Cyclic sum of $\widehat{\mathcal{A}}$-finite multiple zeta values

東北大学大学院理学研究科 川﨑 菜穂 *
Naho Kawasaki
Mathematical Institute,
Tohoku University

巡回和公式は和公式の細分化と呼ばれており, 和公式は多重ゼータ (スター) 値の基本的かつ重要な関係式族の一つである. 多重ゼータスター値の巡回和公式は M. Hoffman によって予想され, Y. Ohno によって証明された ([1]). その後, Ohno-N. Wakabayashi によって多重ゼータスター値の巡回和公式が証明された ([4]). 一方で, 小山宏次郎氏との共同研究により, 有限多重ゼータ値および有限多重ゼータスター値の巡回和公式を得た ([3]). 今回, その lift となる $\widehat{\mathcal{A}}$-有限多重ゼータ値および $\widehat{\mathcal{A}}$-有限多重ゼータスター値の巡回和公式を与えた ([2]) ので報告する.

1 多重ゼータ (スター) 値の巡回和公式

この節では多重ゼータ値および多重ゼータスター値の巡回和公式について説明する.

正の整数 $k_1, \ldots, k_r$ に対して, 自然数の組 $(k_1, \ldots, k_r)$ を index と呼ぶ. index $(k_1, \ldots, k_r)$ $(k_1 \geq 2)$ に対して, 多重ゼータ値および多重ゼータスター値を

$$\zeta(k_1, \ldots, k_r) := \sum_{m_1 > \cdots > m_r > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_r^{k_r}} \quad \in \mathbb{R}$$

および

$$\zeta^\star(k_1, \ldots, k_r) := \sum_{m_1 \geq \cdots \geq m_r > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_r^{k_r}} \quad \in \mathbb{R}$$

でそれぞれ定義する.

巡回和公式は多重ゼータ値の間に成り立つ関係式族の一つであり, M. Hoffman によって予想され, Y. Ohno によって証明された ([1]). その後, Ohno-N. Wakabayashi によって多重ゼータスター値の巡回和公式が証明された ([4]). 巡回和公式を述べるために記号を定める. 正の整数 k, r $(k \geq r)$ に対して, index の集合 $I(k, n)$ を

$$I(k, r) := \{ (k_1, \ldots, k_r)\colon \text{ index} \mid k_1 + \cdots + k_r = k \}$$

で定義する. そして, $I(k, r)$ の二つの元が巡回同値であるとは, $\sigma = (1 \cdots r)$ と $j = 1, \ldots, r$ に対して,

$$(k_1, \ldots, k_r) \equiv (k_{\sigma^j(1)}, \ldots, k_{\sigma^j(r)})$$

*E-mail: naho.kawasaki.p7@gmail.com

を満たすこととする．index の集合 $I(k,r)$ における巡回同値類の全体を $\Pi(k,r)$ で表す．以下, 空和は 0 とする．

多重ゼータ値および多重ゼータスター値の巡回和公式を以下に述べる．

定理 1.1 (Hoffman-Ohno [1], Ohno-Wakabayashi [4])**.** $\Pi(k,r)$ $(k>r>0)$ の任意の元 α に対して,

$$\sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_r)\in\alpha}\sum_{i=0}^{k_1-2}\zeta(k_1-i,k_2,\ldots,k_r,i+1)=\sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_r)\in\alpha}\zeta(k_1+1,k_2,\ldots,k_r)$$

および

$$\sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_r)\in\alpha}\sum_{i=0}^{k_1-2}\zeta^\star(k_1-i,k_2,\ldots,k_r,i+1)=\frac{k|\alpha|}{r}\zeta(k+1)$$

が成り立つ．ただし, 右辺の $|\alpha|$ は α の元の個数とする．

2　$\widehat{\mathcal{A}}$-有限多重ゼータ (スター) 値の巡回和公式

この節では, $\widehat{\mathcal{A}}$-有限多重ゼータ値および $\widehat{\mathcal{A}}$-有限多重ゼータスター値の巡回和公式について述べる．

$\widehat{\mathcal{A}}$-有限多重ゼータ値と $\widehat{\mathcal{A}}$-有限多重ゼータスター値を定義する．まず, J. Rosen [5] による $\widehat{\mathcal{A}}$ を定義する．正の整数 n に対して, $\mathbb{Q}$-代数 $\mathcal{A}_n$ を

$$\mathcal{A}_n\ :=\ \left(\prod_{p:\text{prime}}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\right)\Bigg/\left(\bigoplus_{p:\text{prime}}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\right)$$

で定義する．任意の正の整数 n に対して, 自然な準同型 $\mathcal{A}_{n+1}\to\mathcal{A}_n$ が存在し, この準同型について $\{\mathcal{A}_n\}_{n\geq1}$ は逆系をなす．そこで, $\widehat{\mathcal{A}}:=\varprojlim_n\mathcal{A}_n$ とすると, 自然な全射準同型 $\pi:\prod_p\mathbb{Z}_p\twoheadrightarrow\widehat{\mathcal{A}}$ が存在する．このとき, 正の整数 n と index $(k_1,\ldots,k_r)$ に対して, $\mathcal{A}_n$-有限多重ゼータ値および $\mathcal{A}_n$-有限多重ゼータスター値を

$$\zeta_{\mathcal{A}_n}(k_1,\ldots,k_r):=\left(\sum_{p>m_1>\cdots>m_r>0}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}\bmod p^n\right)_p\qquad\in\mathcal{A}_n$$

および

$$\zeta^\star_{\mathcal{A}_n}(k_1,\ldots,k_n):=\left(\sum_{p>m_1\geq\cdots\geq m_n>0}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_n^{k_n}}\bmod p^n\right)_p\qquad\in\mathcal{A}_n$$

でそれぞれ定義する．また, $\widehat{\mathcal{A}}$-有限多重ゼータ値および $\widehat{\mathcal{A}}$-有限多重ゼータスター値を

$$\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(k_1,\ldots,k_r):=\pi\left(\left(\sum_{p>m_1>\cdots>m_r>0}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}\right)_p\right)\qquad\in\widehat{\mathcal{A}}$$

および

$$\zeta^{\star}_{\widehat{\mathcal{A}}}(k_1,\ldots,k_r) := \pi\left(\left(\sum_{p>m_1\geq\cdots\geq m_n>0}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}\right)_p\right) \qquad \in \widehat{\mathcal{A}}$$

でそれぞれ定義する．さらに, $\mathbf{p} := \pi((p)_p)$ とする．

今回得た, $\widehat{\mathcal{A}}$-有限多重ゼータ値および $\widehat{\mathcal{A}}$-有限多重ゼータスター値の巡回和公式を以下に述べる．

定理 2.1. $\Pi(k,r)$ $(k\geq r>0)$ の任意の元 α に対して,

$$\begin{aligned}&\sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_r)\in\alpha}\sum_{i=0}^{k_1-2}\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(k_1-i,k_2,\ldots,k_r,i+1)\\ &=\sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_r)\in\alpha}\left(\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(k_1+1,k_2,\ldots,k_r)+\sum_{l=1}^{\infty}\bigl(\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(k_2,\ldots,k_r,k_1+l)+\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(k_2,\ldots,k_r,k_1,l)\bigr)\mathbf{p}^{l-1}\right)\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}&\sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_r)\in\alpha}\sum_{i=0}^{k_1-2}\zeta^{\star}_{\widehat{\mathcal{A}}}(k_1-i,k_2,\ldots,k_r,i+1)\\ &=\frac{k|\alpha|}{n}\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(k+1)+\sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)\in\alpha}\sum_{l=1}^{\infty}\zeta^{\star}_{\widehat{\mathcal{A}}}(k_2,\ldots,k_n,k_1,l)\mathbf{p}^{l-1}\end{aligned}$$

が成り立つ．

有限多重ゼータ (スター) 値の巡回和公式の左辺に現れる index は, 多重ゼータ (スター) 値の巡回和公式 (定理 1.1) の左辺に現れる index に一致している．

$\mathcal{A} := \mathcal{A}_1$ とする．定理 2.1 は次の定理の lift となっている．

定理 2.2 (K.-Oyama [3])**.** $\Pi(k,r)$ $(k\geq r>0)$ の任意の元 α に対して,

$$\begin{aligned}&\sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_r)\in\alpha}\sum_{i=0}^{k_1-2}\zeta_{\mathcal{A}}(k_1-i,k_2,\ldots,k_r,i+1)\\ &=\sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_r)\in\alpha}\{\zeta_{\mathcal{A}}(k_1+1,k_2,\ldots,k_r)+\zeta_{\mathcal{A}}(k_2,\ldots,k_r,k_1+1)+\zeta_{\mathcal{A}}(k_2,\ldots,k_r,k_1,1)\}\end{aligned}$$

および

$$\sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_r)\in\alpha}\sum_{i=0}^{k_1-2}\zeta^{\star}_{\mathcal{A}}(k_1-i,k_2,\ldots,k_r,i+1)=\sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_r)\in\alpha}\zeta^{\star}_{\mathcal{A}}(k_2,\ldots,k_r,k_1,1)$$

が成り立つ．

謝辞

2019 年度 RIMS 共同研究 (公開型)「多重ゼータ値の諸相」での講演機会をくださいました世話人の古庄英和先生 (名古屋大学) に心より感謝申し上げます．本研究発表には, JSPS 科研費 JP19K23396 の支援を受けました．

参考文献

[1] M. E. Hoffman and Y. Ohno, Relations of multiple zeta values and their algebraic expression, J. of Algebra, **262** (2003), 332–347.

[2] N. Kawasaki, Hyperlogarithms, Bernoulli polynomials, and related multiple zeta values, Doctoral dissertation in Tohoku University, 2019.

[3] N. Kawasaki and K. Oyama, Cyclic sum of finite multiple zeta values, Acta Arithmetica, to appear.

[4] Y. Ohno and N. Wakabayashi, Cyclic sum of multiple zeta values, Acta Arithmetica, **123** (2006), 289–295.

[5] J. Rosen, Asymptotic relation for truncated multiple zeta values, *J. Lond. Math. Soc.*, (2) **91**, 554-572.