Z_1Z_2^2 + \frac{3(\kappa_{(3)} - \tilde{\lambda}_3)}{2\lambda_2^{5/2}n}Z_1^2Z_2 \\ &+ \frac{1}{2\lambda_2^{3/2}n}Z_1^2Z_3 + \frac{1}{2\lambda_2^2 n}\left\{\frac{1}{\lambda_2}\left(\tilde{\lambda}_3 - \kappa_{(3)}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\tilde{\lambda}_4 - \kappa_{(4)}\right)\right\}Z_1^3 - \frac{1}{\lambda_2^{3/2}n}\left(\frac{\partial\lambda_1}{\partial\gamma}\right)Z_2T_{(1)} \\ &+ \frac{1}{\lambda_2 n}\left\{\frac{1}{\lambda_2}\left(\tilde{\lambda}_3 - \kappa_{(3)}\right)\left(\frac{\partial\lambda_1}{\partial\gamma}\right) - \frac{\partial\tilde{\lambda}_2}{\partial\gamma}\right\}Z_1T_{(1)} + O_p\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \end{aligned} \tag{4.5}$$

である. また, U^* の 2 次の漸近平均, 漸近分散はそれぞれ

$$E_{\theta,\gamma}(U^*) = \frac{1}{\lambda_2^{3/2}\sqrt{n}}\left\{J_p - \lambda_1\kappa_{(2)} + \frac{1}{2}\left(\kappa_{(3)} - \tilde{\lambda}_3\right)\right\} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right), \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned} V_{\theta,\gamma}(U^*) = 1 + \frac{1}{n}\Bigg[&\frac{2}{\lambda_2^2}\left\{N_p - I_p^2 - 2\lambda_1 J_p + \kappa_{(2)}\left(\lambda_1^2 - \lambda_2\right)\right\} \\ &+ \frac{1}{\lambda_2^3}\left(\kappa_{(3)} - \tilde{\lambda}_3\right)\left(K_p - 3\lambda_1 I_p + 2\lambda_1^3\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{3}{\lambda_2^2}\left\{M_p+I_p^2-\kappa_{(2)}^2+\frac{2}{\lambda_2}\left(J_p-\lambda_1\kappa_{(2)}\right)^2\right\}\\
&+\frac{11}{\lambda_2^3}\left(\kappa_{(3)}-\tilde{\lambda}_3\right)\left(J_p-\lambda_1\kappa_{(2)}\right)-\frac{1}{\lambda_2^3}\left(J_p-\lambda_1\kappa_{(2)}\right)^2+\frac{7}{2\lambda_2^3}\left(\kappa_{(3)}-\tilde{\lambda}_3\right)^2\\
&+\frac{1}{\lambda_2^2}\left(\kappa_{(4)}-\tilde{\lambda}_4\right)+\frac{3}{\lambda_2^2}\left(L_p-\lambda_1\kappa_{(3)}\right)+\frac{1}{\lambda_2}\left(\ell^{(1)}(\theta,\gamma)-\lambda_1\right)^2\Bigg]+O_p\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

である.

証明については, (4.2) において 2 変数 (θ,γ) の関数の Taylor 展開を用いて定理 3.1 の証明と本質的に同様に進めればよいが, その際

$$
J_p-\lambda_1\kappa_{(2)}=\tilde{\lambda}_3-\kappa_{(3)}-\frac{\partial\lambda_2}{\partial\theta}
$$

を示すことが鍵で, それは可能である ([A20]).

ここで, U_γ と U^* の漸近分散 (3.5) と (4.7) を比較すると, 異なる項は $V_{\theta,\gamma}(U^*)$ の $1/n$ のオーダーの $(\ell^{(1)}(\theta,\gamma)-\lambda_1)^2/\lambda_2$ のみであり, これは密度 (2.1) の非正則な部分, すなわち切断母数 γ に依存する部分から出現すると捉えられ, その他の項は (2.1) の正則な部分から出現すると捉えられる.

系 4.1([A16]) $p(x,\theta)$ として (2.2) を伴う密度 (2.1) をもつ oTEF $\mathcal{P}_e$ において, γ が未知のときに θ の MLE $\hat{\theta}_{ML}$ を γ が既知のときの θ の MLE $\hat{\theta}_{ML}^{\gamma}$ と同じ 2 次の偏りをもつように補正した MLE を

$$
\hat{\theta}_{ML^*}=\hat{\theta}_{ML}+\frac{1}{k\left(\hat{\theta}_{ML},X_{(1)}\right)\lambda_2\left(\hat{\theta}_{ML},X_{(1)}\right)n}\left\{\frac{\partial\lambda_1}{\partial\gamma}\left(\hat{\theta}_{ML},X_{(1)}\right)\right\}
$$

とする. ただし, $k(\theta,\gamma)=a(\gamma)e^{\theta u(\gamma)}/b(\theta,\gamma)$ とする. このとき, $U^*=\sqrt{\lambda_2 n}(\hat{\theta}_{ML^*}-\theta)$ の確率展開は

$$
U^*=U+\frac{1}{k\sqrt{\lambda_2 n}}\left(\frac{\partial\lambda_1}{\partial\gamma}\right)-\frac{1}{k\lambda_2 n}\left\{\delta+\frac{1}{k}\left(\frac{\partial k}{\partial\theta}\right)\left(\frac{\partial\lambda_1}{\partial\gamma}\right)\right\}Z_1+O_p\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)
\tag{4.8}
$$

である. ただし, $k=k(\theta,\gamma)$, $\lambda_j=\lambda_j(\theta,\gamma)=(\partial^j/\partial\theta^j)\log b(\theta,\gamma)$ $(j=3,\ 4)$,

$$
\begin{aligned}
\delta&=\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\left(\frac{\partial\lambda_1}{\partial\gamma}\right)-\frac{\partial\lambda_2}{\partial\gamma},\\
U&=Z_1-\frac{\lambda_3}{2\lambda_2^{3/2}\sqrt{n}}Z_1^2-\frac{1}{\sqrt{\lambda_2 n}}\left(\frac{\partial\lambda_1}{\partial\gamma}\right)T_{(1)}+\frac{\delta}{\lambda_2 n}Z_1T_{(1)}+\frac{1}{2n}\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^3}-\frac{\lambda_4}{3\lambda_2^2}\right)Z_1^3\\
&\qquad+O_p\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

である. また, U^* の 2 次の漸近平均, 漸近分散はそれぞれ

$$E_{\theta,\gamma}(U^*) = -\frac{\lambda_3}{2\lambda_2^{3/2}\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right), \tag{4.10}$$

$$V_{\theta,\gamma}(U^*) = 1 + \frac{1}{n}\left(\frac{5\lambda_3^2}{2\lambda_2^3} - \frac{\lambda_4}{\lambda_2^2}\right) + \frac{1}{\lambda_2 n}\{u(\gamma) - \lambda_1\}^2 + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \tag{4.11}$$

である.

証明については, (2.2) より $\ell^{(1)}(\theta, x) = u(x)$ となるから, あとは系 3.1 の証明と同様にして, (4.4)〜(4.7) より (4.8)〜(4.11) が得られる.

5. $\hat{\theta}_{ML}^{\gamma}$ に対する $\hat{\theta}_{ML^*}$ の 2 次の漸近損失

第 3 節, 第 4 節における γ が既知のときの θ の MLE $\hat{\theta}_{ML}^{\gamma}$ と γ が未知のときの θ の補正 MLE $\hat{\theta}_{ML^*}$ の 2 次の漸近分散を用いて, $\hat{\theta}_{ML}^{\gamma}$ と $\hat{\theta}_{ML^*}$ を漸近的に比較する.

定理 5.1 密度 (2.1) をもつ oTF $\mathcal{P}_o$ において, $\hat{\theta}_{ML}^{\gamma}$ に対する $\hat{\theta}_{ML^*}$ の 2 次の漸近損失は

$$d_n\left(\hat{\theta}_{ML^*}, \hat{\theta}_{ML}^{\gamma}\right) := n\{V_{\theta,\gamma}(U^*) - V_{\theta,\gamma}(U_\gamma)\} = \frac{1}{\lambda_2}\left\{\ell^{(1)}(\theta,\gamma) - \lambda_1\right\}^2 + o(1) \quad (n \to \infty) \tag{5.1}$$

である.

証明は (3.5), (4.7) より明らか. ここで (5.1) の右辺で与えられる 2 次の漸近損失は $\ell^{(1)}(\theta, X)$ の分散 $\lambda_2 = V_{\theta,\gamma}(\ell^{(1)}(\theta, X_1))$ に対する, $X_1 = \gamma$ での $\ell^{(1)}(\theta, X_1)$ の値 $\ell^{(1)}(\theta,\gamma)$ から $\ell^{(1)}(\theta, X_1)$ の平均 $\lambda_1 = E_{\theta,\gamma}[\ell^{(1)}(\theta, X_1)]$ までの距離の比として表現されている.

系 5.1([A16]) $p(x,\theta)$ として (2.2) を伴う密度 (2.1) をもつ oTEF $\mathcal{P}_e$ において, $\hat{\theta}_{ML}^{\gamma}$ に対する $\hat{\theta}_{ML^*}$ の 2 次の漸近損失は

$$d_n\left(\hat{\theta}_{ML^*}, \hat{\theta}_{ML}^{\gamma}\right) := n\{V_{\theta,\gamma}(U^*) - V_{\theta,\gamma}(U_\gamma)\} = \frac{1}{\lambda_2}\{u(\gamma) - \lambda_1\}^2 + o(1) \quad (n \to \infty) \tag{5.2}$$

である. ただし, $\lambda_2 = V_{\theta,\gamma}(u(X_1))$ である.

証明は, (2.2) より $\ell^{(1)}(\theta, x) = u(x)$ となることから定理 5.1 より明らか.

6. 例

本節において切断コーシー分布と (2.2) よりもっと一般の切断指数型分布族の場合に, $\hat{\theta}_{ML}^{\gamma}$ に対する $\hat{\theta}_{ML^*}$ の 2 次の漸近損失を求める.

例 6.1(切断コーシー分布) 分布族 $\mathcal{P}_o$ の密度 (2.1) において

$$p(x,\theta) = \frac{1}{1 + (x/\theta)^2} \quad (-\infty < \gamma \le x < \infty)$$

とする. このとき

$$0 < b(\theta,\gamma) = \int_\gamma^\infty \frac{1}{1 + (x/\theta)^2} dx = \theta\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{\gamma}{\theta}\right) < \infty \quad (\theta \in \Theta = (0, \infty))$$

となる．このとき

$$\lambda_1 = E_{\theta,\gamma}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\log p(X,\theta)\right] = \frac{2}{\theta} - 2\theta E_{\theta,\gamma}\left[\frac{1}{X^2+\theta^2}\right]$$
$$= \frac{1}{\theta} + \frac{\gamma}{\{(\pi/2) - \tan^{-1}(\gamma/\theta)\}(\gamma^2+\theta^2)} \tag{6.1}$$

になる．また

$$E_{\theta,\gamma}\left[\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log p(X,\theta)\right\}^2\right] = E_{\theta,\gamma}\left[\left(\frac{2}{\theta} - \frac{2\theta}{X^2+\theta^2}\right)^2\right]$$
$$= \frac{3}{2\theta^2} + \frac{\theta\gamma}{\{\pi - 2\tan^{-1}(\gamma/\theta)\}(\gamma^2+\theta^2)^2}\left(3 - \frac{5\gamma^2}{\theta^2}\right)$$

となるから, (6.1) より

$$\lambda_2 = V_{\theta,\gamma}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log p(X,\theta)\right)$$
$$= \frac{1}{2\theta^2} - \frac{1}{\{(\pi/2) - \tan^{-1}(\gamma/\theta)\}(\gamma^2+\theta^2)^2}\left\{\frac{\theta\gamma}{2}\left(1 - \frac{\gamma^2}{\theta^2}\right) + \frac{\gamma^2}{(\pi/2) - \tan^{-1}(\gamma/\theta)}\right\} \tag{6.2}$$

となる．ここで, $\xi = \gamma/\theta$ とし, $q(\xi) = 1/(\pi - 2\tan^{-1}\xi)$ とおいて (6.1), (6.2) を (5.1) に代入すると, $\hat{\theta}^{\gamma}_{ML}$ に対する $\hat{\theta}_{ML^*}$ の 2 次の漸近損失は

$$d_n\left(\hat{\theta}_{ML^*}, \hat{\theta}^{\gamma}_{ML}\right) = \frac{2\{1-\xi^2+2\xi q(\xi)\}^2}{(1+\xi^2)^2 - 2\xi q(\xi)\{1-\xi^2+4\xi q(\xi)\}} + o(1) \quad (n\to\infty)$$

になる．

例 6.2(一般の切断指数型分布族) 分布族 $\mathcal{P}_o$ の密度 (2.1) において

$$p(x,\theta) = \exp\{Q(\theta)u(x) + v(x)\} \quad (c < \gamma \le x < d) \tag{6.3}$$

とする．ただし, $Q(\theta)$ は $(-\infty,\infty)$ 上で微分可能であるとし, $u(x)$ は区間 (γ,d) 上で絶対連続で $du(x)/dx \not\equiv 0$ とし, $v(x)$ は (γ,d) のほとんど至るところで連続とする．また,

$$\Theta(\gamma) := \left\{\theta \;\middle|\; 0 < b(\theta,\gamma) := \int_{\gamma}^{d}\exp\{Q(\theta)u(x)+v(x)\}dx < \infty\right\} \quad (\gamma\in(c,d)) \tag{6.4}$$

とおいて, 任意の $\gamma\in(c,d)$ について $\Theta \equiv \Theta(\gamma)$ は空でない開区間とする．このとき, (2.1), (6.3), (6.4) から

$$\lambda_1(\theta,\gamma) = \frac{\partial}{\partial\theta}\log b(\theta,\gamma) = \delta'(\theta)E_{\theta,\gamma}[u(X_1)],$$

$$\lambda_2(\theta,\gamma) = E_{\theta,\gamma}\left[\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log p(X_1,\theta)\right\}^2\right] - \lambda_1^2(\theta,\gamma) = (\delta'(\theta))^2 V_{\theta,\gamma}(u(X_1))$$

となるから, (5.1) より $\hat{\theta}_{ML}^{\gamma}$ に対する $\hat{\theta}_{ML^*}$ の 2 次の漸近損失は

$$d_n\left(\hat{\theta}_{ML^*}, \hat{\theta}_{ML}^{\gamma}\right) = \frac{\{u(\gamma) - E_{\theta,\gamma}[u(X_1)]\}^2}{V_{\theta,\gamma}(u(X_1))} + o(1) \quad (n \to \infty)$$

になる. これは本質的に (5.2) に等しい.

5. おわりに

本稿では, 局外母数として切断母数 γ をもつ一般の片側切断分布族において関心のある母数 θ の MLE の漸近的性質について論じ, γ が既知のときの θ の MLE $\hat{\theta}_{ML}^{\gamma}$ に対する γ が未知のときの θ の補正 MLE $\hat{\theta}_{ML^*}$ の 2 次の漸近損失を求めた. それらから, 従来の片側切断指数型分布族の結果は一般の片側切断分布族の場合に拡張され得ることが分かった. 従って, そのことは議論を切断指数型に限定することは必ずしも本質的でないことを意味し, その結果の適用範囲は広くなる. また, 本稿では下側切断分布族について考えたが, [A17] の Remark 4.5.3 で述べられたように適当な変換によって上側切断分布族の場合にも適用できる. さらに, θ を局外母数として γ の最尤推定問題や両側切断分布族の場合も同様に論じられるであろう.

参考文献

[A16] Akahira, M. (2016). Second order asymptotic comparison of the MLE and MCLE of a natural parameter for a truncated exponential family of distributions. *Ann. Inst. Statist. Math.*, **68**, 469–490.

[A17] Akahira, M. (2017). *Statistical Estimation for Truncated Exponential Families*. Springer Briefs in Statistics, Singapore: Springer Nature.

[A20] Akahira, M. (2020). Maximum likelihood estimation for one-sided truncated family of distributions. In preparation.

[Ar15] Arnold, B. C. (2015). *Pareto Distributions*. 2nd ed. Boca Raton: CRC Press.

[B84] Bar-Lev, S. K. (1984). Large sample properties of the MLE and MCLE for the natural parameter of a truncated exponential family. *Ann. Inst. Statist. Math.*, **36**, Part A, 217–222.

[BC94] Barndorff-Nielsen, O. E. and Cox, D. R. (1994). *Inference and Asymptotics*. London: Chapman & Hall.

[HL70] Hodges, J. L. and Lehmann, E. L. (1970). Deficiency. *Ann. Math. Statist.*, **41**, 783–801.

[JKB94] Johnson, N. L., Kotz, S. and Balakrishnan, N. (1994). *Continuous Univariate Distribution* Vol.1 (2nd ed.), New York: Wiley.

[L99] Lehmann, E. L. (1999). *Elements of Large-Sample Theory.* New York: Springer.