

Fischer 空間に附随する非結合的代数と 頂点作用素代数[†]

東京大学大学院数理科学研究科

松尾 厚[‡]

ある種の有限偏線型空間に対して, 二つのパラメータを持つ自然な内積付き可換非結合的代数の構造を定義し, そのいくつかの性質を述べる。自然な条件の下でこの代数は単位元を持ち, 内積は代数の演算に関して不変である。特に, Fischer 空間 (あるいは附随する三互換群) に対してこのような代数が一般的に定義される。

頂点作用素代数を自己同型群の観点から研究するにあたり, この代数がある頂点作用素代数の Griess 代数と同型になる場合に関心がある。実際, 宮本雅彦が [Mi1] において記述したような三互換群の作用を持つ頂点作用素代数については, その Griess 代数の構造は対応する Fischer 空間から決まり, それは上記の内積付き代数でパラメータを特別な値にとったものとなる。

このようにして三互換群が作用するような頂点作用素代数について, 正定値不変 Hermite 形式を持つという仮定の下で, 対応する Griess 代数と三互換群を分類することができる。これは V が符号頂点作用素代数であるときにそのような分類を試みた北詰・宮本の研究 [KM] を精密化・一般化するものである。

本稿は, 2003 年 12 月に行われた研究集会「有限単純群の研究とその周辺」(京都大学数理解析研究所) における講演内容をまとめたものである。研究集会での講演を薦めてくださった宮本雅彦氏並びに快諾してくださった代表者の飯寄信保氏に感謝する。

1 偏線型空間

集合 X の元を点と称する。集合 X の n 個の点からなる部分集合を n -集合と呼ぶ。

偏線型空間 (partial linear space) とは, 集合 X であって, 冪集合 $P(X)$ の部分集合 \mathcal{L} が与えられており, \mathcal{L} の元を直線と称するとき, 任意の相異なる 2 点を通る直線が高々 1

[†]. Nonassociative algebras associated with Fischer spaces and vertex operator algebras

[‡]. Atsushi MATSUO

Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo, Japan

本であり、また任意の直線が少なくとも 2 点を通るようなもののことである。このとき、任意の 2 直線 l_1, l_2 に対し、 $l_1 \cap l_2 = \emptyset, |l_1 \cap l_2| = 1, l_1 = l_2$ の三通りのうちのいずれか一つが成立する。

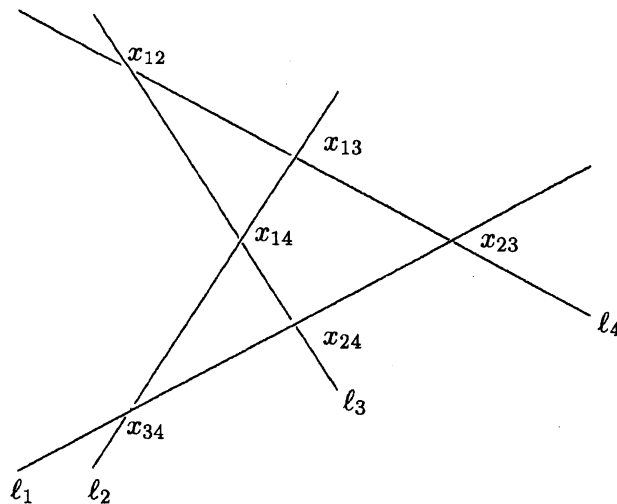
相異なる 2 点 x, y を通る直線が存在するとき、これらの点は共線である (collinear) という。相異なる 2 点 x, y に対して、 x と y が共線でないとき $x \perp y$ と表し、 x と y が共線であるとき $x \sim y$ と表すことにする。偏線型空間の共線グラフ (collinearity graph) とは、集合 X の元を頂点 (vertex) とし、相異なる二つの頂点 x, y が辺 (edge) で結ばれるのは $x \sim y$ なるときであるとして得られるグラフ (graph) のことである。

以下では偏線型空間 X であって、各直線がちょうど 3 個の点からなるようなもののみ考える。このとき、 $x \sim y$ ならば x と y を通る唯一の直線上には x, y 以外の点が唯一存在するので、その第三の点を $x \circ y$ と表す。

双対アフィン平面 $A^2(2)^V$ 6 点からなる集合 $X = \{x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{23}, x_{24}, x_{34}\}$ を考え、直線の集合を次で定める。

$$\mathcal{L} = \{l_1, l_2, l_3, l_4\}, \quad \text{ただし } l_i = \{x_{mn} \mid i \notin \{m, n\}\}. \quad (1.1)$$

このとき、偏線型空間 X は二元体 F_2 上の双対アフィン平面 (dual affine plane of order 2) と呼ばれる。



これは、二元体 F_2 上のアフィン平面 $A^2(2)$ において、点と直線を入れ替える射影双対をとったものに他ならないので、これを $A^2(2)^V$ と表すことにする。その共線グラフは、八面体の頂点と辺からなるグラフである。

アフィン平面 $A^2(3)$ 集合 $\{0, 1, 2\}$ の元の組で添字付けられた 9 点からなる集合 $X = \{x_{i,j} \mid 0 \leq i, j \leq 2\}$ を考え、3-集合 $\{x_{i,j}, x_{k,l}, x_{m,n}\}$ が直線であるのは $(i+k+m, j+l+n) \equiv (0, 0) \pmod{3}$ なるときであるとして得られる偏線型空間は三元体上 F_3 上のアフィン平面 $A^2(3)$ である (affine plane of order 3)。その共線グラフは、9 個の頂点を持つ完全グラフである。

射影平面 $\mathbb{P}^2(2)$ 7点からなる集合 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ を考え、直線の集合を次で定める。

$$\mathcal{L} = \{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_4, x_5\}, \{x_1, x_6, x_7\}, \\ \{x_2, x_4, x_6\}, \{x_2, x_5, x_7\}, \{x_3, x_4, x_7\}, \{x_3, x_5, x_6\}\} \quad (1.2)$$

このとき、偏線型空間 X は二元体 \mathbb{F}_2 上の射影平面 $\mathbb{P}^2(2)$ である (projective plane of order 2, Fano plane)。その共線グラフは、7個の頂点を持つ完全グラフである。

2 偏線型空間に附随した内積付き可換非結合的代数

本章では、二つのパラメータ γ, δ を変数とみなし、 $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\gamma, \delta)$ 上で考察を進める。体 \mathbb{F} 上の加群に対し、その上の対称双線型形式のことを単に内積と呼ぶことにする。

2.1 内積付き代数構造の定義

すべての直線が3点からなる有限の偏線型空間 X が与えられたとする。以下の議論では、空間 X の共線グラフは連結であるとして一般性を失わないので、そのように仮定する。各点 $x \in X$ に対して、記号 \tilde{x} を考え、集合 $\{\tilde{x} \mid x \in X\}$ を基底とする \mathbb{F} -加群を考える。

$$\tilde{B}_X = \bigoplus_{x \in X} \mathbb{F}\tilde{x} \quad (2.1)$$

次の表の規則を双線型に拡張することによって、 \mathbb{F} -加群 \tilde{B}_X の乗法演算と双線型形式を定める。

x と y の関係	演算 $\tilde{x} \cdot \tilde{y}$	形式 $(\tilde{x} \tilde{y})$
$x = y$	$2\tilde{y}$	$\frac{\gamma}{2}$
$x \perp y$	0	0
$x \sim y$	$\frac{\delta}{2}(\tilde{x} + \tilde{y} - \tilde{x} \circ \tilde{y})$	$\frac{\gamma\delta}{8}$

定義から明らかに、演算 \cdot は可換であり、双線型形式 $(|)$ は対称である。しかし、演算 \cdot は一般には結合律を満たさない。かくして、 \tilde{B} に内積付き可換非結合的代数の構造が与えられた。

なお、 $x = y$ のときに $\tilde{x} \cdot \tilde{x}$ を \tilde{x} でなく $2\tilde{x}$ としているのは、頂点作用素代数の Virasoro ベクトルとの関係を見やすくするためのものであり、標数 0 の体上で考える限りは本質的なものではない。

上で与えた内積付き代数の構造は, Conway [Co] や Dong 他 [DLMN] がそれぞれ特別な場合に見いだしたものを一般化したものである。我々の代数は, 次節に述べるように, 単位元を持つという点でいわゆる Bose-Mesner 代数や Norton が [No] で構成した代数とは似て非なるものである。

2.2 単位元の存在

さて, 空間 X の共線グラフは正則 (regular) であると仮定する。例えば, 空間 X の自己同型群が X に推移的に作用すればよい。このとき, 共線グラフの分岐指数 (valency) が考えられるので, それを k とする。すると, 任意の $y \in X$ に対して次が成立する。

$$\left(\sum_{x \in X} \tilde{x}\right) \cdot \tilde{y} = 2\tilde{y} + \frac{\delta}{2} \sum_{\substack{x \in X \\ x \sim y}} (\tilde{x} + \tilde{y} - \tilde{x \circ y}) = 2 \left(1 + \frac{k\delta}{4}\right) \tilde{y}. \quad (2.2)$$

従って, ベクトル

$$\tilde{\omega}_X = \frac{4}{4 + k\delta} \sum_{x \in X} \tilde{x} \quad (2.3)$$

は, 任意の $y \in X$ に対して $\tilde{\omega}_X \cdot \tilde{y} = 2\tilde{y}$ を満たす。すなわち, 代数 \tilde{B}_X は単位元を持つ。

なお, 値 $c_X = 2(\tilde{\omega}|\tilde{\omega})$ は次で与えられる。

$$2 \left(\frac{4}{4 + k\delta}\right)^2 \sum_{x, y \in X} (\tilde{x}|\tilde{y}) = \frac{4\gamma\nu}{4 + k\delta} \quad (2.4)$$

ただし, $\nu = |X|$ は空間 X の点の個数である。

2.3 内積の不変性

次に, 代数の乗法演算と内積の関係であるが, 次が成立する: 代数 \tilde{B}_X の内積 $(|)$ が演算に関して不変 (invariant) である, すなわち $(\tilde{x} \cdot \tilde{y}|\tilde{z}) = (\tilde{x}|\tilde{y} \cdot \tilde{z})$ が任意の $x, y, z \in X$ について成立するための必要十分条件は, 二つの条件

- (1) $x \sim y \sim z$ ならば $\text{rel}(x \circ y, z) = \text{rel}(x, y \circ z)$.
- (2) $x \perp y \sim z \perp x$ ならば $x \perp y \circ z$.

が成立することである。ただし, $*$ が $=, \perp, \sim$ のいずれかに応じて, $x * y$ が成立するときに $\text{rel}(x, y) = *$ と記す。

Fischer 空間 すべての直線が 3 点からなる偏線型空間が Fischer 空間であるとは, 交わる 2 直線で張られた部分空間が必ず双対アフィン平面 $\mathbb{A}^2(2)^\vee$ かアフィン平面 $\mathbb{A}^2(3)$ と同型となることである (Buekenhout, cf. [CH]). Fischer 空間は上の条件 (1)(2) を満たす。

Steiner 三重系 すべての直線が 3 点からなる偏線型空間が Steiner 三重系であるとは、任意の 2 点を通る直線が唯一つ存在することである。すなわち、相異なる任意の 2 点 x, y は $x \sim y$ である。例えば射影平面 $\mathbb{P}^2(2)$ やアフィン平面 $\mathbb{A}^2(3)$ は Steiner 三重系である。Steiner 三重系は明らかに上の条件 (1)(2) を満たす。

3 正定値性と隣接行列の最小固有値

以下では、代数 \tilde{B}_X は複素数体 \mathbb{C} 上で定義され、パラメータ γ, δ は複素数の定数であるとする。代数 \tilde{B}_X の内積 $(|)$ が演算に関して不変であるような場合を考察する。例えば X が Fischer 空間であればよい。

内積 $(|)$ の核 (根基) を考える。

$$\text{Ker}(|) = \{v \in \tilde{B}_X \mid (v|\tilde{B}_X) = 0\} \quad (3.1)$$

内積の不変性から、内積の核はイデアルとなる。よって、商空間 B_X に内積付き代数の構造が誘導される。ここで、基底 $\{\tilde{x} \mid x \in X\}$ に関する内積 $(|)$ の Gram 行列は、偏線型空間 X の隣接行列 A を用いて次のように表される。

$$\frac{\gamma}{2} \left(I + \frac{\delta}{4} A \right) \quad (3.2)$$

さて、我々の当座の目的としては、商代数 B_X の内積が正定値である場合に関心がある。そのための必要十分条件は \tilde{B}_X の内積が半正定値となることであり、Gram 行列の表示から、それは行列 A の最小固有値 s が $-4/\delta$ 以上となることと同値である。

なお、商代数 B_X の次元を d とすると、隣接行列 A の最小固有値が $-4/\delta$ より大なる場合には、 $\tilde{B}_X = B_X$ であるから、 $d_X = \nu$ である。一方、最小固有値が $-4/\delta$ と一致する場合は、最小固有値に属する固有空間の次元を g とすると、 $d = \nu - g$ となる。

4 三互換群と Fischer 空間

三互換群と Fischer 空間の関係について復習する^{註1} 三互換群とは、群 G であって、 G を生成する部分集合 D が与えられ、 D は G の元による共役で閉じていて、 D の任意の元は位数 2 であり、かつ D の任意の 2 元 g, h に対して、積 gh の位数は高々 3 であるようなもののことである。このとき、 D を三互換類 (class of 3-transposition) という。

三互換群 G に対して、 $X_G = D$ とおき、点の集合とみなす。集合 D の三つの元 f, g, h が 3 次対称群 S_3 と同型な G の部分群を生成するときに、それらは直線をなすものとし、直線全体の集合を \mathcal{L}_G とする。このとき、 $(X, \mathcal{L}) = (X_G, \mathcal{L}_G)$ は Fischer 空間となる。

1. 三互換群と Fischer 空間については文献 [Fi],[As],[CH] を参照せよ。

逆に, Fischer 空間 X の各点 x に対して, 次の写像を考える。

$$\sigma_x : y \mapsto \begin{cases} y & (x = y \text{ または } x \perp y \text{ のとき}) \\ x \circ y & (x \sim y \text{ のとき}) \end{cases} \quad (4.1)$$

これは X の位数 2 の自己同型を定める。この形の自己同型からなる集合を D_X とし, D_X の生成する X の自己同型群の部分群を G_X とすると, G_X は D_X を三互換の類とする三互換群となる。このとき $X = X_{G_X}$ であるが, $G = G_{X_G}$ とは限らない。しかし, 中心が自明であるような三互換群に話を限ると, この対応は一つ一つである。

双対アフィン平面 $\mathbb{A}^2(2)^\vee$ と S_4 双対アフィン平面 $X = \mathbb{A}^2(2)^\vee$ の各頂点 x_{ij} の定める自己同型は, 添字集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ の i と j を入れ替える操作から誘導される置換である。従って, 附随する三互換群 G_X は 4 次対称群 S_4 と同型であり, 集合 D_X は互換の集合に対応する。

アフィン平面 $\mathbb{A}^2(3)$ と $3^2:2$ 位数 3 のアフィン平面 $X = \mathbb{A}^2(3)$ の各頂点 x_{ij} の定める自己同型 $\sigma_{i,j} = \sigma_{x_{i,j}}$ は, 各 k, l に対して, $x_{k,l}$ と $x_{-k-i, -l-j}$ を入れ替える置換である。ただし, 添字は位数 3 で巡回するものとしている。このとき, $\sigma_{0,0}\sigma_{i,j}(x_{k,l}) = x_{k+i, l+j}$ であるから, 自己同型 $\tau_{i,j} = \sigma_{0,0}\sigma_{i,j}$ は, 添字集合 \mathbb{F}_3^2 の平行移動であり, $\sigma = \sigma_{0,0}$ は -1 倍する線型写像である。従って, 附随する三互換群 G_X は, σ の生成する位数 2 の群の平行移動群 3^2 による分裂拡大であって, $3^2:2$ なる型の群である。

5 頂点作用素代数による実現可能性

5.1 頂点作用素代数の Griess 代数

頂点作用素代数は $V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^n$ なる次数付けを持ち, $V^0 = \mathbb{C}1$ かつ $V^1 = 0$ であると仮定する。² 頂点作用素代数の演算を次のように表す:

$$Y(a, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{(n)} z^{-n-1} \quad (5.1)$$

このとき $B_V = V^2$ には, 次のようにして不変内積付き非結合的代数の構造が入る:

$$a \cdot b = a_{(1)}b, (a|b)1 = a_{(3)}b \quad (5.2)$$

これを V の Griess 代数と呼ぶ。以下では, V が正定値不変 Hermite 形式を持つ場合を考察する。このとき, V の Hermite 形式の B_V への制限は上記の不変内積と一致する。

我々は, 偏線型空間 X から定まる正定値不変内積付き代数 B_X が頂点作用素代数 V の Griess 代数 B_V として実現されるかどうかという問題に関心がある。これがそもそも本稿の考察の動機であった。

2. 頂点作用素代数については文献 [FLM],[MN] を参照せよ。

もし実現されたとすると、点 $x \in X$ に対応する B_X の元は V 上に Virasoro 代数の作用を定め、その中心電荷は $\gamma = 2(x|x)$ で与えられる。一方、代数 B_X の単位元の 2 倍は頂点作用素代数 V の共形ベクトルに対応し、式 (2.4) の値 c_X は V の階数すなわち V の共形ベクトル ω の中心電荷と一致する。また、Griess 代数 B_V の次元 $d = \dim V^2$ は、共線グラフの隣接行列の最小固有値の値に応じて ν あるいは $\nu - g$ で与えられる。

5.2 Fischer 空間 ($\gamma = 1/2, \delta = 1/2$) の実現

Griess 代数の元 $e \in B_V$ が $e \cdot e = 2e$, $2(e|e) = 1/2$ を満たせば、作用素 $L_n^e = e_{(n+1)}$ は中心電荷 $1/2$ の Virasoro 代数の作用を V 上に定める。すると V は最低共形ウェイト $0, 1/2, 1/16$ の成分に分解する：

$$V = V_e(0) \oplus V_e(1/2) \oplus V_e(1/16) \quad (5.3)$$

ここで $V_e(1/16) = 0$ であったとすると、次の写像は V の位数 2 の自己同型となる：

$$\sigma_e = \begin{cases} 1 & (V_e(0) \text{ 上で}) \\ -1 & (V_e(1/2) \text{ 上で}) \end{cases} \quad (5.4)$$

宮本雅彦は、[Mil] において、そのような元 e の全体 E に対して σ_e の全体 D_V を考えると、これの生成する $\text{Aut } V$ の部分群 G_V が三互換群となることを見いだした。特に集合 E が B_V を張り、 B_V が V を生成する場合には、 G_V は中心が自明となり、その構造は対応する Fischer 空間の構造で完全に記述される。その結果、 V の Griess 代数 B_V は $\gamma = 1/2, \delta = 1/2$ とした場合の B_X と同型となるのである。

このような性質を持つ Fischer 空間 X あるいは附随する三互換群 G を、対応する頂点作用素代数が正定値不変 Hermite 形式を持つという条件の下で分類しよう。

Fischer 空間の定義から、交わる任意の 2 直線が張る部分空間は、双対アフィン平面 $\mathbb{A}^2(2)^\vee$ あるいはアフィン平面 $\mathbb{A}^2(3)$ のいずれかであった。ところが、代数 B_X が正定値不変 Hermite 形式を持つ頂点作用素代数 V の Griess 代数 B_V と同型となる場合には、アフィン平面 $\mathbb{A}^2(3)$ は起こり得ないのである。実際、Fischer 空間 X にアフィン平面 $\mathbb{A}^2(3)$ が含まれたとすると、中心電荷 $7/10$ の Virasoro 作用について共形ウェイト $7/10$ のベクトルが V^2 に属することが簡単な計算によってわかり、これは Virasoro 代数の表現論に反するのである。³

このような、交わる任意の 2 直線が張る部分空間が双対アフィン平面 $\mathbb{A}^2(2)^\vee$ と同型であるような Fischer 空間は Symplectic 型の Fischer 空間と呼ばれ、J.I. Hall によって分類された ([Ha1],[Ha2])。ここで、強正則グラフ (strongly regular graph) に関するよく知られたテクニック ([Bos],[Hi]) を利用すると、Hall のリストに現れる空間について、その共線グラフの隣接行列の最小固有値を計算することができる。第 3 章の考察によって、空

3. Virasoro 代数の表現論については例えば [FQS], [Gi] を参照せよ。

間 B_X の内積が正定値であるためには、この最小固有値が -8 以上でなければならない。この条件を満足する場合で分解不能なものをすべて列挙したのが次の表である。

G	ν	k	s	g	c	d
S_3	3	2	-1	2	$\frac{6}{5}$	3
$S_n \ n \geq 4$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$2n-4$	-2	$\frac{n(n-3)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{n+2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$
$F: S_n \ n \geq 4$	$n(n-1)$	$4n-8$	-4	$\frac{n(n-3)}{2}$	$n-1$	$n(n-1)$
$F^2: S_n \ n \geq 4$	$2n(n-1)$	$8n-16$	-8	$\frac{n(n-3)}{2}$	n	$\frac{(3n-1)n}{2}$
$O_6^-(2)$	36	20	-4	15	$\frac{36}{7}$	36
$Sp_6(2)$	63	32	-4	35	$\frac{63}{10}$	63
$O_8^+(2)$	120	56	-4	84	$\frac{15}{2}$	120
$2^6: O_6^-(2)$	72	40	-8	15	6	57
$2^6: Sp_6(2)$	126	64	-8	35	7	91
$2^8: O_8^+(2)$	240	112	-8	84	8	156
$O_8^-(2)$	136	72	-8	51	$\frac{34}{5}$	85
$Sp_8(2)$	255	128	-8	135	$\frac{15}{2}$	120
$O_{10}^+(2)$	496	240	-8	340	8	156

ここで、 G は Fischer 空間 X に附随する三互換群を表しており、 S_{2m+1} と S_{2m+2} に対して、 $F = 2^{2m}$ である。また、 ν は X の点の個数 $|X|$ 、 k は共線グラフの分岐指数 (valency)、 s は隣接行列の最小固有値、 g は固有値 s に属する固有空間の次元、 c は対応する頂点作用素代数の階数、 d は対応する Griess 代数の次元を表す。

この表において、 $F^2: S_n$ は $V_{\sqrt{2}D_n}^+$ で実現される ([DLMN])。また、 $O_{10}^+(2)$ は $V_{\sqrt{2}E_8}^+$ で実現される ([Gr])。これ以外の場合は、 $V_{\sqrt{2}D_n}^+$ や $V_{\sqrt{2}E_8}^+$ の適当な部分頂点作用素代数によって実現されるので、分類が完成した。議論の詳細は論文 [Ma1] を御覧頂きたい^{註4}

6 若干の補足的考察

Fischer 空間 ($\gamma = 1/2, \delta = 1/16$) 次に $\gamma = 1/2, \delta = 1/16$ の場合を考えたい。この場合については、詳しいことはよく分かっていないが、少なくとも S_3 が実現できることは宮本の最近の結果 [Mi2] から従う (cf. [La])。正定値性から、共線グラフの隣接行列の最小固有値が -64 以上でなければならないことは分かるが、 $\gamma = 1/2, \delta = 1/2$ の場合に

4. 論文 [Ma1] を投稿したところ、 $\gamma = 1/2, \delta = 1/2$ の場合の頂点作用素代数による実現可能性に関する結果だけに限定して出版するようレフェリーから命ぜられたので、そのように書き直した。

Fischer 空間が Symplectic 型であることを示した論法は $\gamma = 1/2, \delta = 1/16$ の場合にはうまく働かない。Virasoro 代数の表現論と矛盾しないのである。

このケースは、モンスターの部分群との関係から興味深い。モンスターの部分群 G であって、 $2A$ 元からなる三互換の集合 D で生成された三互換群であって、 D に属する二つの元の積が必ず $1A, 2B, 3C$ のいずれかであるようなものを考える。モンスターはムーンシャイン頂点作用素代数 V^h の自己同型群である ([Bor],[FLM])。このとき、 D に対応する Griess 代数 B_{V^h} の部分空間をとれば、それは $\gamma = 1/2, \delta = 1/16$ の場合の代数 B_X で記述されるはずである。

射影平面 $\mathbb{P}^2(2)$ ($\gamma = 4/5, \delta = 2/3$) Hamming 符号に附随する頂点作用素代数 V_{H_8} は $V_{\sqrt{2}D_4}^+$ と同型であるが、これの三対性自己同型による固定点部分空間をとり、さらにその適当な部分空間をとると、中心電荷 $14/5$ の頂点作用素代数が得られる。これはまた、 G_2 型のアフィン Lie 代数のレベル 1 表現の 2^3 の作用による固定点部分空間とも同一視される。このようにして得られた頂点作用素代数の Griess 代数は、射影平面 $\mathbb{P}^2(2)$ に附随する内積付き代数 B_X で特に $\gamma = 4/5, \delta = 2/3$ とした場合と同型である⁵

以上に掲げた若干の例の他には、現在のところ筆者は何の結果も知らず、今後の研究に待たなければならない。そのような研究は、労多くして実りが少ないようにも思われるのだが、頂点作用素代数を自己同型群の観点から理解するための、あるいは逆に有限群を頂点作用素代数の観点から理解するための道程であると筆者は理解している。

参考文献

- [As] M. Aschbacher: 3-transposition groups. Cambridge tracts in Mathematics 124, Cambridge University Press, 1997.
- [Bor] R.E. Borcherds: Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the monster, Proc. Nat'l. Acad. Sci. USA., **83**, (1986), 3068-3071.
- [Bos] R.C. Bose: Strongly regular graphs, partial geometries, and partially balanced designs, Pacific J. Math., **13**, (1963), 389-419.
- [CH] H. Cuyper and J.I. Hall: The 3-transposition Groups with Trivial Center. J. Algebra, **178**, (1995), 149-193.
- [Co] J.H. Conway: A simple construction for the Fischer-Griess monster group, Invent. Math., **79**, (1985), 513-540.
- [FHL] I. Frenkel, Y.-Z. Huang and J. Lepowsky: On axiomatic approaches to vertex operator algebras and modules. Memoirs Amer. Math. Soc. 104, 1993. American Mathematical Society.

5. この代数については論説 [Ma2] に書いた。

- [DLMN] C.-Y. Dong, H.-S. Li, G. Mason and S.P. Norton: Associative subalgebras of the Griess algebra and related topics. *The Monster and Lie algebras* (Columbus, OH, 1996), 27–42, Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ., 7, de Gruyter, Berlin, 1998. *Proc. Sympos. Pure Math.*, 56, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [Fi] B. Fischer: Finite Groups Generated by 3-Transpositions. I. *Invent. Math.*, **13**, (1971), 232–246.
- [FLM] I.B. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman: Vertex operator algebras and the Monster. *Pure and Appl. Math.* 134, Academic Press, Boston, 1989.
- [FQS] D. Friedan, Z. Qiu and S. Shenker: Details of non-unitarity proof for highest weight representations of the Virasoro algebra. *Comm. Math. Phys.* **107**, (1986), 535–542.
- [Gi] P. Ginsparg: Applied conformal field theory. *Champs, cordes, et phénomènes critiques*, Les Houches Session XLIX, 1988, 3–168, Elsevier, 1989.
- [Gr] R.L. Griess, Jr: A vertex operator algebra related to E_8 with automorphism group $O^+(10, 2)$. *The Monster and Lie algebras*, 43–58, Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ., 7, de Gruyter, Berlin, 1998.
- [Ha1] J.I. Hall: Graphs, geometry, 3-transpositions, and symplectic \mathbb{F}_2 -transvection groups, *Proc. London Math. Soc. (Ser. 3)*, **58**, (1989), 89–111.
- [Ha2] J.I. Hall: Some 3-transposition groups with non-central 2-subgroups, *Proc. London Math. Soc. (Ser. 3)*, **58**, (1989), 112–136.
- [Hi] D.G. Higman: Finite permutation groups of rank 3, *Math. Z.*, **86**, (1964), 145–156.
- [KM] M. Kitazume and M. Miyamoto: 3-transposition automorphism groups of VOA. *Groups and combinatorics – in memory of Michio Suzuki*, 315–324, *Adv. Stud. Pure Math.*, 32, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2001.
- [La] C.-H. Lam: Lattice vertex operator algebra $V_{\sqrt{2}E_8}$ and an algebra of Miyamoto of central charge $1/2 + 21/22$, in *RIMS Kokyuroku* 1327.
- [MM] A. Matsuo and M. Matsuo: The automorphism group of the Hamming code vertex operator algebra, *J. Algebra*, **228**, (2000), 204–226.
- [Ma1] A. Matsuo: 3-transposition groups of symplectic type and vertex operator algebras. Preprint.
- [Ma2] [8,4,4] 拡張 Hamming 符号に附随した頂点作用素代数の自己同型群と関連する話題. 第16回代数的組合せ論シンポジウム報告集.
- [MN] A. Matsuo and K. Nagatomo: Axioms for a vertex algebra and the locality of quantum fields, *MSJ Memoirs* 4. Mathematical Society of Japan, 1999.
- [Mi1] M. Miyamoto: Griess algebras and conformal vectors in vertex operator algebras, *J. Algebra*, **179**, (1996), 528–548.
- [Mi2] M. Miyamoto: VOAs generated by two conformal vectors whose τ -involutions generate S_3 . *J. Algebra* **268**, (2003), 653–671.
- [No] S. Norton: On the group Fi_{24} . *Geom. Dedicata*, **25**, (1988), 483–501.