Semi-Fibonacci Programming

— Odd-variable —

岩本 誠一（九州大学·名誉教授）
Seiichi Iwamoto
Professor emeritus, Kyushu University

木村 寛（秋田県立大学 システム科学技術学部）
Yutaka Kimura
Department of Management Science and Engineering
Faculty of Systems Science and Technology
Akita Prefectural University

概 要

本報告では、非同次セミフィボナッチ制約 (nonhomogeneous semi-Fibonacci constraints) をもつ 2 次計画の最小化問題と最大化問題の対を考える。[12] では、最小化問題と最大化問題のそれぞれが偶数個の変数をもつ場合の双対を考えているが、ここではそれぞれ奇数個の変数をもつ問題の双対について考察し、これら問題の間にはフィボナッチ一致双対性 (Fibonacci identical duality) が成り立つことを示す。また双対問題の導出はプラス・マイナス法（Plus-minus Method）で示す。

まず、7 変数の条件付き最小化問題

$$
(\mathrm{P}_1)\quad
\begin{array}{lrl}
\text{minimize} & & y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_7^2 - 2(b_1y_1 + b_3y_3 + b_5y_5 + b_7y_7) \\
\text{subject to} & \text{(i)} & y_1 + y_2 - y_3 = b_2 \\
 & \text{(ii)} & y_3 + y_4 - y_5 = b_4 \\
 & \text{(iii)} & y_5 + y_6 - y_7 = b_6 \\
 & \text{(iv)} & y \in R^7
\end{array}
$$

と、7 変数の条件付き最大化問題

$$
(\mathrm{D}_1)\quad
\begin{array}{lrl}
\text{Maximize} & & -(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \cdots + \mu_7^2) + 2(b_2\mu_2 + b_4\mu_4 + b_6\mu_6) \\
\text{subject to} & \text{(i)}' & \mu_1 - \mu_2 = b_1 \\
 & \text{(ii)}' & \mu_2 + \mu_3 - \mu_4 = b_3 \\
 & \text{(iii)}' & \mu_4 + \mu_5 - \mu_6 = b_5 \\
 & \text{(iv)}' & \mu_6 + \mu_7 = b_7 \\
 & \text{(v)}' & \mu \in R^7
\end{array}
$$

を考える。ただし $(b_1, b_2, \ldots, b_7) \in R^7$ は定数とする。

本報告では 7 変数を対象に述べるが、一般の $(2n-1)$ 変数問題についても成り立つ。今、(P_1) と (D_1) の目的関数をそれぞれ以下で表す：

$$
\begin{aligned}
f(y) &= y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_7^2 - 2(b_1y_1 + b_3y_3 + b_5y_5 + b_7y_7) \\
g(\mu) &= -(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \cdots + \mu_7^2) + 2(b_2\mu_2 + b_4\mu_4 + b_6\mu_6).
\end{aligned}
$$

補題 1 (Fibonacci solution) 7元7連立線形方程式

$$
\text{(NF)} \qquad
\begin{aligned}
y_1 - y_2 &= b_1 & \qquad y_1 + y_2 - y_3 &= b_2 \\
y_2 + y_3 - y_4 &= b_3 & \qquad y_3 + y_4 - y_5 &= b_4 \\
y_4 + y_5 - y_6 &= b_5 & \qquad y_5 + y_6 - y_7 &= b_6 \\
y_6 + y_7 &= b_7
\end{aligned}
$$

は、唯一の解をもつ：

$$
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{pmatrix}
= \frac{1}{21}
\begin{pmatrix}
13b_1 + 8b_2 + 5b_3 + 3b_4 + 2b_5 + b_6 + b_7 \\
-8b_1 + 8b_2 + 5b_3 + 3b_4 + 2b_5 + b_6 + b_7 \\
5b_1 - 5b_2 + 10b_3 + 6b_4 + 4b_5 + 2b_6 + 2b_7 \\
-3b_1 + 3b_2 - 6b_3 + 9b_4 + 6b_5 + 3b_6 + 3b_7 \\
2b_1 - 2b_2 + 4b_3 - 6b_4 + 10b_5 + 5b_6 + 5b_7 \\
-b_1 + b_2 - 2b_3 + 3b_4 - 5b_5 + 8b_6 + 8b_7 \\
b_1 - b_2 + 2b_3 - 3b_4 + 5b_5 - 8b_6 + 13b_7
\end{pmatrix}. \tag{1}
$$

Proof. この方程式系は $Ay = b$ で表される。ただし

$$
A = \begin{pmatrix}
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}, \quad
y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_7 \end{pmatrix}, \quad
b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_7 \end{pmatrix}.
$$

7×7 行列 A は逆行列をもち

$$
A^{-1} = \frac{1}{21}
\begin{pmatrix}
13 & 8 & 5 & 3 & 2 & 1 & 1 \\
-8 & 8 & 5 & 3 & 2 & 1 & 1 \\
5 & -5 & 10 & 6 & 4 & 2 & 2 \\
-3 & 3 & -6 & 9 & 6 & 3 & 3 \\
2 & -2 & 4 & -6 & 10 & 5 & 5 \\
-1 & 1 & -2 & 3 & -5 & 8 & 8 \\
1 & -1 & 2 & -3 & 5 & -8 & 13
\end{pmatrix}
$$

になる。したがって、この方程式系は唯一の解 $y = A^{-1}b$ をもち、(1) を得る。 □

補題 2 (Complementarity) $(y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_7)$ と $(\mu_1,\, \mu_2,\, \ldots,\, \mu_7)$ が条件 (i)∼ (iii) と (i)′ ∼ (iv)′

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 - y_3 &= b_2 & \mu_1 - \mu_2 &= b_1 \\ y_3 + y_4 - y_5 &= b_4 & \mu_2 + \mu_3 - \mu_4 &= b_3 \\ y_5 + y_6 - y_7 &= b_6 & \mu_4 + \mu_5 - \mu_6 &= b_5 \\ & & \mu_6 + \mu_7 &= b_7 \end{aligned}$$

をそれぞれ満たすとき、次の関係式が成り立つ：

$$\sum_{k=1}^{7} y_k \mu_k \;=\; (b_1 y_1 + b_3 y_3 + b_5 y_5 + b_7 y_7) + (b_2 \mu_2 + b_4 \mu_4 + b_6 \mu_6).$$

Proof.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{7} y_k \mu_k \;&=\; y_1(\mu_2 + b_1) + (y_3 - y_1 + b_2)\mu_2 + y_3(\mu_4 - \mu_2 + b_3) + (y_5 - y_3 + b_4)\mu_4 \\ &\qquad + y_5(\mu_6 - \mu_4 + b_5) + (y_7 - y_5 + b_6)\mu_6 + y_7(-\mu_6 + b_7) \\ &=\; (b_1 y_1 + b_3 y_3 + b_5 y_5 + b_7 y_7) + (b_2 \mu_2 + b_4 \mu_4 + b_6 \mu_6). \end{aligned}$$

□

補題 3

(i) (Inequality) 任意の実行可能解 y, μ に対して $g(\mu) \le f(y)$ が成り立つ。

(ii) (Equality) 等号は $y = \mu$ のときのみ成立する。

(iii) (Linearity) さらにこのとき、次が成り立つ。

$$\begin{aligned} f(y) \;&=\; -(b_1 y_1 + b_3 y_3 + b_5 y_5 + b_7 y_7) + (b_2 y_2 + b_4 y_4 + b_6 y_6) \\ g(\mu) \;&=\; -(b_1 \mu_1 + b_3 \mu_3 + b_5 \mu_5 + b_7 \mu_7) + (b_2 \mu_2 + b_4 \mu_4 + b_6 \mu_6). \end{aligned}$$

Proof. さて、最小化問題 (P_1) から最大化問題 (D_1) をプラス・マイナス法（Plus-minus Method）で導こう [10]。この方法では目的関数の 2 次性に着目して、双対変数を係数とする 1 次式を引いて加えている。さらに平方完成も行っている。

$y = (y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_7) \in R^7$ を (P_1) の実行可能解とする。任意の $\mu = (\mu_1,\, \mu_2,\, \ldots,\, \mu_7) \in R^7$ に対してこの 1 次式を引いて加え、制約式 (i) ∼ (iii) を用いると

$$\begin{aligned} & y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_7^2 - 2(b_1 y_1 + b_3 y_3 + b_5 y_5 + b_7 y_7) \\ =\;& y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_7^2 - 2(b_1 y_1 + b_3 y_3 + b_5 y_5 + b_7 y_7) \\ & - 2\mu_1 y_1 - 2\mu_2 y_2 - \cdots - 2\mu_7 y_7 + 2\mu_1 y_1 + 2\mu_2 y_2 + \cdots + 2\mu_7 y_7 \\ =\;& (y_1 - \mu_1)^2 - \mu_1^2 + (y_2 - \mu_2)^2 - \mu_2^2 + \cdots + (y_7 - \mu_7)^2 - \mu_7^2 \\ & + 2\big[(\mu_1 - \mu_2 - b_1) y_1 + (\mu_2 + \mu_3 - \mu_4 - b_3) y_3 \\ & \quad + (\mu_4 + \mu_5 - \mu_6 - b_5) y_5 + (\mu_6 + \mu_7 - b_7) y_7\big] + 2(b_2 \mu_2 + b_4 \mu_4 + b_6 \mu_6) \end{aligned}$$

が成り立つ。特に条件

$$\begin{array}{ll} \text{(i)}'\ \mu_1 - \mu_2 = b_1 & \text{(iii)}'\ \mu_4 + \mu_5 - \mu_6 = b_5 \\ \text{(ii)}'\ \mu_2 + \mu_3 - \mu_4 = b_3 & \text{(iv)}'\ \mu_6 + \mu_7 = b_7 \end{array}$$

の下では

$$\begin{aligned} & y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_7^2 - 2(b_1 y_1 + b_3 y_3 + b_5 y_5 + b_7 y_7) \\ = \ & (y_1 - \mu_1)^2 - \mu_1^2 + \cdots + (y_7 - \mu_7)^2 - \mu_7^2 + 2(b_2\mu_2 + b_4\mu_4 + b_6\mu_6) \end{aligned}$$

であり、不等式

$$\begin{aligned} & y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_7^2 - 2(b_1 y_1 + b_3 y_3 + b_5 y_5 + b_7 y_7) \\ \geq \ & -(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \cdots + \mu_7^2) + 2(b_2\mu_2 + b_4\mu_4 + b_6\mu_6) \end{aligned} \tag{2}$$

が成り立つ。等号は

$$\text{(e)} \quad y_k = \mu_k \quad 1 \leq k \leq 7$$

のときに限り成り立つ。すなわち、(i) $\sim$ (iii) を満たす y と (i)$'$ $\sim$ (iv)$'$ を満たす μ に対して、不等式 (2) が成り立つ。等号は条件 (i) $\sim$ (iii), (e), (i)$'$ $\sim$ (iv)$'$ が成り立つときに限り成立する。この 14 元 14 連立 1 次方程式系は、補題 1 の (NF) に同値になり、唯一の解

$$(\hat{y}_1,\ \hat{y}_2,\ \ldots,\ \hat{y}_7) = (\mu_1^*,\ \mu_2^*,\ \ldots,\ \mu_7^*)$$

をもち、(1) で与えられる。よって、 (P_1) から (D_1) が導かれた。

同様に逆も導こう。$\mu \in R^7$ を (D_1) の実行可能解とする。このとき任意の $y \in R^7$ に対して

$$\begin{aligned} & -(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \cdots + \mu_7^2) + 2(b_2\mu_2 + b_4\mu_4 + b_6\mu_6) \\ = \ & -(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \cdots + \mu_7^2) + 2(b_2\mu_2 + b_4\mu_4 + b_6\mu_6) \\ & \quad + 2y_1\mu_1 + 2y_2\mu_2 + \cdots + 2y_7\mu_7 - 2y_1\mu_1 - 2y_2\mu_2 - \cdots - 2y_7\mu_7 \\ = \ & -\mu_1^2 + 2y_1\mu_1 - \mu_2^2 + 2y_2\mu_2 - \cdots - \mu_7^2 + 2y_7\mu_7 + 2(b_2\mu_2 + b_4\mu_4 + b_6\mu_6) \\ & \quad - 2y_1(b_1 + \mu_2) - 2y_2\mu_2 - 2y_3(b_3 + \mu_4 - \mu_2) - 2y_4\mu_4 \\ & \quad - 2y_5(b_5 + \mu_6 - \mu_4) - 2y_6\mu_6 - 2y_7(b_7 - \mu_6) - 2y_7\mu_7 \\ = \ & -(\mu_1 - y_1)^2 + y_1^2 - (\mu_2 - y_2)^2 + y_2^2 - \cdots - (\mu_7 - y_7)^2 + y_7^2 \\ & \quad - 2(y_1 + y_2 - y_3 - b_2)\mu_2 - 2(y_3 + y_4 - y_5 - b_4)\mu_4 \\ & \quad - 2(y_5 + y_6 - y_7 - b_6)\mu_6 - 2(b_1 y_1 + b_3 y_3 + b_5 y_5 + b_7 y_7) \end{aligned}$$

が成り立つ。特に条件

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & y_1 + y_2 - y_3 = b_2 \\ \text{(ii)} & y_3 + y_4 - y_5 = b_4 \\ \text{(iii)} & y_5 + y_6 - y_7 = b_6 \end{array}$$

の下では

$$
\begin{aligned}
&-(\mu_1^2+\mu_2^2+\cdots+\mu_8^2)+2(b_2\mu_2+b_4\mu_4+b_6\mu_6)\\
=\ &-(\mu_1-y_1)^2+y_1^2-\cdots-(\mu_7-y_7)^2+y_7^2-2(b_1y_1+b_3y_3+b_5y_5+b_7y_7)
\end{aligned}
$$

であり、不等式

$$
\begin{aligned}
&-(\mu_1^2+\mu_2^2+\cdots+\mu_7^2)+2(b_2\mu_2+b_4\mu_4+b_6\mu_6)\\
\le\ &y_1^2+y_2^2+\cdots+y_7^2-2(b_1y_1+b_3y_3+b_5y_5+b_7y_7)
\end{aligned}
\tag{3}
$$

が成り立つ。等号は

$$
\text{(e)}\quad \mu_k = y_k \quad 1\le k\le 7
$$

のときに限り成立する。すなわち、(i)$'$ ∼ (iv)$'$ を満たす μ と (i) ∼ (iii) を満たす y に対して、不等式 (3) が成り立つ。等号は条件 (i) ∼ (iii), (e), (i)$'$ ∼ (iv)$'$ が成り立つときに限り成立する。この 14 元 14 連立 1 次方程式系は、補題 1 の (NF) に同値になり、唯一の解

$$
(\hat{y}_1,\ \hat{y}_2,\ \ldots,\ \hat{y}_7) = (\mu_1^*,\ \mu_2^*,\ \ldots,\ \mu_7^*)
$$

をもち、(1) で与えられる。よって、 (D_1) から (P_1) が導かれた。したがって、両問題は互いに双対である。

また $y=\mu$ のとき、補題 3 (iii) であることは、$f(y)$, $g(\mu)$ の定義と、補題 2 の結果より分かる。 □

したがって、以下の定理を得る。

定理 1 (Duality Theorem)
(i) (Weak Duality) (P_1), (D_1) の実行可能解 (y,μ) に対して $g(\mu)\le f(y)$ が成り立つ。
(ii) (Strong Duality) $f(\hat{y}) = g(\mu^*)$ を満たす実行可能解 $(\hat{y},\mu^*)$ が存在する。
(iii) (Optimal Solution) $\hat{y}$ は (P_1) の最小点であり μ^* は (D_1) の最大点である。

Proof. (i), (ii) は補題 3 より明らか。また (iii) は (i), (ii) より得る。 □

さらに、(P_1) と (D_1) の間には **Fibonacci identical duality** (FID) が成り立つ。ここに、(FID) とは以下の三位一体の関係が成り立つことをいう [9,10]。

1. (duality) (P_1) と (D_1) は互いに双対である。
2. (identical) それぞれの最適点と最適値は共に一致する。

3. (Fibonacci)　(P_1) は $\hat{y} = A^{-1}b$ のとき、最小値 $m = (b,\, Bb)$ をもつ。(D_1) も $\mu^* = A^{-1}b$ のとき、最大値 $M = (b,\, Bb)$ をもつ。ただし、$b = (b_1, b_2, \ldots, b_7)$,

$$A^{-1} = \frac{1}{F_8}\begin{pmatrix} F_7 & F_6 & F_5 & F_4 & F_3 & F_2 & F_1 \\ -F_6 & F_6F_2 & F_5F_2 & F_4F_2 & F_3F_2 & F_2F_2 & F_2 \\ F_5 & -F_5F_2 & F_5F_3 & F_4F_3 & F_3F_3 & F_2F_3 & F_3 \\ -F_4 & F_4F_2 & -F_4F_3 & F_4F_4 & F_3F_4 & F_2F_4 & F_4 \\ F_3 & -F_3F_2 & F_3F_3 & -F_3F_4 & F_3F_5 & F_2F_5 & F_5 \\ -F_2 & F_2F_2 & -F_2F_3 & F_2F_4 & -F_2F_5 & F_2F_6 & F_6 \\ F_1 & -F_2 & F_3 & -F_4 & F_5 & -F_6 & F_7 \end{pmatrix}$$

$$B = \frac{1}{F_8}\begin{pmatrix} -F_7 & -F_6 & -F_5 & -F_4 & -F_3 & -F_2 & -F_1 \\ -F_6 & F_6F_2 & F_5F_2 & F_4F_2 & F_3F_2 & F_2F_2 & F_2 \\ -F_5 & F_5F_2 & -F_5F_3 & -F_4F_3 & -F_3F_3 & -F_2F_3 & -F_3 \\ -F_4 & F_4F_2 & -F_4F_3 & F_4F_4 & F_3F_4 & F_2F_4 & F_4 \\ -F_3 & F_3F_2 & -F_3F_3 & F_3F_4 & -F_3F_5 & -F_2F_5 & -F_5 \\ -F_2 & F_2F_2 & -F_2F_3 & F_2F_4 & -F_2F_5 & F_2F_6 & F_6 \\ -F_1 & F_2 & -F_3 & F_4 & -F_5 & F_6 & -F_7 \end{pmatrix}.$$

ここに $F_1, F_2, \ldots, F_8$ はフィボナッチ数列の第 1 項から第 8 項である（表 1）。両問題の最適解（点と値）は共にフィボナッチ数列で表されている。一般に、**フィボナッチ数列** (Fibonacci sequence) は 2 階線形差分方程式（3 項間漸化式）

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0, \qquad x_1 = 1,\ x_0 = 0$$

の解として定義される（表 1）[7–10]。

表 1　フィボナッチ数列 $\{F_n\}$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987

定理 2 (P_1) は

$$y = (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_7) = A^{-1}b \tag{4}$$

のとき、最小値 $m = (b,\, Bb)$ をもつ。(D_1) も

$$\mu = (\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_7) = A^{-1}b \tag{5}$$

のとき、最大値 $M = (b,\, Bb)$ をもつ。

次に、(P$_1$) と (D$_1$) に対して、$b_1 = b_2 = \cdots = b_6 = 0,\ b_7 = c$ とした問題をそれぞれ (P$_2$) と (D$_2$) とする。ただし、$c \in R^1$. このとき、最小点と最大点は共に

$$\frac{c}{F_8}(F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_7)$$

になり、最小値と最大値は

$$m = M = -\frac{F_7}{F_8}c^2$$

になる。すなわち、(P$_2$) と (D$_2$) の間には FID が成り立つ：

1. (duality)　(P$_2$) と (D$_2$) は互いに双対である。
2. (identical)　それぞれの最適点と最適値は共に一致する。
3. (Fibonacci)　(P$_2$) は

$$\hat{y} = (\hat{y}_1,\ \hat{y}_2,\ \ldots,\ \hat{y}_7) = \frac{c}{F_8}(F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_7)$$

　のとき、最小値 $m = -\dfrac{F_7}{F_8}c^2$ をもつ。(D$_2$) も

$$\mu^* = (\mu_1^*,\ \mu_2^*,\ \ldots,\ \mu_7^*) = \frac{c}{F_8}(F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_7)$$

　のとき、最大値 $M = -\dfrac{F_7}{F_8}c^2$ をもつ。

特に、$c = F_8$ のときは、最小点 $\hat{y}$ と最大点 μ^* は共に

$$(F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_7)$$

になりフィボナッチ数列の第 1 項から第 7 項で順に表され、最小値と最大値は $m = M = -F_7F_8$ になる。

最後に、本問題の由来は文献 [3,4,6–10] に遡り、アプローチと方法は [1,2,5,11–14] に依る。

参考文献

[1] E.F. Beckenbach and R. Bellman, *Inequalities,* 3rd revised printing, Springer, New York, 1971.

[2] R.E. Bellman, *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw-Hill, New York, NY, 1970 (Second Edition is a SIAM edition 1997).

[3] A. Beutelspacher and B. Petri, *Der Goldene Schnitt 2., überarbeitete und erweiterte Auflange*, ELSEVIER GmbH, Spectrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1996.

[4] R.A. Dunlap, *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers*, World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd., 1977.

[5] G.H. Hardy, J.E. Littlewood and G. Polya, *Inequalities,* 2nd ed., Cambridge Univ. Press, London and New York, 1952.

[6] 岩本 誠一, 動的計画論, 九大出版会, 1987.

[7] 岩本 誠一, ダ・ヴィンチ・コードは最適か？, 数理経済学研究センター会報, 第 37 号, 平成 21(2009) 年 9 月, pp.1–9.

[8] 岩本 誠一・吉良 知文・植野 貴之, ダ・ヴィンチ・コード, 経済学研究 (九大経済学会), 第 76 巻 (2009 年 10 月) 2・3 号, pp.1–21.

[9] 岩本 誠一, 最適化の数理 II — ベルマン方程式 — (Mathematics for Optimization II – Bellman Equation –)、数理経済学研究センター「数理経済学叢書 5」, 知泉書館, 2013 年 10 月, pp.449.

[10] 岩本 誠一・木村 寛, セミフィボナッチ計画法 — 不等式アプローチ — , RIMS 研究集会「確率的環境下における数理モデルの理論と応用」, 京大数理研講究録, Vol.2044, pp.112–119, 2017.

[11] 岩本 誠一・木村 寛, Nonhomogeneous Semi-Fibonacci Programming, 第 21 回 情報・統計科学シンポジウム（BIC2016）, 九州大学, 2016 年 12 月, preprint.

[12] 岩本 誠一・木村 寛, Nonhomogeneous Semi-Fibonacci Programming – Identical Duality –, RIMS 研究集会「不確実性の下での意思決定理論とその応用：計画数学の展開」, 京大数理研講究録, Vol.2078, pp.121–126, 2018.

[13] S.Iwamoto, Y.Kimura, T.Fujita, Complementary versus Shift Dualities, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, Vol.17, No.8, pp.1547–1555, 2016.

[14] Y.Kimura, T.Ueno, S. Iwamoto, Two duals of one prime, Bulletin of Informatics and Cybernetics, Vol.48, pp.63–82, 2016.