

一般素数グラフについて

山口大学教育学部 (Yamaguchi University)

飯寄信保 (Iiyori, Nobuo)

素数グラフと一般素数グラフ

群 G の素数グラフとは、点集合を $V = \{p : \text{素数 } |p \text{ は、ある } G \text{ の要素の位数を割る}\}$ とし、辺集合を $E = \{(p, q) \in V \times V | p \neq q \text{ かつ } pq \text{ は、ある } G \text{ の要素の位数を割る}\}$ で決まるグラフのことである。このグラフの良いところは、誰もが感じるように定義が簡単であることと、誰もが想像していなかった程度に有限群の構造を非常に反映している点にある。(無限群の場合は、任意のグラフに対し、素数グラフがそのグラフと一致するような無限群は容易に構成でき、その同型類は無数に存在する。) 素数グラフの歴史は古く、Blichfeldt-Burnside の結果にもう既に出てきている。Blichfeldt-Burnside の結果は、伊藤先生の「有限群論」で紹介されているので詳しくはそちらを参照していただきたいが、簡単にいうと群の既約指標と素数グラフの連結成分との関係について観察したものである。

素数グラフの精神を保ちつつ、素数グラフまで単純化していないグラフとして服部グラフがある。群 G の服部グラフ Γ とは、点集合を G として、相異なる G の 2 つの要素が辺であることを、その 2 要素が互いに可換であるとして出来るグラフである。このグラフは、服部昭氏によってその定義を、「 $\Gamma - \{1\}$ が可縮になる様な有限群の特徴は何か？」という問題と共に公に発表されたものである。服部グラフと素数グラフとの関係として重要なものとして次がある。

命題 G を有限群とする。 Γ を服部グラフとする。 G の素数グラフが連結な必要十分条件は、 $\Gamma - \{1\}$ が連結であることである。また、 $\Gamma - \{1\}$ において位数 2 の要素を含む連結成分が複数ある群は、強く埋め込まれた部分群をもつ。

この命題の後半部を満たす群は、容易に分類可能である。この命題自体大したものではないが、いくつかの大切な物を含んでいると思うので簡単にその証明を説明する。まず、自明でない中心のある群の $\Gamma - \{1\}$ は連結であることに注意する。よって、シロー部分群の $\Gamma - \{1\}$ は連結である。これより、もし $p, q \in V$ に対して、素数グラフにおいて、 p, q が連結であればあるシロー p 部分群とあるシロー q 部分群の単位元以外の各要素は、 G の $\Gamma - \{1\}$ において連結となる。これから前半部が直ちに従う。また、後半部は、連結成分 C に含まれる各要素は、その連結成分の正規化部分群に含まれるので、 $H = N_G(C)$ とおくと、

$$g \in G - H \text{ に対して、} |H^g \cap H| \text{ と } C \text{ に含まれる各要素の位数 は互いに素。}$$

が成立するので後半が従う。

さて、素数グラフのアイデアをより一般的にな場合に応用するために要素の位数という点を要素が生成する部分群の位数と読み替え、部分群の位数に着目してグラフを作ること考えたのが、一般素数グラフである。また、素数グラフの服部グラフに対応するものとし自然な対象として群の部分群束 (正確には、まどろっこしいが部分部分群束である) がでてくる。簡単に一般素数グラフの定義 (但し、本講演に関係がある部分に対応するように狭義な定義) を説明する。

P を群論的性質とする。群 G の P -有限部分群全体の族を S_P で表す。 G の P -グラフ $\Gamma_P(G)$ とは、点集合を $V = \cup_{H \in S_P} \pi(H)$ 辺集合を $\{(p, q) \in V \times V | p \neq q \text{ かつ、ある } H \in S_P \text{ に対して、} pq \in H\}$ で決まるグラフである。(部分群に対して位数をとる操作を更に一般化したものが本来の一般素数グラフの定義である。)

この視点からすると、素数グラフ及び一般素数グラフは、ある群論的性質を満たす部分群の為す部分部分群束 (または、その変形) の連結性を視覚的に表示したものに他ならない。つまり、部分部分群束のハッ

セ図形の結合関係を単純化したものである。(素数グラフに関しては、より素朴に服部グラフの連結性の視覚化としても、とらえることができる。)一般素数グラフについては、いろいろと定義に疑問をもたれるとたがえられるだろうと思われませんが、本質が部分群束から由来するものであると認識さえすれば、極めて自然なものと思われる違いはない。

これまで、部分群束についてはいろいろなことについて研究されておりました、数々の事実が知られているが、素数グラフ、一般素数グラフの視点からいろいろなことが改めてわかってきている。例えば、Gruenberg-Kegelの定理が主張するように巡回部分群の為す部分部分群束の構造から容易に群の構造(組成列の構造、単純因子)の特定ができることが知られているし、また、巡回部分群ではなく、可解部分群の為す部分部分群束に対する同様な結果が、Abe-Liyoriによって示されている。更に、部分群束を内部自己同形により類別した束のハッセ図形から単位群を除いた部分の部分図形の一部の連結性から J_4 などの群が特徴付けられることが可能である(つまり、素数グラフの連結成分が6である群の分類)。その他、一般に知られているかどうかかわからないが、 $PSL_2(q)$ の部分群束と同形な部分群束をもつ群は $PSL_2(q)$ と同形である等の事実の検証は、よい群論の演習問題になると思われる。

これまで群論的性質 P に対して一般素数グラフの理論を作るとは、私は次のことで十分であると認識していた:

- (1) 組成列に対して Gruenberg-Kegel の定理型の命題の作成、
- (2) 群論的性質 P に対して一般素数グラフの連結成分の分類。

以上の2つのポイントは、素数グラフを群論に応用する際に鍵となるものであることが経験的にわかっており、これらを突破口にしていろいろな問題に用いられている。つまり、ある性質を満たす群 G の素数グラフの連結成分が複数あることを示し、Gruenberg-Kegelの定理または、連結成分の分類で群を特定するといったプログラムである(ほとんどの素数グラフの応用は、この方法を用いている)。また、私は、以前このプログラムにのって一般素数グラフの応用として可解群の特徴付けに関する定理を示し、一般素数グラフについてもこのプログラムが有効であることを示した。しかし、このプログラムには欠点がないわけではない。このプログラムは、単純群の分類をほとんどの場合に用いることになる。単純群の分類を用いること自体問題はないことであるが、容易な問題に対して安易に分類定理を用いてしまったり、このプログラムが容易に使えないケースが出てくると、壁にぶつかってしまっているような論文を目にすることが少なくないのも事実である。また、問題解決のために強引にこの方法を利用して、かなり見通しの悪い議論を重ねている例も見受けられる。この講演の目的は、素数グラフと服部グラフの関係のように素数グラフ、一般素数グラフの明快さを多少、犠牲にして、これらのグラフを解釈しなおすことにより扱いやすいものに出来ないか、という問題について考えることである。

部分部分群束と一般素数グラフ

L を順序集合とする。但し、次の2つの条件を満たすものとする:

- (1) 任意の L の2つの要素 a, b に対して $a > c$ かつ $b > c$ を満たす最大の $c \in L$ が常に存在すると仮定する。この要素を $a \cap b$ で表す。
- (2) L は、最大要素1、最小要素0をもつ。

この条件を満たすものとして、空でない集合の部分集合族の成す順序集合や、群の部分群全体の集合等が挙げられる。 R を可換環として、 L の(形式的)線形和全体 $R[L]$ を考える。すると L の2つの要素 a, b の積を $a \cap b$ で定義すれば、 $R[L]$ は可換代数になる。また L の自己同型群 $\text{Aut}(L)$ の部分群 G の固定する $R[L]$ の部分代数を $R[L]^G$ と書くことにする。ここで考えたいのは、 $R[L]^G$ の部分代数であって、都合のいい条

件がそうと面白いものがでてくる。このことを説明するために少々記号を用意する。 $x \in L$ に対して、

$$\Delta(x) = \{x^g | g \in G\}, \quad \delta(x) = \sum_{y \in \Delta} y, \quad \Gamma = \{\delta(x) | x \in L\}.$$

とする。この記号の基で $x, y \in L$ と $\gamma \in \Gamma$ にたいし、非負整数 $\beta_{x,y}(\gamma)$ を次の等式を満たすように定める：

$$\sum_{g,h \in G} x^g \cap y^h = \sum_{\gamma \in \Gamma} \beta_{x,y}(\gamma) \gamma.$$

w を L から有理整数全体 \mathbf{Z} への写像で次の条件を満たすと仮定する：(1) $w(1) = w(0) = 1$, (2) $y \in \Delta(x)$ ならば、 $w(y) = w(x)$ そして、(3) 任意の $x, y \in L$ と $\gamma \in \Gamma$ に対し、

$$\beta_{x,y}(\gamma) \cdot \frac{w(x)w(y)}{|G_x||G_y|} \in \mathbf{Z}.$$

そうすると容易に計算できるように $\{w(x)\delta(x)\}_{x \in L}$ は、 $R[L]^G$ の部分代数を生成する。これを L の w -バーンサイド環とでも呼んでおくことにする。 w が明らかなきとき、単に L のバーンサイド環と仮に呼ぶことにする。また非常に不正確な記号かもしれないが、 L のバーンサイド環を $B(L)$ で表すことにする。例えば、この名前が臭うように、群の部分群束を L とし、その群の内部自己同型群で固定される代数を考えれば、普通のバーンサイド環が現れる。

さて、この順序集合が生成する可換環及び、その部分環である順序集合のバーンサイド環と一般素数グラフとの関係について述べる。 P を群論的性質とする。ただし、 P は、二つの P -部分群の共通部分は、 P -部分群であるような性質とする (また、 P の定義から P -群と同型な群は P -群であることに注意する)。 G を群、 S_P を G の P -部分群全体に単位部分群と G 自身を加えた族をとする。すると、含有関係を順序とすれば S は、最大要素 G と最小要素 1 を持つ。更に、群論的性質 P に科した条件により任意の $a, b \in S_P$ に対して $a \cap b \in S_P$ は、 a, b より小さい要素の中の最大要素である。これより、 S は上で扱った順序集合の条件を満たしていることが分かる。また、 P は群論的性質であるから同型写像によって保たれているから、 G の内部自己同型写像によって保たれている。つまり、 S に G が共役によって作用していると考えてよい。このようにして我々は、可換代数 $R[S_P]$ 及び、 $R[S_P]^G$ を得る。バーンサイド環を得るために、 w を次のように定める：

$$w(a) = (N_G(a) : a) \quad a \text{ は } S_P \text{ の要素}.$$

こうして得られるバーンサイド環は、一般バーンサイド環と呼ばれるものと一致する。またよく知られている合同式

$$\beta_{x,y}(z) \equiv 0 \pmod{(N_G(x) : x)(N_G(y) : y)} \quad x, y, z \in S_P$$

なども得られる。以下、 R を有理整数環とし、この R についてこのバーンサイド環 $B(S_P)$ を仮に、 $B_P(G)$ と書くことにする。

定義から明らかなように $B_P(G)$ における積は、有名なマカイのルールによって支配されている。このことは、群の通常のバーンサイド環から指標環への準同型が存在するように $B_P(G)$ から指標環への次のような準同型が自然に存在することを意味する：

$$w(a)\delta(a) \mapsto 1_a^G \quad (a \in S_P).$$

この文章において、 $B_P(G)$ のこの準同型による像を $R_P(G)$ と書くことにする。 $B_P(G)$ においては、 $R \cdot 1$ は、イデアルであり、その準同型像は、 $R \cdot 1^G$ である。ここで $\bar{B}_P(G) = B_P(G)/R \cdot 1$ 、 $\bar{R}_P(G) = R_P(G)/R \cdot 1^G$ とおくことにする。簡単に分かることだが、次の重要な事項が成立する。

命題 G は、準基本群 (quasi-elementary) でないとする。巡回群が P 群であるならば、次は同値である。

(1) 一般素数グラフ $\Gamma_P(G)$ は非連結である。

(2) $\bar{B}_P(G)$ は、二つの自明でないイデアル I, J により、 $\bar{R}_P(G) = I \oplus J \oplus R \cdot 1_G$ となる。

(3) $\bar{R}_P(G)$ 二つの自明でないイデアル I, J により、 $\bar{R}_P(G) = I \oplus J$ となる。

この命題は、指標のレベルで一般素数グラフの連結性が $B_P(G)$ の世界で決まることを意味しているだけでわかない。二つの素数 p, q に対して、 $S_{P \wedge \{p, q\}} = S_P \cap S_{\{p, q\}}$ という S_P の部分集合を考えて $B_P(G)$ 及び $\bar{R}_P(G)$ の部分代数 $B_{P \wedge \{p, q\}}(G)$ と $\bar{R}_{P \wedge \{p, q\}}(G)$ を考えれば (または、 $a \in S_P$ に対し、 $B_P(G)$ の単位的ではない部分環 $B_P(a)$ を観察すれば)、一般素数グラフ自体が完全に分かることを意味する (ただし、 S_P から $S_{P \wedge \{p, q\}}$ を見いだす方法は今のところ知られていない)。このような見方をすると、次の定理が自然に示せる。

定理 (Abe-Iiyori) 任意の有限群 G に対し、可解グラフ $\Gamma_{\text{solvable}}(G)$ は連結である。

この命題は、当初、有限単純群の分類を使って示されたものであるが、上の関係をつかみ、更に永尾-津島「有限群の表現」の3章4.9をほとんどそのままを用いることによって示すことが出来る。

順序集合 L から得られる可換代数をもっと膨らましてみることを考える。(これが、本当に必要なことかは、まだ定かではない。) L の要素たちは、もちろん $R[L]$ を生成する分けであるが、 L の各要素に可換代数を乗っけてしまおうというわけである。

R_0 を可換環とする。 $\{R_x\}_{x \in L}$ を R_0 -代数の帰納系とする。 R_y から R_x への準同型を ρ_x^y で書き表すこととし、 \bar{L} で三つ組み $(L, \{R_x\}_{x \in L}, \{\rho_x^y\})$ を表すことにする。 $R_0(\bar{L})$ は、 $\{R_x\}_{x \in L}$ の直和を表すとし、積を次のように入れる：

$$s_x t_y = \rho_{x \cap y}^x(s_x) \rho_{y \cap x}^y(t_y) \quad \text{但し、} s_x \in R_x, t_y \in R_y.$$

容易に分かるように、 $R_0(\bar{L})$ は可換代数になる。

重要な例とおもわれるものは、次の2つである。 G を有限群とし、 P を群論的性質とする。

$$S_{\text{conj}}(x) = \{(x, C) \mid x \in S_P, C \text{ は } x \text{ の共役類}\}, \quad S_{\text{ch}}(x) = \{(x, \chi) \mid x \in S_P, \chi \in \text{Irr}(x)\}$$

と置き、 $R_{\text{conj}, x} = \bigoplus_{(x, C) \in S_{\text{conj}}(x)} (x, C) \mathbf{Z}$, $R_{\text{ch}, x} = \bigoplus_{(x, \chi) \in S_{\text{ch}}(x)} (x, \chi) \mathbf{Z}$ とする。定義より明らかであると思うが、 $R_{\text{conj}, x}$ は \mathbf{Z} の x の群環の中心と同一視ができ、 $R_{\text{ch}, x}$ は、 H の指標環と同一視が可能である。よって、自然な3組み $\tilde{S}_{P*} = (S_P, \{R_{*, x}\}_{x \in L}, \{\rho_x^y\})$ (但し、 $*$ は conj . または、 ch であり、 ρ_x^y は制限写像である) を考えることが出来る。これにより、 $\mathbf{Z}(\tilde{S}_{P \text{conj}.})$ と $\mathbf{Z}(\tilde{S}_{P \text{ch}.})$ をつることが出来る。さて、もちろんこの二つの \mathbf{Z} -代数の自己同型群には、自然に G が入っている。もっと正しくは、 $\text{Aut}(G)$ が入っている。そこで、 $\text{Aut}(G)$ の部分群 A をこれらの代数に作用させることを考え、「バーンサイド環」を考えることが出来る。つまり、 $\mathbf{Z}(\tilde{S}_{P \text{conj}.})^A$ 及び、 $\mathbf{Z}(\tilde{S}_{P \text{ch}.})^A$ の都合のよい部分代数を考察するわけである。これらの代数を考える意義として、 $\mathbf{Z}(\tilde{S}_{P \text{conj}.})^A$ においては、 S_P の各共役類が、 A によりどのように移り合っているかを表している代数であると考えることが出来るし、 $\mathbf{Z}(\tilde{S}_{P \text{ch}.})^A$ においても、双対的な意味において同様なことが考えられることがあげられる。しかし、これらの代数を一つの A について限定して論じるのは面白くない (と私は思っている)。つまり、 A を動かすわけである。 $\text{Aut}(G)$ の部分群の部分部分群束 S を考え、各 $s \in S$ に対し、 $\mathbf{Z}(\tilde{S}_{P \text{ch}.})^s$ なる代数を考え、自然な制限写像と共に3組みを考えて代数をまたつくるほうが、面白いのではないかと思われる。この代数においては、アイサークスの教科書を片手に弄繰り回すとフロベニウスの相互率の一般形が得られたりする。これについての詳細については、また改めて話そうと思っている。次の問題を提出してこの小論の終わりとする。

問題 上の代数（またその準同型像）を用いて、アイサークスの教科書ページ 111 から 121 に解説されている理論を TI-集合に条件をつけることない形で一般化せよ。

参考文献

- [1] 阿部-飯寄 北海道ジャーナル「A Generalization of Prime Graphs of Finite Groups」
- [2] I. Martin Isaacs 「Character Theory of Finite Groups」
- [3] 伊藤 昇 「有限群論」