

半擬斉次孤立特異点の性質を利用した局所 b -関数の計算

Computation method of local b -functions using properties of semi-quasihomogeneous singularities

徳島大学大学院社会産業理工学研究部 鍋島克輔 *1

NABESHIMA, KATSUSUKE

GRADUATE SCHOOL OF TECHNOLOGY, INDUSTRIAL AND SOCIAL SCIENCES, TOKUSHIMA UNIVERSITY

新潟大学大学院自然科学研究科 田島慎一 *2

TAJIMA, SHINICHI

GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY, NIIGATA UNIVERSITY

Abstract

Local b -functions (Bernstein-Sato polynomials) are one of important invariants of hypersurface singularities. In this paper, semi-quasihomogeneous hypersurface singularities and their local b -functions are considered. New computation methods of $\text{Ann}(f^s)$ and local b -functions of the semi-quasihomogeneous hypersurface singularities are introduced. The underlining ideas of the new methods are using properties of semi-quasihomogeneous hypersurface singularities and generalized integral dependence relations. It is shown that $\text{Ann}(f^s)$ and local b -functions can be obtained in a commutative polynomial ring, namely, non-commutative Gröbner bases are not needed in the new method. The resulting algorithms of the proposed new methods have been implemented in the compute algebra system Risa/Asir. The results of benchmark tests are also given.

1 序

Bernstein-Sato 多項式 (以下 b -関数と呼ぶ) は, 概均質ベクトル空間の研究, 定数係数線型偏微分方程式の基本解の研究において佐藤幹夫と J. Bernstein により導入された重要な概念である. また, b -関数は, 特異点論における重要な複素解析的不変量でもあるが, 理論的考察のみにより b -関数を決定することは一般には不可能と考えられている. b -関数を求める際, 何らかの計算を実際に行うことになるが, b -関数はデリケートな側面を持つため, アルゴリズムが必要となる. 本稿では, 半擬斉次多項式の局所 b -関数の新しい計算法について紹介する.

1990 年代に大阿久俊則は, b -関数のアルゴリズム的な計算法を発見した [16, 17, 18, 19]. その後, 多くの人々によるさらなる研究により, 計算アルゴリズムの改良, 効率化がなされている [2, 10, 12, 14]. これらの b -関数計算アルゴリズムは非可換グレブナー基底計算に基づいて構成されており, その計算量は一般に非常に大きい. 実際, 計算機代数システムに実装されている b -関数を計算する最新のプログラムを用いても相当な時間を要する場合が多い.

本研究の 1 つの目的は, 矢野環, 加藤満生 [7, 8, 22, 23] の職人技のような $\text{Ann}(f^s)$ の計算技法を, 計算機代数の観点から再構築しアルゴリズム化することである. この計算法は, 非可換グレブナー基底を用い

*1 〒 770-8506 徳島市南常三島町 2-1 E-mail: nabeshima@tokushima-u.ac.jp

*2 〒 950-2181 新潟市西区五十嵐 2 の町 8050 E-mail: tajima@math.tsukuba.ac.jp

ない方法であり、現存する計算法より効率的であることが期待される。2つ目の目的は、半擬斉次特異点の性質を b -関数計算に利用し計算効率の向上を図ることである。

2 局所 b -関数

ここでは、本稿で扱う記号と定義を紹介する。

n 個の変数を x_1, x_2, \dots, x_n とし、変数 x_i で偏微分するという操作を $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i}$ で表す ($1 \leq i \leq n$)。 n 個の変数の省略形を $x := \{x_1, \dots, x_n\}$, n 個の偏微分作用素の省略形を $\partial_x := \{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ とする。このとき、 $i \neq j$ で $x_i x_j = x_j x_i$, $x_i \partial_j = \partial_j x_i$, $\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i$ が成り立ち、 $i = j$ でライプニッツの公式より $\partial_i x_i = x_i \partial_i + 1$ が成り立つ。

係数を \mathbb{C} とする偏微分作用素環を

$$D = \left\{ \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} h_\beta(x) \partial^\beta \mid h_\beta(x) \in \mathbb{C}[x] \right\}$$

とし、変数 s を持つ偏微分作用素環を

$$D[s] = \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}, \beta \in \mathbb{N}^n} h_{k,\beta}(x) s^k \partial^\beta \mid h_{k,\beta}(x) \in \mathbb{C}[x] \right\}$$

とする。

定義 1

定数でない多項式を $f \in \mathbb{C}[x]$ に対して、

$$B_f = \{b(s) \in \mathbb{C}[s] \mid b(s) f^s \in D[s] f^{s+1}\}$$

とする。 B_f の 0 でない元のうちモニックで次数が最小のものを $b_f(s)$ と書き、 f の (global) b -関数 (Bernstein-Sato 多項式) という。

f^s のゼロ化イデアルを

$$\text{Ann}_{D[s]}(f^s) = \{p \in D[s] \mid p f^s = 0\}$$

とする。このとき、 f の b -関数 $b_f(s)$ は $(\text{Ann}_{D[s]}(f^s) + \langle f \rangle) \cap \mathbb{C}[s]$ のモニックな生成元としても特徴付けることができる。ただし、ここでは $\langle f \rangle$ は f から生成されるイデアルである。

定数でない多項式 f の b -関数は、因子として常に $s+1$ を持つ。即ち、 b -関数は

$$b_f(s) = (s+1) \tilde{b}_f(s)$$

の形をしており $\tilde{b}_f(s)$ を f の簡約 b -関数という。ここで、イデアル

$$\left(\text{Ann}_{D[s]}(f^s) + \left\langle f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle \right) \cap \mathbb{C}[s]$$

を考えると、このイデアルのモニックな生成元が f の簡約 b -関数 $\tilde{b}_f(s)$ となる。

多項式環 $\mathbb{C}[x]$ の点 $q \in \mathbb{C}^n$ での局所化を $\mathbb{C}[x]_q = \left\{ \frac{g_1(x)}{g_2(x)} \mid g_1(x), g_2(x) \in \mathbb{C}[x], g_2(q) \neq 0 \right\}$ とする。(次章以降は、原点 $O \in \mathbb{C}^n$ での局所化 $\mathbb{C}[x]_O$ を主に扱う。) また、

$$D[s] = \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}, \beta \in \mathbb{N}^n} h_{k,\beta}(x) s^k \partial^\beta \mid h_{k,\beta}(x) \in \mathbb{C}[x]_q \right\}$$

とする。このとき、定数でない多項式 $f \in \mathbb{C}[x]$ に対して、 $f(q) = 0$ となる点 q での f の局所 b -関数 $b_{f,q}(s) \in \mathbb{C}[s]$ は

$$p \cdot f^{s+1} = a(x) \cdot b_{f,q}(s) \cdot f^s$$

を満たすモノックな最小次数の項式である。ただし、 $p \in \mathcal{D}[s]$ 、 $a(x) \in \mathbb{C}[x]_q$ である。

b -関数同様に局所 b -関数も因子として常に $s+1$ を持つことが知られており、 $\frac{b_{f,q}(s)}{s+1}$ を点 q での f の局所簡約 b -関数といい、 $\tilde{b}_{f,q}(s)$ とあらわす。

簡約 b -関数と点 q での局所簡約 b -関数の間には

$$\tilde{b}_f(s) = \text{LCM}(\tilde{b}_{f,q} | q \in \text{Sing}(f))$$

が成り立つ。ただし、 $\text{Sing}(f) = \{x \in \mathbb{C}^n | f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = 0\}$ である。

b -関数の計算法については論文 [14, 16, 17, 18, 19] などで紹介されているが、非可換グレブナー基底計算を用いる計算法であり計算量が大きい。実際、特異点の教科書に記載されている簡単な例であっても、既存の b -関数計算プログラムでは出力に 1 か月以上を要することが多い。

3 半擬擬斉次多項式の $\text{Ann}(f^s)$ の計算

ここでは、本稿のターゲットである半擬擬斉次多項式を紹介した後、局所 b -関数計算に必要な $\text{Ann}_{\mathcal{D}[s]}(f^s)$ の計算の概略を述べる。

n 変数 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ の重みベクトルを $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{N}^n$ とし、多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ に対して、 x^α を $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ を意味することとする。

定義 2

項 x^α に対し、重み次数を $d = |x^\alpha|_{\mathbf{w}} := \sum_{i=1}^n w_i \alpha_i$ により定める。

1. ゼロでない多項式 $f \in \mathbb{C}[x]$ が $(d; \mathbf{w})$ 型の擬斉次であるとは、 f のすべての項の重み次数が d に等しいこととする。
2. f を $\mathbb{C}[x]$ の多項式とし、まず、 $\text{ord}_{\mathbf{w}}(f) = \min\{|x^\alpha|_{\mathbf{w}} : x^\alpha \text{ は } f \text{ を構成する項}\}$ ($\text{ord}_{\mathbf{w}}(0) := -1$) とする。多項式 f が $(d; \mathbf{w})$ 型半擬斉次であるとは、多項式 f が $f = f_0 + g$ なる形に表せることをいう。ただしここで、 f_0 は $(d; \mathbf{w})$ 型の半擬斉次多項式であり、 $\text{ord}_{\mathbf{w}}(g) > d$ または $g = 0$ を満たすとする。(本稿では、半擬斉次多項式は擬斉次多項式を含むものとする。)

例えば、 $f_0 = x^3 + y^7 \in K[x, y]$ において、重み $\mathbf{w} = (7, 3) \in \mathbb{N}^2$ を考えれば、 f_0 は $(21; (7, 3))$ 型の擬斉次多項式である。このときの各項の重み付き次数は 21 である。また、 $f = x^3 + y^7 + 2xy^5 \in \mathbb{C}[x, y]$ と重み $\mathbf{w} = (7, 3) \in \mathbb{N}^2$ を考えれば、これは項 xy^5 の重み付き次数が 22 であり、 $x^3 + y^7$ は重み付き次数が 21 の擬斉次多項式かつ原点 O に孤立特異点を持つので f は $(21; (7, 3))$ 型の半擬斉次多項式である。

半擬斉次孤立特異点の分類表としては [24] がある。

半擬斉次多項式を f とし、 $\text{Ann}_{\mathcal{D}[s]}(f^s)$ を計算する方法を述べる。この計算法は、論文 [9, 21] において紹介しているが重要なので、計算上の工夫や改良についても説明を加え本稿で改めてその概要を与える。この方法は、加藤満生 [7, 8] の計算技法を計算機代数の観点に立って再構成したものであり、本研究においてはじめて計算機に実装された。

説明の分かりやすさと計算の具体性を優先し、ここでは2変数 (x, y) での $(d; (w_1, w_2))$ 型半擬斉次多項式を扱う。この方法は、 n 変数半擬斉次多項式の場合にも同様に扱うことができ拡張可能である。

2変数多項式 $f = f_0 + g$ を $(d_0; (w_1, w_2))$ 型半擬斉次多項式とする。ただし、 f_0 は $(d_0; (w_1, w_2))$ 型擬斉次多項式で g は upper monomial たちからなる多項式とする。本計算法で重要な役割を果たすものはオイラー偏微分作用素

$$E_0 = w_1 x \frac{\partial}{\partial x} + w_2 y \frac{\partial}{\partial y}$$

である。半擬斉次多項式は原点に孤立特異点を持つので、原点 $O \in \mathbb{C}^2$ の局所 b -関数を求めることがこの目的である。したがって、 $\mathcal{D}[s] = \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}, \beta \in \mathbb{N}^2} h_{k, \beta}(x) s^k \partial^\beta \mid h_{k, \beta}(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]_O \right\}$ としたとき

$$\text{Ann}_{\mathcal{D}[s]}(f^s) = \{p \in \mathcal{D}[s] \mid pf^s = 0\}$$

に属する偏微分作用素で、局所 b -関数の計算に必要なもののみを計算する。以下、 $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, \partial_y = \frac{\partial}{\partial y}$ とする。

1. まず、1階の偏微分作用素を計算する。 $\sigma_0 = f^s, \sigma_1 = sf^{s-1}, R_1 = d_0 s - E_0, h_1 = d_0 g - E_0(g)$ としたとき、

$$R_1 f^s = h_1 \sigma_1, \quad \partial_x f^s = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \sigma_1, \quad \partial_y f^s = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \sigma_1$$

が常に成立する。この3式の右辺を消去することにより、 $p(x, s)f^s = 0$ となる1階の偏微分作用素 $p(x, s) \in \mathcal{D}[s]$ を求めることができる。即ち、 $bh_1 + (a_1 \frac{\partial f}{\partial x} + a_2 \frac{\partial f}{\partial y}) = 0$ となる、 b, a_1, a_2 を求めることで、

$$(bR_1 + a_1 \partial_x + a_2 \partial_y) f^s = (bh_1 + (a_1 \frac{\partial f}{\partial x} + a_2 \frac{\partial f}{\partial y})) \sigma_1 = 0$$

より、 $bR_1 + a_1 \partial_x + a_2 \partial_y \in \text{Ann}_{\mathcal{D}[s]}(f^s)$ を得ることができる。この作用素は、局所 b -関数計算において重要な役割を果たす。

さて、第2式と第3式から $\text{Ann}_{\mathcal{D}[s]}(f^s)$ に属す偏微分作用素 $\frac{\partial f}{\partial y} \partial_x - \frac{\partial f}{\partial x} \partial_y$ を構成できるが、この偏微分作用素は、

$$\mathcal{D}[s] \langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle \ni \partial_x \frac{\partial f}{\partial y} - \partial_y \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \partial_x + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} \partial_y - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} \partial_x - \frac{\partial f}{\partial x} \partial_y$$

であるので、 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ が $\mathcal{D}[s]$ 上で生成するイデアルに属す。後に紹介する b -関数計算においては、イデアル $\text{Ann}_{\mathcal{D}[s]}(f^s) + \langle f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \rangle$ を用いるが、先程、第2式と第3式から作った偏微分作用素 $\frac{\partial f}{\partial y} \partial_x - \frac{\partial f}{\partial x} \partial_y$ はイデアル $\langle f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \rangle$ に属すことが明らかな偏微分作用素である。仮にこのような偏微分作用素も求めておいたとしても b -関数の計算にはいかなる役割も果たさないことがわかる。我々の方法では、 b -関数の計算に必要な偏微分作用素のみを構成することで、アルゴリズムの効率化を図っている。

1階の偏微分作用素 (i.e., $b \neq 0, a_1, a_2$) は、計算法 I の入力を $[R_1, h_1]$ と $F_1 = \{[\partial_x, \frac{\partial f}{\partial x}], [\partial_y, \frac{\partial f}{\partial y}]\}$ とすることにより得ることができる。この計算法は、2階、3階など高階の偏微分作用素を計算するときにも使用するため、入力は1階の微分作用素でなくとも実行できる形にしている。

もし、入力が $[R_1, h_1], F = \{[\partial_x, \frac{\partial f}{\partial x}], [\partial_y, \frac{\partial f}{\partial y}]\}$ で、出力が (P, \emptyset) であれば、2階以上の偏微分作用素は必要ない。このとき、 $Q = \emptyset$ であるので、 $\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle : h_1 = \langle 1 \rangle$ である。即ち、 $h_1 \in \langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle$ を意味しており、現在構成した関係式から必要な偏微分作用素が構成可能であることがわかる。

 計算法 I

Specification: FirstPDO ($[R', q_1], F_1$)

入力: $[R', q_1]$: R' は偏微分作用素, $q_1 \in \mathbb{C}[x, y]$,

($R' \cdot f^s = q_1 \cdot \sigma_1$ を意味しており、この R' は必要な作用素を想定している.)

$F_1 = \{[D_1, g_1], [D_2, g_2], \dots, [D_t, g_t]\}$: D_1, \dots, D_t は偏微分作用素, $g_1, \dots, g_t \in \mathbb{C}[x, y]$.

($D_i \cdot f^s = g_i \sigma_1$ を想定している.)

出力: (P, Q) : $P \subset \text{Ann}_{\mathcal{D}[s]}(f^s)$, $Q = \{[R', q_1]\}$ or \emptyset .

Step 0: $P \leftarrow \emptyset$.

Step 1: イdeal商 $\langle g_1, g_2, \dots, g_t \rangle : q_1 \subseteq \mathbb{C}[x, y]_O$ の簡約スタンダード基底 $S = \{b_1, b_2, \dots, b_r\}$ を計算する。(これは、 $\langle g_1, g_2, \dots, g_t \rangle : q_1$ に付随する代数的局所コホモロジー類を計算することにより計算可能である.)

if $S = \{1\}$ **then** $Q \leftarrow \emptyset$; **else** $Q \leftarrow \{[R', q_1]\}$; **end-if**

Step 2: 各 $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ において、次を行う。

2-1: 多項式環 $\mathbb{C}[x, y]$ で、イdeal商 $\langle g_1, \dots, g_t \rangle : b_i q_1$ のグレブナー基底 U を計算する。

2-2: U から $u_i(O) \neq 0$ となる u_i を選択する。(この時、 $u_i b_i q_1 \in \langle g_1, \dots, g_t \rangle \subseteq \mathbb{C}[x, y]$ となる.)

2-3: 拡張グレブナー基底アルゴリズムを用いて

$$u_i b_i q_1 + a_{i1} g_1 + a_{i2} g_2 + \dots + a_{it} g_t = 0$$

となる、 $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{it} \in \mathbb{C}[x, y]$ を計算する。

2-4: $P \leftarrow P \cup \{u_i b_i R' + a_{i1} D_1 + a_{i2} D_2 + \dots + a_{it} D_t\}$;

Return (P, Q) ;

2. 次に2階の偏微分作用素を計算する。1階の偏微分作用素の構成と同様に $R_2 = (d_0(s-1) - E_0)R_1$, $h_2 = -E_0(h_1)$, $\sigma_1 = s f^{s-1}$, $\sigma_2 = s(s-1) f^{s-2}$ とすると次の恒等式を得る。

$$\begin{aligned} R_2 f^s &= h_2 \sigma_1 + h_1^2 \sigma_2, \\ \partial_x R_1 f^s &= \left(\frac{\partial h_1}{\partial x}\right) \sigma_1 + h_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \sigma_2, \\ \partial_y R_1 f^s &= \left(\frac{\partial h_1}{\partial y}\right) \sigma_1 + h_1 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \sigma_2, \\ \partial_x^2 f^s &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) \sigma_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_2, \\ \partial_x \partial_y f^s &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) \sigma_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \sigma_2, \\ \partial_y^2 f^s &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) \sigma_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_2 \end{aligned}$$

1階の偏微分作用素の計算と同じように、これらの右边を消去できれば $\text{Ann}_{\mathcal{D}[s]}(f^s)$ の2階偏微分作用素が得られる。ここも重要な恒等式は R_2 の入った第1式であるので、まず、 σ_2 を消去するため

$$b h_1^2 + (a_1 \frac{\partial f}{\partial x} + a_2 \frac{\partial f}{\partial y}) h_1 + (a_3 (\frac{\partial f}{\partial x})^2 + a_4 (\frac{\partial f}{\partial x}) (\frac{\partial f}{\partial y}) + a_5 (\frac{\partial f}{\partial y})^2) = 0$$

を満たす $b \neq 0, a_1, \dots, a_5$ を求める。 σ_2 を消去できれば

$$\begin{aligned} (b R_2 + a_1 \partial_x R_1 + a_2 \partial_y R_1 + a_3 \partial_x^2 + a_4 \partial_x \partial_y + a_5 \partial_y^2) f^s = \\ \left(b h_2 + a_1 \left(\frac{\partial h_1}{\partial x}\right) + a_2 \left(\frac{\partial h_1}{\partial y}\right) + a_3 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) + a_4 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) + a_5 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) \right) \sigma_1 \end{aligned}$$

という関係式が得られる。この関係式と、恒等式 $R_1 f^s = h_1 \sigma_1$, $\partial_x f^s = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \sigma_1$, $\partial_y f^s = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \sigma_1$ を用いることで2階の偏微分作用素を構成する。

次の計算法は、3階、4階など高階の偏微分作用素を計算するときにも使用するため、入力は2階の微分作用素でなくとも実行できる形にしている。

計算法 II

Specification: SecondPDO ($[R', q_1, q_2], F_2, F_1$)

入力: $[R', q_1, q_2]$: R' は偏微分作用素, $q_1, q_2 \in \mathbb{C}[x, y]$,

($R' \cdot f^s = q_1 \cdot \sigma_1 + q_2 \sigma_1$ を意味しており, この R' は必要な作用素を想定している.)

$F_2 = \{[D_1, g_{11}, g_{12}], [D_2, g_{21}, g_{22}], \dots, [D_t, g_{t1}, g_{t2}]\}$: D_1, \dots, D_t は偏微分作用素, $g_{11}, g_{12}, \dots, g_{t1}, g_{t2} \in \mathbb{C}[x, y]$. ($D_i \cdot f^s = g_{i1} \sigma_2 + g_{i2} \sigma_1$ を想定している.)

F_1 : $[D'_i, g'_i]$ の集合. $D'_i \cdot f^s = g'_i \sigma_1$ となる得られた関係式たち. (計算法 I の F_1 に $[R', q_1]$ を加えたものを想定.)

出力: (P, Q_1, Q_2) : $P \subset \text{Ann}_{\mathcal{D}[s]}(f^s)$, $Q_1 = \{[D, h] \mid \text{新たな } Df^s = h\sigma_1 \text{ という関係式}\}$, $Q_2 = \{[R', q_1, q_2]\}$ もしくは \emptyset .

Step 0: $P_2 \leftarrow \emptyset$; $P \leftarrow \emptyset$; $Q_1 \leftarrow \emptyset$;

Step 1: イデアル商 $\langle g_{12}, g_{22}, \dots, g_{t2} \rangle : q_2 \subseteq \mathbb{C}[x, y]_0$ の簡約スタンダード基底 $S = \{b_1, b_2, \dots, b_r\}$ を計算する.

if $S = \{1\}$ **then** $Q_2 \leftarrow \emptyset$; **else** $Q_2 \leftarrow \{[R', q_1, q_2]\}$; **end-if**

Step 2: 各 $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ において, 次を行う.

2-1: 多項式環 $\mathbb{C}[x, y]$ で, イデアル商 $\langle g_{12}, \dots, g_{t2} \rangle : b_i q_2$ のグレブナー基底 U を計算する.

2-2: U から $u_i(O) \neq 0$ となる u_i を選択する. (この時, $u_i b_i q_1 \in \langle g_{12}, \dots, g_{t2} \rangle \subset \mathbb{C}[x, y]$ となる.)

2-3: 拡張グレブナー基底アルゴリズムを用いて

$$u_i b_i q_2 + a_{i1} g_{12} + a_{i2} g_{22} + \dots + a_{it} g_{t2} = 0$$

となる, $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{it} \in \mathbb{C}[x, y]$ を計算する.

2-4: $P_2 \leftarrow P_2 \cup \{[u_i b_i R' + a_{i1} D_1 + a_{i2} D_2 + \dots + a_{it} D_t, u_i b_i q_1 + a_{i1} g_{11} + a_{i2} g_{21} + \dots + a_{it} g_{t1}]\}$;

Step 3: **while** $P_2 \neq \emptyset$ **do**

select $[R, h]$ from P_2 ; $P_2 \leftarrow P_2 \setminus \{[R, h]\}$;

$(P_1, Q) \leftarrow \text{FirstPDO}([R, h], F_1)$;

$P \leftarrow P \cup P_1$; $Q_1 \leftarrow Q \cup Q$;

end-while

Return (P, Q_1, Q_2) ;

この計算法を実行した際の出力が $(P, \emptyset, \emptyset)$ であれば, 3階以上の偏微分作用素は必要ない. これは, 構成した関係式 F_1, F_2 から必要な偏微分作用素が得られることを意味する.

3. 次に3階の偏微分作用素を計算する. 1階や2階の偏微分作用素の構成と同様に $R_3 = (d_0(s-2) - E_0)R_2$, $\sigma_1 = s f^{s-1}$, $\sigma_2 = s(s-1) f^{s-2}$, $\sigma_3 = s(s-1)(s-2) f^{s-3}$ とすると次の恒等式を得る.

$$R_3 f^s = (-d_0 h_2 - E_0(h_2))\sigma_1 + 3h_1 h_2 \sigma_2 + h_1^3 \sigma_3$$

$$\partial_x R_2 f^s = \left(\frac{\partial h_2}{\partial x}\right)\sigma_1 + \left(h_2 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + 2h_1 \left(\frac{\partial h_1}{\partial x}\right)\right)\sigma_2 + h_1^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\sigma_3$$

$$\partial_y R_2 f^s = \left(\frac{\partial h_2}{\partial y}\right)\sigma_1 + \left(h_2 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + 2h_1 \left(\frac{\partial h_1}{\partial y}\right)\right)\sigma_2 + h_1^2 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\sigma_3$$

$$\partial_x^2 R_1 f^s = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \sigma_1 + \left(2 \left(\frac{\partial h_1}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + h_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\sigma_2 + h_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_3$$

$$\begin{aligned}
\partial_x \partial_y R_1 f^s &= \frac{\partial^2 h_1}{\partial x \partial y} \sigma_1 + \left(\left(\frac{\partial h_1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial h_1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + h_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) \sigma_2 + h \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \sigma_3 \\
\partial_y^2 R_1 f^s &= \frac{\partial^2 h_1}{\partial y^2} \sigma_1 + \left(2 \left(\frac{\partial h_1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + h_1 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \sigma_2 + h_1 \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \sigma_3 \\
\partial_x^3 f^s &= \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right) \sigma_1 + 3 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) \sigma_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^3 \sigma_3 \\
\partial_x^2 \partial_y f^s &= \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \right) \sigma_1 + \left(\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + 2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) \right) \sigma_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \sigma_3 \\
\partial_x \partial_y^2 f^s &= \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \right) \sigma_1 + \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) + 2 \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) \right) \sigma_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \sigma_3 \\
\partial_y^3 f^s &= \left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \right) \sigma_1 + 3 \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \sigma_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^3 \sigma_3
\end{aligned}$$

1 階や 2 階の偏微分作用素の計算と同じように、これらの右辺を消去できれば $\text{Ann}_{\mathcal{D}[s]}(f^s)$ の 3 階偏微分作用素が得られる。こゝも重要な恒等式は R_3 の入った第 1 式であるので、まず、 σ_3 を 2 階の偏微分作用素の計算と同じように消去し、次に σ_2 と σ_1 を消去することにより、3 階の偏微分作用素を得る。

同様の操作は、高階の場合にも適用することができこれにより必要な偏微分作用素の集合が得られる。

以上が計算法の概略である。偏微分作用素と f^s の関係式は簡単に得ることができ、その関係式を用いることにより $\text{Ann}_{\mathcal{D}[s]}(f^s)$ の元は得られる。実質的には、可換な多項式における計算のみで $\text{Ann}_{\mathcal{D}[s]}(f^s)$ の偏微分作用素を構成することができる。非可換グレブナー基底は必要ないので、これは、大きな利点である。

例 1

重みベクトルを $(10, 3)$ 、 $f_0 = x^3 + y^{10}$ 、 $g = xy^8$ とすると、 $f = f_0 + g$ は $(30; (10, 3))$ 型の半擬斉次多項式である。紹介した計算法に基づき b -関数に必要となる $\text{Ann}_{\mathcal{D}[s]}(f^s)$ の偏微分作用素を計算する。ここでは、 $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ 、 $\partial_y = \frac{\partial}{\partial y}$ 、 $\sigma_1 = s f^{s-1}$ 、 $\sigma_2 = s(s-1) f^{s-2}$ とする。

このとき、オイラー偏微分作用素は $E_0 = 10x\partial_x + 3y\partial_y$ であり、 $R_1 = 30s - E_0 = 30s - 10x\partial_x - 3y\partial_y$ 、 $h_1 = 10g - E_0(g) = -4xy^8$ となる。

まずは、1 階の偏微分作用素を計算する。恒等式

$$R_1 f^s = h_1 \sigma_1, \quad \partial_x f^s = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \sigma_1, \quad \partial_y f^s = \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \sigma_1$$

より、 $F_1 = \{[\partial_x, \frac{\partial f}{\partial x}], [\partial_y, \frac{\partial f}{\partial y}]\}$ とし、**FirstPDO** $([R_1, h_1], F_1)$ を実行する。

Step I-1: イdeal商 $\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle : (-4xy^8)$ の簡約スタンダード基底を計算すると $S = \{x, y\}$ となる。このとき項順序は局所全次数辞書式項順序 (x, y) である。

Step I-2: 多項式環 $\mathbb{C}[x, y]$ でのイdeal商 $\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle : x(-4xy^8)$ と $\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle : y(-4xy^8)$ のグレブナー基底には $256x^2 + 1875$ が含まれることがわかる。したがって、 $(256x^2 + 1875)x(-4xy^8)$ 、 $(256x^2 + 1875)y(-4xy^8) \in \langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle$ である。

簡約スタンダード基底 S には 2 つの元があるので、それぞれの元に対して、拡張グレブナー基底アルゴリズム（もしくは *syzygy* 計算）を用いるとこゝで次の 1 階の偏微分作用素を得る。

$$\begin{aligned}
(256x^2 + 1875)x(-4xy^8)R_1 - 2500y^8\partial_x + (-128x^3y + 160x^2y^3 - 200xy^5 + 250y^7)\partial_y, \\
(256x^2 + 1875)y(-4xy^8)R_1 + 2000y^7\partial_x + (-128x^2y^2 + 160xy^4 - 750x - 200y^6)\partial_y.
\end{aligned}$$

Step II-1: 次に 2 階の偏微分作用素を求める。そのため、次の恒等式を用いる。

$$\begin{aligned}
R_2 f^s &= h_2 \sigma_1 + h_1^2 \sigma_2, \\
\partial_x R_1 f^s &= \left(\frac{\partial h_1}{\partial x} \right) \sigma_1 + h_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \sigma_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_y R_1 f^s &= \left(\frac{\partial h_1}{\partial y}\right)\sigma_1 + h_1 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\sigma_2, \\ \partial_x^2 f^s &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\sigma_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\sigma_2, \\ \partial_x \partial_y f^s &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)\sigma_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\sigma_2, \\ \partial_y^2 f^s &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\sigma_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\sigma_2\end{aligned}$$

σ_2 を消去するため、イデアル商 $\langle h_1 \frac{\partial f}{\partial x}, h_1 \frac{\partial f}{\partial y}, \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2, \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}, \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \rangle : h_1^2 \subset \mathbb{C}[x, y]_O$ の簡約スタンダードを計算すると $\{1\}$ となる。

Step II-2: 多項式環でのイデアル $\langle h_1 \frac{\partial f}{\partial x}, h_1 \frac{\partial f}{\partial y}, \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2, \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}, \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \rangle : h_1^2$ のグレブナー基底は $\{1\}$ となる。つまり、 $h_1^2 \in \langle h_1 \frac{\partial f}{\partial x}, h_1 \frac{\partial f}{\partial y}, \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2, \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}, \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \rangle$ となる。拡張グレブナー基底アルゴリズム (もしくは syzygy 計算) を用いると次を満たす a_1, a_2, \dots, a_5 を得ることができる。

$$h_1^2 + (a_1 \frac{\partial f}{\partial x} + a_2 \frac{\partial f}{\partial y})h_1 + (a_3 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + a_4 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + a_5 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2) = 0.$$

これにより、関係式として

$$\begin{aligned}(R_2 + a_1 \partial_x R_1 + a_2 \partial_y R_1 + a_3 \partial_x^2 + a_4 \partial_x \partial_y + a_5 \partial_y^2) f^s &= (h_2 + \\ & a_1 \left(\frac{\partial h_1}{\partial x}\right) + a_2 \left(\frac{\partial h_1}{\partial y}\right) + a_2 \left(\frac{\partial h}{\partial x^2}\right) + a_3 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) + a_4 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) + a_5 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)) \sigma_1\end{aligned}$$

を得る。

Step II-3: 恒等式 $R_1 f^s = h_1 \sigma_1$, $\partial_x f^s = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\sigma_1$, $\partial_y f^s = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\sigma_1$ を用い、1 階の偏微分作用素を求めた時と同様の計算を行うと

$$h_2 + a_1 \left(\frac{\partial h_1}{\partial x}\right) + a_2 \left(\frac{\partial h_1}{\partial y}\right) + a_2 \left(\frac{\partial h}{\partial x^2}\right) + a_3 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) + a_4 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) + a_5 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) \in \langle h_1, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle \subset \mathbb{C}[x, y]_O$$

であることがわかるので、

$$(h_2 + a_1 \left(\frac{\partial h_1}{\partial x}\right) + a_2 \left(\frac{\partial h_1}{\partial y}\right) + a_2 \left(\frac{\partial h}{\partial x^2}\right) + a_3 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) + a_4 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) + a_5 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)) + c_1 h_1 + c_2 \frac{\partial f}{\partial x} + c_3 \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

となる c_1, c_2, c_3 を計算することができる。これにより、2 階の偏微分作用素

$$R_2 + a_1 \partial_x R_1 + a_2 \partial_y R_1 + a_3 \partial_x^2 + a_4 \partial_x \partial_y + a_5 \partial_y^2 + c_1 R_1 + c_2 \partial_x + c_3 \partial_y$$

を得ることができる。終了条件を満たしているので、ここで計算を終了する。

実際、我々のプログラムは 1 階の偏微分作用素 2 個と 2 階の偏微分作用素 1 個を次のように出力する。

```
[-2560*dx*y*x^3+(-640*dy*y^2+7680*s*y)*x^2+(-160*dy*y^4-18750*dx*y+750*dy)*x-2000*dx*y^7+200*dy*y^6-5625*dy*y^2+56250*s*y,-2560*dx*x^4+(-640*dy*y+7680*s)*x^3+(-160*dy*y^3-18750*dx)*x^2+(200*dy*y^5-5625*dy*y+56250*s)*x+2500*dx*y^8-250*dy*y^7,25600*dx^2*x^4+(14080*dy*dx*y-153600*dx*s+102400*dx)*x^3+(1600*dy*dx*y^3+1920*dy^2*y^2+(-42240*dy*s+21120*dy)*y+230400*s^2-230400*s+187500*dx^2)*x^2+(20000*dx^2*y^6-2000*dy*dx*y^5+(-58000*dx+480*dy^2)*y^4+(-4800*dy*s+4640*dy)*y^3+121875*dy*dx*y-1125000*dx*s+121875*dx-375*dy^2)*x+6000*dy*dx*y^7+(-60000*dx*s+27000*dx-600*dy^2)*y^6+(6000*dy*s-19500*dy)*y^5+174000*s*y^4+39375/2*dy^2*y^2-365625*dy*s*y+1687500*s^2+196875*s]
```

計算機代数システム Risa/Asir [15] に実装されている、イデアル $\text{Ann}_{D[s]}(f^s)$ の基底を計算プログラム **ann** では、1 階の偏微分作用素 2 個、2 階の偏微分作用素 1 個、3 階の偏微分作用素 1 個、4 階の偏微分作用素 1 個の計 6 個の偏微分作用素を出力する。これは、プログラム **ann** の出力は、イデアル $\text{Ann}_{D[s]}(f^s)$ のグレブナー基底であることを思い出して頂きたい。 h -関数計算の観点からは、**ann** は不必要な作用素も計算し、出力していることになる。

4 半擬擬斉次多項式の局所 b -関数の計算法

本章では、半擬擬斉次多項式の原点での局所 b -関数の計算法について述べる。

先行研究により、半擬擬斉次多項式（または特異点）の多くの性質が知られている。これらの性質を計算に用いることにより、新たな計算法を構成することができる。

まず、半擬擬斉次多項式の性質を紹介する。

定理 3 (Kashiwara [6])

$f \in \mathbb{C}[x]$ とする。 $b_f(s) = 0$ の根は有理数である。

定理 4 (Briançon-Granger-Maisonobe-Miniconi [1])

f を半擬擬斉次多項式とする。このとき、局所簡約 b -関数 $\tilde{b}_{f,0}(s)$ は無平方である。即ち、 $\tilde{b}_{f,0}(s) = 0$ は重解を持たない。

f を原点 O に孤立特異点を持つ正則関数とし、 P を第 3 章で紹介した計算法により得られた $\text{Ann}_{\mathcal{D}[s]}(f^s)$ の元の集合とする。 $\gamma \in \mathbb{Q}$ を s に代入することを σ_γ で表し、 $\sigma_\gamma(P) = \{p(x, \partial, \gamma) \mid p(x, \partial, s) \in P \subset \mathcal{D}[s]\}$ とする。原点に台を持つ代数的局所コホモロジー類を $H_{[O]}^n(\mathbb{C}[x])$ で表し、

$$H_{(\gamma, f)} = \{\psi \in H_{[O]}^n(\mathbb{C}[x]) \mid h \cdot \psi = 0, \forall h \in (\sigma_\gamma(P) \cup \{f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\})\}$$

とする。このとき、次が成り立つ。

定理 5

$$\tilde{b}_{f,0}(\gamma) = 0 \iff \dim_{\mathbb{C}}(H_{(\gamma, f)}) \neq 0.$$

ベクトル空間 $H_{(\gamma, f)}$ の計算法は論文 [12, 13, 20] で紹介されている。

定理 6 (Kashiwara [5]; Yano [23])

$\tilde{b}_{f,0}(s) = 0$ の根の集合を $\{\gamma_1, \dots, \gamma_r\}$ とし、 μ を $f = 0$ の原点でのミルナー数とする。このとき、 $\mu = \sum_{i=1}^r \dim_{\mathbb{C}}(H_{M(\gamma_i, f)})$ となる。

定義 7 (ポアンカレ多項式)

重みベクトルを $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$ とし、 f を $(d; \mathbf{w})$ 型の擬斉次多項式とする。このとき、 $P_{(d; \mathbf{w})}(t) := \frac{t^{d-w_1} - 1}{t^{w_1} - 1} \cdot \frac{t^{d-w_2} - 1}{t^{w_2} - 1} \cdots \frac{t^{d-w_n} - 1}{t^{w_n} - 1}$ を f の $(d; \mathbf{w})$ 型のポアンカレ多項式という。

擬斉次多項式と原点 O での局所 b -関数について次の定理が知られている。

定理 8

原点 O に孤立特異点を持つ $(d; \mathbf{w})$ 型擬斉次多項式を f_0 とし、 $w_0 = \sum_{i=1}^n w_i$ とする。 $(d; \mathbf{w})$ 型のポアンカレ多項式を $P_{(d; \mathbf{w})}(t) = \sum_{i=1}^r c_i t^{\alpha_i}$ ($c_i \neq 0$) とするとき、 $\tilde{b}_{f_0,0}(s) = 0$ の根の集合は $\{-\frac{\alpha_i + w_0}{d} \mid 1 \leq i \leq r\}$ となる。また、各 $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ に対し、 $\dim_{\mathbb{C}}(H_{(-\frac{\alpha_j + w_0}{d}, f_0)}) = c_j$ 、 $\sum_{i=1}^r c_i = \mu(f_0)$ となる。

半擬擬斉次多項式については次の補題が知られている。

補題 9

$f = f_0 + g$ を半擬擬斉次多項式多項式とし、 f_0 は擬斉次多項式、 g は upper monomial からなる多項式とする。また、 $\tilde{b}_{f_0,0}(s) = 0$ の根の集合を E_0 とする。このとき、 $\tilde{b}_{f,0}(s) = 0$ の根は $\{\gamma + k \mid k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, k \in E_0\}$ に含まれる。

Modality が低い場合は経験的に、補題 9 の k は 0, 1, 2 であることが知られている。このことより、まず、半擬斉次多項式 $f = f_0 + g$ の局所 b -関数 $\tilde{b}_{f_0,0}(s)$ をポアンカレ多項式より求め、その後、 $\tilde{b}_{f_0,0}(s) = 0$ となる根 γ から得られる $\gamma + k$ が $\tilde{b}_{f,0}(s)$ の根になるどうかをチェックすることで $\tilde{b}_{f,0}(s)$ が得られることがわかる。このチェックの方法には定理 5 を利用する。 $\gamma + k$ に付随するベクトル空間 $H_{(\gamma+k,f)}$ の次元が 0 であれば、 $\gamma + k$ は根でなく、0 であれば根となる。定理 4 より、局所 b -関数は無平方より、次元の合計がミルナー数になるまでチェックを続けることですべての根（因子 $(s - (\gamma + k))$ ）を求めることができる。

半擬斉次多項式の局所簡約 b -関数の計算法

0: $M \leftarrow 0$

1: 必要な $\text{Ann}_{\mathcal{D}[s]}(f^s)$ の元の集合を計算する。（第 3 章の計算法）

2: ポアンカレ多項式より $\tilde{b}_{f_0,0}(s)$ を求める。

3: $\tilde{b}_{f_0,0}(s)$ から根を予想し、 $\tilde{b}_{f,0}(s) = 0$ の根になるかどうかを、代数的局所コホモロジーを計算することでチェックする。

$M \leftarrow M + \dim_{\mathbb{C}}(H_{(\gamma,f)});$

もし、 M が原点での f_0 のミルナー数と同じであれば計算を終了する。

例 2

重みベクトルを $(10, 3)$, $f_0 = x^3 + y^{10}$, $g = xy^8$ とすると、 $f = f_0 + g$ は $(30; (10, 3))$ 型の半擬斉次多項式である。

1: 例 1 で偏微分作用素は計算したので、

$$H = \{f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\} \cup$$

$$\begin{aligned} & [-2560 \text{dx}^* \text{y}^* \text{x}^3 + (-640 \text{dy}^* \text{y}^2 + 7680 \text{s}^* \text{y}) \text{x}^2 + (-160 \text{dy}^* \text{y}^4 - 18750 \text{dx}^* \text{y} + 750 \text{dy}) \text{x} - 2000 \text{dx}^* \text{y}^7 + 200 \text{dy}^* \text{y}^6 - 5625 \text{dy}^* \text{y}^2 + 56250 \text{s}^* \text{y}, -2560 \text{dx}^* \text{x}^4 + (-640 \text{dy}^* \text{y} + 7680 \text{s}) \text{x}^3 + (-160 \text{dy}^* \text{y}^3 - 18750 \text{dx}) \text{x}^2 + (200 \text{dy}^* \text{y}^5 - 5625 \text{dy}^* \text{y} + 56250 \text{s}) \text{x} + 2500 \text{dx}^* \text{y}^8 - 250 \text{dy}^* \text{y}^7, 25600 \text{dx}^2 \text{x}^4 + (14080 \text{dy}^* \text{dx}^* \text{y} - 153600 \text{dx}^* \text{s} + 102400 \text{dx}) \text{x}^3 + (1600 \text{dy}^* \text{dx}^* \text{y}^3 + 1920 \text{dy}^2 \text{y}^2 + (-42240 \text{dy}^* \text{s} + 21120 \text{dy}) \text{y} + 230400 \text{s}^2 - 230400 \text{s} + 187500 \text{dx}^2) \text{x}^2 + (20000 \text{dx}^2 \text{y}^6 - 2000 \text{dy}^* \text{dx}^* \text{y}^5 + (-58000 \text{dx} + 480 \text{dy}^2) \text{y}^4 + (-4800 \text{dy}^* \text{s} + 4640 \text{dy}) \text{y}^3 + 121875 \text{dy}^* \text{dx}^* \text{y} - 112500 \text{dx}^* \text{s} + 121875 \text{dx} - 375 \text{dy}^2) \text{y}^2 + 6000 \text{dy}^* \text{dx}^* \text{y}^7 + (-60000 \text{dx}^* \text{s} + 27000 \text{dx} - 600 \text{dy}^2) \text{y}^6 + (6000 \text{dy}^* \text{s} - 19500 \text{dy}) \text{y}^5 + 174000 \text{s}^* \text{y}^4 + 39375/2 \text{dy}^2 \text{y}^2 - 365625 \text{dy}^* \text{s}^* \text{y} + 1687500 \text{s}^2 + 196875 \text{s}] \end{aligned}$$

とする。

2: ポアンカレ多項式より、 $\tilde{b}_{f_0,0} = 0$ の根 γ と、 $\sigma_{\gamma}(H)$ に付随する代数的局所コホモロジーからなるベクトル空間 $H_{(\gamma,f_0)}$ の次元のペアは次となる。

$$\begin{aligned} \{[\gamma, \dim_{\mathbb{C}}(H_{(\gamma,f_0)})] \mid \tilde{b}_{f_0,0}(s)(\gamma) = 0\} = & \{[-\frac{13}{30}, 1], [-\frac{16}{30}, 1], [-\frac{19}{30}, 1], [-\frac{22}{30}, 1], [-\frac{23}{30}, 1], [-\frac{25}{30}, 1], \\ & [-\frac{26}{30}, 1], [-\frac{28}{30}, 1], [-\frac{29}{30}, 1], [-\frac{31}{30}, 1], [-\frac{32}{30}, 1], [-\frac{34}{30}, 1], [-\frac{35}{30}, 1], [-\frac{37}{30}, 1], [-\frac{38}{30}, 1], [-\frac{41}{30}, 1], [-\frac{44}{30}, 1], \\ & [-\frac{47}{30}, 1]\}. \end{aligned}$$

3: $\tilde{b}_{f,0} = 0$ の根を予想しチェックする。ミルナー数は 18 より、次元の合計が 18 になるまで根の候補をチェックする。根は重根を持たないので、最終的に次の局所簡約 b -関数を得る。

$$\tilde{b}_{f,0}(s) = (s + \frac{13}{30})(s + \frac{8}{15})(s + \frac{19}{30})(s + \frac{11}{15})(s + \frac{23}{30})(s + \frac{5}{6})(s + \frac{13}{15})(s + \frac{14}{15})(s + \frac{29}{30}) \\ (s + \frac{31}{30})(s + \frac{16}{15})(s + \frac{17}{15})(s + \frac{7}{6})(s + \frac{37}{30})(s + \frac{19}{15})(s + \frac{41}{30})(s + \frac{7}{15})(s + \frac{17}{30}).$$

第 1 著者は、本稿で紹介した局所 b -関数の計算法を計算機代数システム Risa/Asir に実装した。ここでは、この実装を NEW とする。

Risa/Asir には既存の局所 b -関数の計算法アルゴリズムの中で効率が良いといわれている西山-野呂アルゴリズム [14] が実装されている。この計算コマンドは `bf_local` であるので、このプログラムをここでは `bf_local` とする。

2つのプログラムの計算時間を表にしたものが次である。ここでの時間は、CPU 秒であり、使用した計算機環境は [OS: Windows 10 (64bit), CPU: Intel(R) Core i9-7900 CPU @ 3.30 GHz, RAM: 128 GB] である。>60h は、出力には 60 時間以上かかることを意味する。

type	半擬斉次多項式 (f)	bf_local	NEW
E_{18}	$x^3 + y^{10} + xy^7 + xy^8$	87.38	0.5938
Z_{17}	$x^3y + y^8 + xy^6 + xy^7$	14.61	0.5625
Q_{16}	$x^3 + yz^2 + y^7 + xy^5 + xz^2$	30.98	3.125
S_{16}	$x^2z + yz^2 + xy^4 + y^6 + z^3$	84.56	0.8906
Z_{25}	$x^3y + y^{12} + xy^9 + xy^{10} + xy^{11}$	>60h	36.39
E_{30}	$x^3 + y^{16} + xy^{11} + xy^{12} + xy^{13} + xy^{14}$	>60h	38.45
Q_{28}	$x^3 + yz^2 + y^{13} + xy^9 + xy^{10} + xy^{11} + xz^2$	>60h	264
Q_{30}	$x^3 + yz^2 + y^{14} + xy^{10} + xy^{11} + xy^{12} + xz^2$	>60h	204.9
Z_{27}	$x^3y + x^2y^5 + y^{13} + y^{14} + y^{15} + y^{16}$	> 60h	18.86

この計算結果より、NEW は大変効率的で効果的であることがわかる。

謝 辞

この研究は日本学術振興会科学研究補助金 基盤研究 (C) 課題番号 18K03214, 18K03320, 19K03484 の助成を受けております。

参 考 文 献

- [1] Briançon, J., Granger, M., Maisonobe, P. and Miniconi, M., Algorithme de calcul du polynôme de Bernstein : cas non dégénéré. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **39**, pp. 553–610, 1989
- [2] Briançon, J. and Maisonobe, P., Remarques sur l'idéal de Bernstein associé à des polynômes. *prépublication Univ. Nice-Sophia Antipolis n°*, 650, Mai, 2002.
- [3] Cassou-Nogués, P., Racines de polynômes de Bernstein. *Ann. Inst. Fourier, Genoble*, Vol. **36**, pp. 1–30, 1986.
- [4] Cassou-Nogués, P., Etude du comportement du polyôme de Bernstein lors d'une déformation à μ constant de $X^a + Y^b$ avec $(a, b) = 1$. *Compositio Mathematica*, Vol. **63**, pp. 291–313, 1987.

- [5] Kashiwara, M., On the maximally overdetermined system of linear differential equations, I, *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences* **10**, pp. 563–579, 1975
- [6] Kashiwara, M., B -functions and holonomic systems: Rationality of roots of b -functions. *Invent. Math.*, **38**, pp. 33–53, 1976
- [7] Kato, M., The b -function of μ -constant deformation of $x^7 + y^5$. *Bull. College of Science, Univ. of the Ryukyus*, Vol. **32**, pp. 5–10, 1981.
- [8] Kato, M., The b -function of μ -constant deformation of $x^9 + y^4$. *Bull. College of Science, Univ. of the Ryukyus*, Vol. **33**, pp. 5–8, 1982.
- [9] 加藤満生, 田島 慎一, 孤立特異点変形と f^s のパラメータ付き偏微分作用素環での annihilator について. 数理解析研究所講究録, Vol. **1955**, pp.168–179, 2015.
- [10] Levandovskyy, V. and Martín-Morales, V., Algorithms for checking rational roots of b -functions and their applications. *J. Algebra*, Vol. **352**, pp. 408–429, 2012.
- [11] 鍋島 克輔, 田島 慎一, 偏微分作用素環での包括的グレブナー 基底とホロノミー D -加群, b -関数. 数理解析研究所講究録, Vol. **1976**, pp.100–116, 2015.
- [12] Nabeshima, K. Ohara, K. and Tajima, S., Comprehensive Gröbner systems in PBW algebras, Bernstein-Sato ideals and holonomic D -modules, *Journal of Symbolic Computation*, Vol.89, pp. 146–170, 2018
- [13] 鍋島 克輔, 田島 慎一, b -関数の根に付随したホロノミー系の局所コホモロジー解の計算法について, 数理解析研究所講究録, 掲載確定
- [14] Nishiyama, K. and Noro, M., Stratification associated with local b -functions, *Journal of Symbolic Computation*, Vol. **45**, pp. 462–480, 2010
- [15] Noro, M. and Takeshima, T., Risa/Asir - A computer algebra system. *Proc. ISSAC 1992*, pp. 387–396, ACM, 1992. <http://www.math.kobe-u.ac.jp/Asir/asir.html>
- [16] Oaku, T., An algorithm of computing b -functions. *Duke Math. J.*, Vol. **87**, pp. 115–132, 1997.
- [17] Oaku, T., Algorithms for b -functions, restrictions, and algebraic local cohomology groups of D -modules. *Adv. Appl. Math.*, Vol. **19**, pp. 61–105, 1997.
- [18] Oaku, T., Algorithms for the b -function and D -modules associated with a polynomial. *J. Pure Appl. Algebra*, Vol. **117** and **118**, pp. 495–518, 1997.
- [19] 大阿久俊則, D 加群と計算数学. 朝倉書店, 2002.
- [20] Tajima, S, Nakamura, N. and Nabeshima, K., Standard bases and algebraic local cohomology for zero dimensional ideals. *Advanced Studies in Pure Mathematics*, Vol. **56**, pp.341–361, 2009.
- [21] 田島慎一, 一般化された integral dependence relation を用いた $\text{Ann}(f^s)$ の構成法について. 京都大学数理解析研究所講究録, 掲載確定
- [22] Yano, T., On the holonomic system of f^s and b -functions. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto Univ.*, Vol. **12**, pp. 469–480, 1978.
- [23] Yano, T., On the theory of b -functions. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto Univ.*, Vol. **14**, pp. 111–202, 1978.
- [24] Yoshinaga, E. and Suzuki, M., Normal forms of nondegenerate quasihomogeneous functions with inner modality ≤ 4 . *Invent. Math.*, Vol. **55**, pp. 185–206, 1979.