Moving curve ideals, Rees algebra and parametric local cohomology systems

新潟大学大学院自然科学研究科　　田島慎一[*1]
TAJIMA, Shinichi
Graduate School of Science and Technology,
Niigata University

徳島大学大学院社会産業理工学研究部　　鍋島克輔[*2]
NABESHIMA, Katsusuke
Graduate School of Technology, Industrial and Social Sciences,
Tokushima University

1　序

本稿では, 射影平面 $\mathbb{P}^2$ 内の代数曲線の媒介変数表示から対応する Rees algebra の定義方程式系を求める方法について考察する. Rees algebra の定義方程式系を求める方法として, まず μ-basis を求め, その後に Sylvester form を用いたりあるいは D-module のアルゴリズムを利用したりする等, 様々な計算法が研究されている. これら既存の計算法の多くは, 理論的には local cohomology を用いているが, 計算そのものには local cohomology を利用していないように思える. 一般に, μ-basis を求めた後, parametric local cohomology system を求めるアルゴリズムを利用することで, 代数曲線の定義方程式を求めることが出来る. 本稿ではこの点に着目し, parametric local cohomology を求める計算を積極的に活用することで, Rees algebra の定義方程式系も求めることが可能となることを紹介する.

第 2 節と第 3 節で, 基本的な事柄を紹介する. 概念の正確な定義や基本的性質などに関しては, 論文 [4, 8, 16, 18, 39] を参照されたい. 第 4 節で, 具体例を用いて, μ-basis が定めるパラメータ付きの local cohomology を求めることで, 代数曲線の定義方程式を求められることを紹介する. さらに, moving curves 即ち, Rees 環の定義方程式系との関係について考察する. 第 5 節で, parametric local cohomology systems を計算するアルゴリズムの利用法について紹介する.

2　moving lines and μ-basis

射影平面 $\mathbb{P}^2$ 内の代数曲線 C が, 射影直線 $\mathbb{P}^1$ から射影平面 $\mathbb{P}^2$ への写像

$$[s,t] \longrightarrow [x,y,z] = [a(s,t), b(s,t), c(s,t)]$$

*1 〒 950-2181 新潟市西区五十嵐 2 の町 8050　E-mail: tajima@math.tsukuba.ac.jp
*2 〒 770-8506 徳島市南常三島町 2-1　E-mail: nabeshima@tokushima-u.ac.jp

の像として与えられたとする．ここで a, b, c は，s, t について同次 d 次の多項式とする．

媒介変数 s, t を変数として持つ多項式の組

$$A(s,t), B(s,t), C(s,t) \text{ と } A'(s,t), B'(s,t), C'(s,t)$$

を係数にもつ x, y, z のふたつの一次式であり，代数曲線上

$$A(s,t)x + B(s,t)y + C(s,t)z = 0,$$

$$A'(s,t)x + B'(s,t)y + C'(s,t)z = 0$$

を満たすものが与えられたとする．両者はともに，s, t をパラメータにもつ $\mathbb{P}^2$ 内の直線族と見做せる．いま

$$p = Ax + By + Cz, \ q = A'x + B'y + c'z$$

とおく．2 直線 $p = 0, q = 0$ は異なると仮定すれば，これらは $\mathbb{P}^2$ において 1 点を共有する．このことは即ち，代数曲線 C を二つの直線族の交点の軌跡として特徴付ける式と理解できる．T. Sederberg らは Computer-Aided Geometric Design の分野において，このような直線族，即ち moving lines を用いて代数曲線の定義多項式を構成していく手法を考案した ([38, 39])．また，D. Cox らは，代数曲線の定義方程式を得るには，moving lines を用いた算法の方が Gröbner 基底計算による消去を行うより計算効率が良いことを示した ([16])．

例をふたつ，紹介する．

例 1　$x = s^2, y = st, z = t^2$ とする．2 直線 $p = 0, q = 0$ を次で与える．

$$p = tx - sy, q = ty - sz$$

p, q の独立変数 x, y, z に媒介変数表示を代入すると，両者ともに零となる．即ち，moving lines である．行列を用いた表示は

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y & x \\ -z & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

である．この 2×2 行列の行列式 D を考える．$D = xz - y^2$ は，媒介変数表示で与えられた代数曲線の定義方程式である．ここで，D は

$$D \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & -x \\ z & -y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

を満たすことに注意する．このことは特に，D がイデアル商 $\langle p, q \rangle : \langle s, t \rangle$ に属すことを意味する．

例 2　$x = 6s^2t^2 - 4t^4, y = 4s^3t - 4st^3, z = s^4$ とする．Moving lines $p = 0, q = 0$ は

$$p = stx + (\frac{1}{2}s^2 - t^2)y - 2stz, \ q = s^2x - sty - 2t^2z$$

で与えられる．

行列表示

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tx + \frac{1}{2}sy - 2tz & -y \\ sx - ty & -2z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t^2 \end{pmatrix}$$

の行列式を r_1 とおく．

$$r_1 = sxy - ty^2 - 2txz - syz + 4tz^2$$

である. 同様に, 行列表示

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y & sx - ty - 2sz \\ x & -sy - 2tz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^2 \\ t \end{pmatrix}$$

の行列式を -1 倍したものを r_2 とおく.

$$r_2 = sx^2 - txy + \frac{1}{2}sy^2 - 2sxz + tyz$$

である. 先程, 行列式を -1 倍したのは, x^2 の係数を $-s$ でなく s にしたかっただけで, 本質的な意味はない. 多項式 r_1, r_2 は, s, t に関し同次一次, x, y, z に関し同次 2 次式である. 2 次の多項式 r_1, r_2 の変数 x, y, z に媒介変数表示を代入すれば零となる.

さてここで, 多項式 r_1, r_2 を s, t について整理すれば,

$$r_1 = (xy - yz)s + (-2xz - y^2 + 4z^2)t,$$

$$r_2 = (x^2 - 2xz + \frac{1}{2}y^2)s + (-xy + yz)t$$

となるので, 行列表示

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy - yz & -2xz - y^2 + 4z^2 \\ x^2 - 2xz + \frac{1}{2}y^2 & -xy + yz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

をえる. この行列の行列式を D とおく.

$$D = 2x^3z - 8x^2z^2 + xy^2z + 8xz^3 + \frac{1}{2}y^4 - 3y^2z^2$$

である. この D は代数曲線の定義方程式に他ならない.

例 1, 例 2 で用いられた moving lines の持つ性質を一般化したのが, μ-basis の概念である. D. Cox らは μ-basis の存在を示し, 代数曲線に対する implicitization の問題と Hilbert-Burch の定理との関係を論じた ([8]).

3 moving curves and Rees algebra

以下, 有理数体 $\mathbb{Q}$ を係数にもち, s, t を変数とする多項式環を $R = \mathbb{Q}[s, t]$ で表す. 環 R において a, b, c が生成するイデアルを I とおく. イデアル I の Rees 環を $Rees(I)$ で表す.

$$Rees(I) = R \oplus I \oplus I^2 \oplus I^3 \oplus \cdots.$$

環 R を係数にもつ多項式環 $R[x, y, z]$ から Rees 環 $Rees(I)$ への写像

$$h : R[x, y, z] \longrightarrow Rees(I)$$

を, $h(x) = a, h(y) = b, h(z) = c$ で定め, この写像 h の核を K で表す. このとき

$$Rees(I) = R[x, y, z]/K$$

が成り立つ. この K の生成元を Rees 環の定義方程式系と呼ぶ.

さて,

$$g = \sum A_{i,j,k}(s,t)x^i y^j z^k \in R[x,y,z]$$

とする. このとき, g が K に属すことは, 明らかに

$$\sum A_{i,j,k}(s,t)a(s,t)^i b(s,t)^j c(s,y)^k = 0$$

を意味する.

いま, g は K に属し, x, y, z に関し同次 m 次であるとする. このとき, $g = 0$ は代数曲線 C の m 次の moving curve であるという. Moving curves を考察することは, Rees 環の定義方程式系を考えることに他ならない. 従って, μ-basis を用いて代数曲線の implicitization を行うことは, Rees 環の定義方程式系を求めることと解釈できる. この observation が, D. Cox らによる論文の基本をなしている ([18, 19]).

例 2 では, moving curves を具体的に求めているが, この計算の裏にどの様な数学的構造が潜んでいるのかについて考える. そのために, s, t を主変数, x, y, z をパラメータと見做し, 環 $\mathbb{Q}[x,y,z][s,t]$ を考える. 次の結果は, Busé による ([4]).

定理 p, q は μ-basis とする. このとき次がなりたつ.

(i) $K = \langle p, q\rangle : \langle s, t\rangle^\infty$

(ii) $K/\langle p, q\rangle = H^0_{\mathrm{m}}(\mathbb{Q}[x,y,z][s,t]/\langle p, q\rangle)$

ただし, m は極大イデアル $\langle s, t\rangle$ である.

探していた答えは, イデアル商と local cohomology の概念にあるということになる.

4 local cohomology

この節では, 例 2 の場合に, パラメータ付きの local cohomology を用いて実際に moving curves を求めてみることにする.

$x = 6s^2t^2 - 4t^4, y = 4s^3t - 4st^3, z = s^4$ である. まず, μ-basis p, q の主変数は s, t であるとみなして p, q を整理する.

$$p = \frac{1}{2}ys^2 + (x-2z)st + (-y)t^2,\ q = xs^2 + (-y)st + (-2z)t^2$$

を得る.

原点に台を持つ local cohomology

$$H^2_{\langle p,q\rangle} = H^2_{\langle p,q\rangle}(\mathbb{Q}[x,y,z][s,t]) = \{\psi \mid p\psi = q\psi = 0\}$$

の要素を [40] にある手順に従って, 順次もとめていく.

まず, p, q は s, t について同次 2 次式なので

$$\begin{bmatrix} 1 \\ st \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ s^2t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ st^2 \end{bmatrix}$$

が $H^2_{\langle p,q\rangle}$ に属すことがわかる. 次に, 未定係数 $c_{3,1}, c_{2,2}, c_{1,3}$ を用いて

$$\eta_4 = c_{3,1}\begin{bmatrix} 1 \\ s^3t \end{bmatrix} + c_{2,2}\begin{bmatrix} 1 \\ s^2t^2 \end{bmatrix} + c_{1,3}\begin{bmatrix} 1 \\ st^3 \end{bmatrix}$$

とおく．このとき

$$p\eta_4 = (\frac{1}{2}yc_{3,1} + (x-2z)c_{2,2} + (-y)c_{1,3})\begin{bmatrix} 1 \\ st \end{bmatrix}$$

および

$$q\eta_4 = (xc_{3,1} + (-y)c_{2,2} + (-2z)c_{1,3})\begin{bmatrix} 1 \\ st \end{bmatrix}$$

となるので, $\eta_4 \in H^2_{\langle p,q\rangle}$ なる条件は行列を用いて

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}y & x-2z & -y \\ x & -y & -2z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{3,1} \\ c_{2,2} \\ c_{1,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と表せる．非自明な解 $c_{3,1}, c_{2,2}, c_{1,3}$ は, 小行列式を使って

$$\begin{aligned}\left(\begin{vmatrix} x-2z & -y \\ -y & -2z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -y & \frac{1}{2}y \\ -2z & x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{1}{2}y & x-2z \\ x & -y \end{vmatrix}\right) \\ = (-2xz - y^2 + 4z^2, -xy + yz, -x^2 + 2xz - \frac{1}{2}y^2)\end{aligned}$$

で与えられる．これにより同次 -4 次の local cohomology class

$$\eta_4 = (-2xz - y^2 + 4z^2)\begin{bmatrix} 1 \\ s^3t \end{bmatrix} + (-xy + yz)\begin{bmatrix} 1 \\ s^2t^2 \end{bmatrix} + (-x^2 + 2xz - \frac{1}{2}y^2)\begin{bmatrix} 1 \\ st^3 \end{bmatrix}$$

を得る

次に同次 -5 次の local cohomology class を考える．先程と同様に

$$\eta_5 = c_{4,1}\begin{bmatrix} 1 \\ s^4t \end{bmatrix} + c_{3,2}\begin{bmatrix} 1 \\ s^3t^2 \end{bmatrix} + c_{2,3}\begin{bmatrix} 1 \\ s^2t^3 \end{bmatrix} + c_{1,4}\begin{bmatrix} 1 \\ st^4 \end{bmatrix}$$

とおく．

$\eta_5 \in H^2_{\langle p,q\rangle}$ とすると, 同次 -4 次の local cohomology class $s\eta_5, t\eta_5$ はともに η_4 の定数倍でなければならない．従って, 非自明な解が存在する両立条件として

$$c_{3,1}c_{1,3} = c_{2,2}^2$$

を得るが, これは, 代数曲線の定義多項式

$$D = 2x^3z - 8x^2z^2 + xy^2z + 8xz^3 + \frac{1}{2}y^4 - 3y^2z^2$$

そのものである．

この例の場合, 同次 -5 次までの local cohomology class を求めることで, 与えられた代数曲線の定義方程式を得たことになる．

ここからが, 本稿の本題である．Busé らの結果に注目すれば, local cohomology class の計算により moving curve ideal を求めることができるはずであると考えるのは自然である．代数曲線の定義式を得るには, -5 次の local cohomology class まで計算しているが, -5 次の local cohomology class を求める前に, -4 次の local cohomology class η_4 を求めているので, この η_4 に注目する．

Moving curves の定義多項式 r_1, r_2 は

$$r_1 = (xy - yz)s + (-2xz - y^2 + 4z^2)t,$$

$$r_2 = (x^2 - 2xz + \frac{1}{2}y^2)s + (-xy + yz)t$$

であった. 他方, η_4 は次である.

$$\eta_4 = (-2xz - y^2 + 4z^2)\begin{bmatrix} 1 \\ s^3t \end{bmatrix} + (-xy + yz)\begin{bmatrix} 1 \\ s^2t^2 \end{bmatrix} + (-x^2 + 2xz - \frac{1}{2}y^2)\begin{bmatrix} 1 \\ st^3 \end{bmatrix}.$$

Moving curve と local cohomology の関係を見るために, いま試しに, 与えられた r_1 の式を用いて $r_1\eta_4$ を計算する.

$$r_1\eta_4 = \{(xy - yz)(-2xz - y^2 + 4z^2) + (-2xz - y^2 + 4z^2)(-xy + yz)\}\begin{bmatrix} 1 \\ s^2t \end{bmatrix}$$

$$+\{(xy - yz)(-xy + yz) + (-2xz - y^2 + 4z^2)(-x^2 + 2xz - \frac{1}{2}y^2)\}\begin{bmatrix} 1 \\ st^2 \end{bmatrix}$$

を得る. 先程求めた $D = 0$ を使うと $r_1\eta_4 = 0$ となることを確かめられる.

我々が解くべき問題は, μ-basis p, q が与えられたときに moving curves, 即ち r_1, r_2 を求める事であった.

そこで, $r \in \langle p, q\rangle : \langle s, t\rangle^\infty$ が, $rs, rt^2 \in \langle p, q\rangle$ を満たすとする. この条件を local cohomology で書き直し, η_4 を用いながら線型方程式を解くと, 非自明な解として moving curve r_1 を得る. 同様に $rs^2, rt \in \langle p, q\rangle$ を満たす非自明な r をもとめることで moving curve r_2 を得ることができる.

パラメータ付きの local cohomology を使うことで, Rees 環の定義方程式系を求めることができることを確認した.

5 parametric local cohomology systems の利用

論文 [35] において, parametric local cohomology system の概念を導入しその計算アルゴリズムを与えた. このアルゴリズムは, もともとパラメータを含むイデアルであり, パラメータが generic な場合はその零点集合が原点を孤立点として持つものが与えられたとき, イデアルの構造のパラメータ依存性を調べることを目的とし, イデアルに対応する local cohomology class を計算するものである. パラメータ付きの local cohomology class を計算することで, local cohomology class 達のなすベクトル空間の構造のパラメータ依存の仕方を求め, これらの構造の違いによりパラメータ空間の分割を与え, その stratum 毎に local cohomology class からなるベクトル空間の基底を出力するアルゴリズムである. つまり, このアルゴリズムは, 入力として, パラメータを含む零次元イデアルを想定してつくられていたものである. 特別なパラメータに対してイデアルの原点を通る零点集合が 0 次元でなくなるような場合にこのアルゴリズムをそのまま動かすと計算が止まらなくなってしまう. この問題を避けるために通常は [36] にあるアルゴリズムを使って, 局所次元の判定を行う必要がある.

本稿で扱っている問題では, パラメータが代数曲線を定める stratum と, その stratum における local cohomology class を求めることが重要になるが, この場合は, local cohomology の主変数である s, t のなす空間でのイデアルの零点集合は, 原点を孤立した点として持たない.

上に述べたように parametric local cohomology system での計算法では, 原点を孤立した零点ではなく次元の高い零点集合内の点として含んでいる場合, 対応するパラメータ付きの local cohomology class をいくらでも求めることができる. このことを踏まえて, 本稿で扱っている問題について再び考えると, 代数曲線の定義方程式や Rees 環の定義方程式系を求めるのに必要な local cohomology class は有限個で十分であることがわかる. つまり, 計算に必要となる次数までの同次 local cohomology class を求めた段階でこのアルゴリズムを停止させればその後に必要なデータはすべて得られるということになる.

Parametric local cohomology systems を求めるアルゴリズムそのものは, 基本的にパラメータ空間の分割を与え, そのすべての strata に対し, 対応する local cohomology class 達のなすベクトル空間の基底を与えるものである．本稿で扱っている問題では, イデアルの零点集合が原点を孤立点として持つ場合を考える必要は無いので, このような strata 上では local cohomology class の計算を停止するように, プログラムを修正することで計算の効率化が図れる．また, strata の条件式に, 媒介変数を代入した結果が零とならないような strata も, 対応する local cohomology class 達の計算を停止させるようにプログラムを書き換えることで, 計算の効率化を図れる．計算で求める local cohomology class はすべて, homogeneous であることが予め分かっているので, この点を考慮してプログラムを書き換えることで計算効率を上げることができる．

第 4 節に示した計算では, 代数曲線の定義方程式を求めた後, local cohomology を使って moving curve を求めている．しかし第 3 節にある計算のように, 本来は, moving curve 達の計算を先に行い, その後, それらを利用しながら代数曲線の定義方程式を導くのが自然である．このように考えると, 計算の仕方を正しく理解できれば parametric local cohomology system の計算アルゴリズムを特殊化することで Rees 環の定義方程式系をより効率よく求める計算法を作ることが出来るのではないかと期待している．

Rees 環の定義方程式系に関しては, 様々な研究が盛んになされている．本稿で紹介した parametric local cohomology systems の利用がこの周辺の問題に役に立つことを願っている．

参　考　文　献

[1] N. Botbol and A. Dickenstein, Implicitization of rational hypersurfaces via linear syzygies : a practical overview, J. Symbolic Computation, **74** (2016), 493–512.

[2] R. Burity Sylvester forms and Rees algebras, Thesis, Campina Grande, Paraíba 2015.

[3] R. Burity, A. Simis and S. O. Tohaneanu, On a conjecture of Vasconcelos via Sylvester forms, J. Symbolic Computation, **77** (2016), 39–62.

[4] L. Busé, On the equations of the moving curve ideal of a rational algebraic plane curve, J. Algebra **321** (2009), 2317–2344.

[5] L. Busé and J.-P. Jouanolou, On the closed image of a rational map and the implicitization problem, J. Algebra **265** (2003), 312–357.

[6] L. Busé and M. Chardin, Implicitizaing retional hypersurfaves using approximation complexes, J. Symbolic Computation **40** (2005), 1150–1168.

[7] F. Chen, J. Zheng and T. W. Sederberg, The μ-basis of a ruled surface, Computer Aided Geometric Design **18** (2001), 61–72.

[8] F. Chen, D. Cox and Y. Liu, The μ-basis and implicitization of a rational parametric surface, J. Symbolic Computation, **39** (2005), 689–706.

[9] Y. Cid Ruiz, Syzygies, Dissertation, The Abdus Salam International Center for Theoretical Physics, Trieste, Italy 2016.

[10] Y. Cid Ruiz, Bounding the degrees of a minimal μ-basis for a rational surface parametrization, J. Symbolic Computation **95** (2019), 134-150.

[11] Y. Cid-Ruiz, A D-module approach on the equations of the Rees algebra, to appear in J. Commutative Algebra.

[12] T. Cortadellas Benitez and C. D'Andrea, Minimal generators of the defining ideal of the Rees algebra associated to monoid parametrizations, Computer Aided Geometric Design **27** (2010), 461–473.

[13] T. Cortadellas Benitez and C. D'Andrea, Minimal generators of the defining ideal of the Rees algebra associated to a rational plane parametrization with $\mu = 2$, Canad. J. Math. **66** (2014), 1225-1249.

[14] T. Cortadellas Benitez and C. D'Andrea, The Rees algebra of a monomial plane parametrization, J. Symbolic Computation **70** (2015), 71–105.

[15] T. Cortadellas Benítez, D. Cox and C. D'Andrea, The Rees algebra of parametric curves via liftings, J. Pure Appl. Algebra **224** (2020), 869–893.

[16] D. A. Cox, T. W. Sederberg and F. Chen, The moving line ideal basis of planar rational curves, Computer Aided Geometric Design **15** (1998), 803–827.

[17] D. A. Cox, J. Little and D. O'Shea, Using Algebraic Geometry, Springer 2nd Ed. 2004.

[18] D. Cox, The moving curve ideal and the Rees algebra, Theoretical Computer Science **392** (2008), 23–36.

[19] D. Cox, W. Hoffman and H. Wang, Syzygies and the Rees algebra, J. Pure and Applied Algebra **212** (2008), 1787–1796.

[20] D. Cox, A. R. Kustin C. Polini and B. Ulrich, A study of singularities on rational curves via syzygies, Mem. Amer. Math. Soc. **222** (2013), 116pp

[21] C. D'Andrea, Resultants and moving surfaces, J. Symbolic Computation **31** (2001), 583–602.

[22] C. D'Andrea, On the structure of μ-basis, Comm. Algebra **32** (2004), 159–165.

[23] D. Eisenbut, The ReesAlgebra package in Macaulay 2, Journal of Software for Algebra and Geometry **8** (2018), 49–60.

[24] S. H. Hassanzadeh and A. Simis, Implicitization of de Jonquières parametrization, J. Commut. Algebra **6** (2014), 149–172.

[25] J. Hoffman, H. Wang, X. Jia and R. Goldman, Minimal generators for the Rees algebra of rational space curves of type (1,1,d-2), European J. of Pure and Applied Math. **3** (2010), 602–632.

[26] X. Jia and R. Goldman, μ-basis and singularities of rational planar curves, Computer Aided Geometric Design, **26** (2009), 970–988.

[27] B. Johnston and J. Verma, Local cohomology of Rees algebras and Hilbert functions, Proc. AMS **123** (1995), 1–10.

[28] J. -P. Jouanolou, Résultant anisotrope compléments et applications, Electron J. Combin. **3** (1996), 91pp.

[29] J. -P. Jouanolou, Formes d'inertie et résultant, Adv. Math. **126** (1997), 119–250.

[30] J. -P. Jouanolou, An explicit duality for quasi-homogeneous ideals, J. Symbolic Computation **44** (2009), 864–871.

[31] A. Kustin, C. Polini and B. Ulrich, The equations defining blowup algebras of height three Gorenstein ideals, Algebra Number Theory **11** (2017), 1489–1525.

[32] A. Kustin, C. Polini and B. Ulrich, The bi-graded structure of symmetric algebras with applications to Rees rings, J. Algebra, **469** (2017), 188–250.

[33] J. Madsen, Equations of Rees algebras and singularities of rational plane curves, Thesis, Notre Dame, Indiana 2016.

[34] V. Mukundan, Rees algebras and iterated Jacobian duals, Thesis, Purdue Univ. 2015.

[35] K. Nabeshima and S. Tajima, Algebraic local cohomology with parameters and parametric standard bases for zero-dimensional ideals, J. Symbolic Computation, **82** (2017), 91–122.

[36] K. Nabeshima and S. Tajima, Testing zero-dimensionality of varieties at a point, to appear in Mathematics in Computer Scinece.

[37] S. Roy, On the defining equations of Rees algebra of a height two perfect ideal using the theroy of D-modules, arXiv:1809.08917v1.

[38] T. Sederberg, T. Saito, K. S. Klimaszewski and D. Qi, Curve implicitization using moving lines, Computer Aided Geometric Design **11** (1994), 687–706.

[39] T. Sederberg, R. Goldman and H. Du, Implicitizing rational curves by the method of moving algebraic curves, J. Symbolic Computation, **23** (1997), 153–175.

[40] S. Tajima, Y. Nakamura and K. Nabeshima, Standard bases and algebraic local cohomology for zero dimensional ideals, Advanced Studies in Pure Mathematics, **56** (2009), 341–361.

[41] H. Tsai and U. Walther, Computing homomorphisms between holonomic D-modules, J. Symbolic Computation **32** (2001), 597–617.

[42] J. Zheng and T. W. Sederberg, A direct approach to computing the μ-basis of planar rational curves, J. Symbolic Computation **31** (2001), 619–629.