パラメータの入った D 加群についてのアルゴリズム
Algorithms of D-modules with parameters

東海大学　　中山洋将 *1
Nakayama Hiromasa
Tokai University

Abstract

By using comprehensive Gröbner systems, we partly implement an algorithm to compute the restriction module of a D-module with parameters. We give an example of restriction modules of Appell F_2.

1　導入

パラメータの入った D 加群 (例えば Appell の 2 変数超幾何微分方程式系に対応する D 加群など) に対して, 制限加群を計算するアルゴリズムを微分作用素環の Comprehensive Gröbner System(CGS) を用いて, 一部 (generic b 関数の計算まで) ではあるが実装を行った. それを用いて Appell の 2 変数超幾何微分方程式系の原点での正則解のなす解空間の次元を, 一部ではあるが計算した. 微分作用素環の CGS については, [1], [2] のアルゴリズムを用いる. 微分作用素環の CGS の例を 1 つ挙げる.

例 1 (Appell F_2 の CGS)
Appell の 2 変数超幾何関数 $F_2(\alpha,\beta,\beta',\gamma,\gamma';x,y)$ の満たす微分方程式系

$$P_1=\partial_x(\theta_x+\gamma-1)-(\theta_x+\theta_y+\alpha)(\theta_x+\beta),\quad P_2=\partial_y(\theta_y+\gamma'-1)-(\theta_x+\theta_y+\alpha)(\theta_y+\beta')$$

に対応する左 D イデアル $I=D\cdot\{P_1,P_2\}$ について, 辞書式順序 $(x>y>\partial_x>\partial_y)$ について CGS を計算する. ここで $\theta_x=x\partial_x$, $\theta_y=y\partial_y$, D は 2 変数多項式係数微分作用素環を表す. CGS はパラメータの条件に対応する strata とパラメータがその条件の時のグレブナー基底の組からなる. この場合は, CGS の strata は 4 つ出てきて,

1. $V(0)\setminus V(\beta'(\gamma'-\beta'-1))$　(i.e. $\beta'\neq 0$ かつ $\gamma'-\beta'-1\neq 0$),
2. $V(\beta')\setminus V(\gamma'-1)$　(i.e. $\beta'=0$ かつ $\gamma'-1\neq 0$),
3. $V(\beta',\gamma'-1)$　(i.e. $\beta'=0$ かつ $\gamma'-1=0$),
4. $V(\gamma'-\beta'-1)\setminus V(\beta')$　(i.e. $\gamma'-\beta'-1=0$ かつ $\beta'\neq 0$)

となり, それに対応する 4 つのグレブナー基底が出てきて, 各グレブナー基底の先頭項は,

1. $y^3\partial_x\partial_y^3,\ \beta'(\gamma'-\beta'-1)x\partial_x,\ xy^3\partial_y^4,$

*1 〒 259-1292 神奈川県平塚市北金目 4-1-1　E-mail: `nakayama@tokai-u.jp`

2. $y^3\partial_x\partial_y^2,\ (\gamma'-1)x\partial_x\partial_y,\ xy^3\partial_y^3,\ x^2\partial_x^2,$

3. $y^2\partial_x\partial_y^2,\ xy\partial_x\partial_y,\ xy^2\partial_y^3,\ x^2\partial_x^2,$

4. $y^2\partial_x\partial_y^2,\ xy\partial_x\partial_y,\ xy^2\partial_y^3,\ x^2\partial_x^2.$

2　パラメータの入った D 加群の制限アルゴリズム

D イデアル I の D 加群 $M = D/I$ に対する制限加群のアルゴリズムを復習する.

アルゴリズム 1 (制限加群の計算アルゴリズム, [5](Algorithm.5.2.8))

- 入力 : ホロノミック D イデアル I の生成系, 重みベクトル $w \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$ で $w_1, \ldots, w_m > 0,\ w_{m+1} = \cdots = w_n = 0$ を満たすもの.
- 出力 : 制限加群 $D/(I + x_1 D + \cdots + x_m D)$ の表示 $(D')^r/M$.
(ここで, $D' = \mathbb{C}\langle x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n, \partial_{m+1}, \partial_{m+2}, \ldots, \partial_n\rangle$)

1. I の単項式順序 $<_{(-w,w)}$ についてのグレブナー基底 $G = \{g_1, \ldots, g_p\}$ の計算.
2. I の w についての generic b 関数 $b(s)$ の計算. (i.e. $\mathrm{in}_{(-w,w)}(I) \cap \mathbb{C}[s]$ の生成元の計算, ここで $s = w_1\theta_1 + \cdots + w_m\theta_m$)
3. s_0 を $b(s)$ の最大整数根とする. $s_0 < 0$ または整数根がない時, 制限加群は 0 で終了.
4. $(D')^r$ を $\mathcal{B}_{s_0} = \{\partial_1^{i_1} \cdots \partial_m^{i_m} \mid i_1 w_1 + \cdots + i_m w_m \leq s_0\}$ の各元を基底とする自由左 D'-加群とする. (ここで r は $\mathcal{B}_{s_0}$ の要素の個数である)
5. $m_i = \mathrm{ord}_{(-w,w)}(g_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, p)$ とし, $\mathcal{B}_{s_0 - m_i}$ を考える.
6. 各 $i = 1, \ldots, p$ と各 $\partial^\beta \in \mathcal{B}_{s_0 - m_i}$ に対して, $\partial^\beta g_i$ を標準形 $\sum_{u,v} c_{uv} x^u \partial^v$ に直して $x_1 = \cdots = x_m = 0$ を代入したもの考える. これは $D' \cdot \mathcal{B}_{s_0} \cong (D')^r$ の元とみなせる.
7. M を 6. の元たちで生成される $(D')^r$ の D' 部分加群とする.
8. 制限加群 $(D')^r/M$ を返す.

ここで, パラメータ入りの D イデアルについて制限加群を計算するとすれば, Step 1, 2 のグレブナー基底計算の部分を CGS の計算に直せばよい. 問題となるのは, b 関数の根にパラメータが含まれる場合で, その根が非負整数根になるかどうかで場合分けをする必要があり, 現時点では完全なアルゴリズムにはできていない.

例 2 (Appell F_2 の $w = (1,1)$ についての制限加群の計算)
Appell $F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma'; x, y)$ の満たす微分方程式系に対応する左 D イデアル I (例 1) について, $w = (1,1)$ の generic b 関数の計算を行えば, パラメータが 3 つの条件の場合に分かれ, 各 generic b 関数が

$$
\begin{array}{ll}
V(0) \setminus V((\gamma-\gamma')(\gamma+\gamma'-2)) \text{ の時}, & s(s+\gamma'-1)(s+\gamma-1)(s+\gamma+\gamma'-2), \\
V(\gamma-\gamma') \text{ の時}, & s(s+\gamma-1)(s+2\gamma-2), \\
V(\gamma+\gamma'-2) \setminus V(\gamma-1, \gamma'-1) \text{ の時}, & s(s-\gamma+1)(s+\gamma-1)
\end{array}
$$

となる.

$\gamma = \gamma'$ の時を考える. generic b 関数は $s(s+\gamma-1)(s+2\gamma-2)$ で, 根は $s = 0,\ 1-\gamma,\ 2-2\gamma$ となる. 非負最大整数根 s_0 は, $\gamma \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$ の時, $s_0 = 0$, それ以外の時は $s_0 = 2 - 2\gamma$ となる.

1. $\gamma \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$ の時, 制限加群 $D/(I+xD+yD)$ は $\mathbb{C}$ ベクトル空間として $\mathbb{C}$ と同型. これより, 原点での正則解のなすベクトル空間の次元が 1 であることがわかる.

2. $\gamma \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ の時, 制限加群 $D/(I+xD+yD)$ は $\mathbb{C}$ ベクトル空間として, $\mathbb{C}^r/M$ と同型になる. ここで $r = \#\{\partial_x^i \partial_y^j \mid i+j \leq 2-2\gamma\} = \binom{4-2\gamma}{2} = (3-2\gamma)(2-\gamma)$ であり, M は先のアルゴリズム Step.7 で計算されるものである.

   しかし一般の場合に計算させるのは困難なので, $\gamma = \gamma' = 0$ の時についてだけ制限加群を計算してみる. これにはアルゴリズム 1 をそのまま使えばよい. 制限加群と同型な $\mathbb{C}$ ベクトル空間 $\mathbb{C}^6/M$ が得られる. ここで $M = \mathrm{Im}A^t$ で, A は

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\beta'(\alpha+1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -(\alpha+1)(\beta'+1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha\beta' \\ 1 & 0 & -(\alpha+1)(\beta+1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta(\alpha+1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha\beta \\ 0 & 0 & \beta'(\alpha+1) & 0 & 0 & -\alpha^2\beta\beta' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta(\alpha+1) & \alpha^2\beta\beta' \end{pmatrix}$$

   である. このベクトル空間 $\mathbb{C}^6/M$ の次元について計算すると

$V(0) \setminus V(\alpha(\alpha+1)\beta\beta')$ の時,	1,	$V(\beta') \setminus V(\alpha(\alpha+1)\beta)$ の時,	2,
$V(\beta, \beta')$ の時,	4,	$V(\alpha, \beta') \setminus V(\beta)$ の時,	3,
$V(\alpha+1, \beta') \setminus V(\alpha\beta^2)$ の時,	3,	$V(\beta) \setminus V(\alpha(\alpha+1)\beta'^2)$ の時,	2,
$V(\alpha, \beta) \setminus V(\beta'^3)$ の時,	3,	$V(\alpha+1, \beta) \setminus V(\alpha\beta'^3)$ の時,	3,
$V(\alpha) \setminus V(\beta^2\beta'^2)$ の時,	2,	$V(\alpha+1) \setminus V(\alpha\beta\beta'^2)$ の時,	3

   となることがわかり, これらは Appell F_2 の超幾何微分方程式系の $\gamma = \gamma' = 0$ の場合の, 原点の正則解のなすベクトル空間の次元と対応している.

参 考 文 献

[1] K. Nabeshima, K. Ohara, S. Tajima, Comprehensive Gröbner Systems in Rings of Differential Operators, Holonomic D-modules and B-functions. Proc. ISSAC2016, 349–356, 2016.

[2] K. Nabeshima, K. Ohara, S. Tajima, Comprehensive Grbner systems in PBW algebras, Bernstein-Sato ideals and holonomic D-modules. J. Symbolic Comput. 89 (2018), 146–170.

[3] T. Oaku, Algorithms for b-functions, restrictions, and algebraic local cohomology groups of D-modules, Advances in Applied Math. 19 (1997), 61-105.

[4] T. Oaku, N. Takayama, Algorithms for D-modules –restriction, tensor product, localization, and local cohomology groups, J. Pure and Applied Algebra 156 (2001), 267-308.

[5] M. Saito, B. Sturmfels, N. Takayama, *Gröbner Deformations of Hypergeometric Differential Equations*, Springer, 2000