Schur multiple zeta-functions of anti-hook type and zeta-functions of root systems [1]

上智大学理工学部　　中筋麻貴 [2]
Maki Nakasuji
Department of Information and Communication Sciences,
Faculty of Science and Technology
Sophia University

1　はじめに

リーマンゼータ関数の多重化，多変数化として発展した多重ゼータ関数には，様々な形のものがある．ここでは，その中の一つである Euler-Zagier 型多重ゼータ関数に注目し，これをさらに拡張したゼータ関数として，以下の 2 つを扱う．

- 「Schur 多重ゼータ関数」．これは，組合せ論や表現論の主な研究対象である Schur 関数の構造に似せた形で Euler-Zagier 型多重ゼータ関数を拡張した多重ゼータ関数であり，2018 年に Nakasuji-Puksuwan-Yamasaki ([NPY]) によって導入された．なお，この関数は Schur 関数の拡張にはなっていない．
- 「ルート系のゼータ関数」．こちらは，Euler-Zagier 型多重ゼータ関数の拡張であると同時に Witten ゼータ関数の多変数化として，2007 年に Komori-Matsumoto-Tsumura ([KMT]) によって導入されたルート系に関係する多重ゼータ関数である．

本稿では，この一見関係のなさそうな 2 つの多重ゼータ関数について，ある制限をつけることで関係をつけ，その結果得られる関係式について紹介してゆく．証明など，詳細についてご興味がありましたら，[MN] をご参照ください．

本稿は，2019 年に京都大学数理解析研究所において開催された研究集会「多重ゼータ値の諸相」の講演内容をまとめたものです．講演の機会を与えてくださった古庄英和先生に心より御礼申し上げます．

[1]本稿は松本耕二氏 (名古屋大学) との共同研究に基づく．
[2]本研究の一部は科学研究費補助金 (基盤 (C), 課題番号 18K03223) の助成を受けた．

2　Schur 多重ゼータ関数

まず最初に，Schur 多重ゼータ関数について述べる．与えられた自然数 n に対し，n の分割を $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_r)$ と定める．ここで，$\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_r>0$, $|\lambda|=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i=n$ を満たすものとし，これを $\lambda\vdash n$ と書く．n の分割 $\lambda\vdash n$ は，次で表される $D(\lambda)$ の各 (i,j) を箱として図示するヤング図形と同一視される．

$$D(\lambda)=\{(i,j)\in\mathbb{Z}^2\,|\,1\leq i\leq r,\ 1\leq j\leq\lambda_i\}$$

例.

$$\lambda=(4,3,2)\longleftrightarrow D(\lambda)=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \ & \ & \ & \ \\ \hline \ & \ & \ & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-3} \ & \ & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2}\end{array}$$

λ を分割とし，X をある集合とする．λ に対するヤング図形 $D(\lambda)$ の各箱に，X の元を書き入れた図形 $T=(t_{ij})$ $(t_{ij}\in X)$ を形が λ の X 上のヤング盤 (X-値盤) と呼ぶ．また，形が λ の全ての X 上のヤング盤たちの集合を $T(\lambda,X)$ と書く．

例. $\lambda=(4,3,2)$ のとき，

$$T(\lambda,X)=\left\{T=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ \hline t_{21} & t_{22} & t_{23} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-3} t_{31} & t_{32} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2}\end{array}\ \middle|\ t_{ij}\in X\right\}.$$

さらに，各列に対して下方向に強い意味で増加し $(t_{1j}<t_{2j}<\cdots)$，各行に対して右方向に弱い意味で増加する $(t_{i1}\leq t_{i2}\leq\cdots)$ $\mathbb{N}$ 上のヤング盤を半標準ヤング盤と呼び，形が λ のすべての半標準ヤング盤たちの集合を $\mathrm{SSYT}(\lambda)$ と書く．

古典的な Schur 関数 s_λ の類似として，[NPY] では次の形の多重ゼータ関数が導入された．

定義 2.1 分割 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ と $\boldsymbol{s}=(s_{ij})\in T(\lambda,\mathbb{C})$ に対し，

$$\zeta_\lambda(\boldsymbol{s})=\sum_{M\in SSYT(\lambda)}\prod_{(i,j)\in D(\lambda)}M^{-\boldsymbol{s}}=\sum_{M\in SSYT(\lambda)}\prod_{(i,j)\in D(\lambda)}{m_{ij}}^{-s_{ij}}$$

と定義し，これを *Schur* 多重ゼータ関数と呼ぶ．ここで $M=(m_{ij})_{(i,j)\in D(\lambda)}$ を表す．

Schur 多重ゼータ関数の収束域について考える．分割 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_r)$ に対し, $C(\lambda)\subset D(\lambda)$

を λ の corner の集合とする．ここで，corner とは，ヤング図形について，その右側 $(i, j+1)$ および下側 $(j+1, i)$ に箱が存在しない (i, j) のことを意味する．例えば，$\lambda = (4, 3, 2)$ のとき，$C((4, 3, 2)) = \{(1, 4),\ (2, 3),\ (3, 2)\}$ である．このとき，以下が成り立つ．

補題 2.2

$$W_\lambda := \left\{ \boldsymbol{s} = (s_{ij}) \in T(\lambda, \mathbb{C}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathrm{Re}(s_{ij}) \geq 1 \ \mathit{for}\ ^\forall(i, j) \in D(\lambda) \setminus C(\lambda) \\ \mathrm{Re}(s_{ij}) > 1 \ \mathit{for}\ ^\forall(i, j) \in C(\lambda) \end{array} \right\}$$

とする．このとき，$\zeta_\lambda(\boldsymbol{s})$ は，$\boldsymbol{s} \in W_\lambda$ において絶対収束する．

注意 1 $\lambda = (\underbrace{1, \cdots, 1}_{r \text{ times}})$，および $\lambda = (r)$ に対する *Schur* 多重ゼータ関数は，それぞれ，

$$\zeta_{(\underbrace{1, \cdots, 1}_{r \text{ times}})}(\boldsymbol{s}) = \sum_{m_1 < \cdots < m_r} m_1^{-s_1} \cdots m_r^{-s_r}$$

$$\zeta_{(r)}(\boldsymbol{s}) = \sum_{m_1 \leq \cdots \leq m_r} m_1^{-s_1} \cdots m_r^{-s_r}$$

で表され，これらは，*Euler-Zagier* 型多重ゼータ関数 $\zeta_{EZ,r}(s_1, \cdots, s_r)$，等号付き多重ゼータ関数 $\zeta^\star_{EZ,r}(s_1, \cdots, s_r)$ に等しい．なお，どちらも $\mathrm{Re}(s_1), \ldots, \mathrm{Re}(s_{r-1}) \geq 1$, $\mathrm{Re}(s_r) > 1$ を満たすものとする．

次に歪ヤング図形に対する Schur 多重ゼータ関数を定義する．2 つの分割 λ と μ を $\lambda \supset \mu$ を満たすものとする．すなわち，各 i について，$\lambda_i \geq \mu_i$ を満たすとする．$\lambda \backslash \mu$ を歪ヤング図形といい，λ/μ で表す．ヤング盤と同様に，各列に対して下方向に強い意味で増加し，各行に対して右方向に弱い意味で増加する正の整数を箱に書き入れた盤を歪半標準ヤング盤と呼び，形が λ/μ のすべての歪半標準ヤング盤の集合を SSYT(λ/μ) と書く．

例． $\lambda = (6, 3, 2, 2)$, $\mu = (4, 1, 1)$ とする．このとき，次の例は形が λ/μ の歪半標準ヤング盤の 1 つである．

				2	3
	1	5			
	3				
6	6				

．

定義 2.3 $\boldsymbol{s} = (s_{ij}) \in T(\lambda/\mu, \mathbb{C})$ とする．歪型の *Schur* 多重ゼータ関数を以下で定義する：

$$\zeta_{\lambda/\mu}(\boldsymbol{s}) = \sum_{M \in \mathrm{SSYT}(\lambda/\mu)} M^{-\boldsymbol{s}} = \sum_{M \in SSYT(\lambda/\mu)} \prod_{(i,j) \in D(\lambda/\mu)} {m_{ij}}^{-s_{ij}}.$$

収束域については，補題 2.2 と同様に以下を得る．

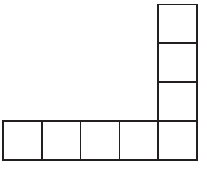
補題 2.4 $C(\lambda/\mu) \subset D(\lambda/\mu)$ を λ/μ の *corner* の集合とする．

$$W_{\lambda/\mu} := \left\{ (s_{ij}) \in T(\lambda/\mu, \mathbb{C}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathrm{Re}(s_{ij}) \geq 1 \ \mathit{for}\ {}^{\forall}(i,j) \in D(\lambda/\mu) \setminus C(\lambda/\mu) \\ \mathrm{Re}(s_{ij}) > 1 \ \mathit{for}\ {}^{\forall}(i,j) \in C(\lambda/\mu) \end{array} \right\}$$

とする．このとき，$\zeta_{\lambda/\mu}(\boldsymbol{s})$ は，$\boldsymbol{s} = (s_{ij}) \in W_{\lambda/\mu}$ において絶対収束する．

$k, \ell \in \mathbb{N}$ に対し，$\lambda = (\underbrace{k+1, \cdots, k+1}_{\ell+1 \text{ times}})$, $\mu = (\underbrace{k, \cdots, k}_{\ell \text{ times}})$ のとき，歪ヤング図形 λ/μ を「Anti-hook 型ヤング図形」と呼び，$\theta = \lambda/\mu = \mathrm{rib}(k|\ell)$ と書くことにする．

例． $\theta = \mathrm{rib}(4|3)$ に対する Anti-hook 型ヤング図形は以下となる．



さらに，Anti-hook 型ヤング盤を記述するにあたり，位置を表す二重添数を以下のように付け替える．

$$\begin{array}{cccc} & & & \boxed{k\ell} \\ & & & \boxed{\vdots} \\ & & & \boxed{k1} \\ \boxed{00} & \boxed{10} & \boxed{\cdots} & \boxed{k0} \end{array} .$$

すなわち，$\boldsymbol{s} \in W_\theta$ に対し, Anti-hook 型 Schur 多重ゼータ関数を以下のように記述する．

$$\zeta_\theta(\boldsymbol{s}) = \sum_{M \in \mathrm{SSYT}(\theta)} m_{00}^{-s_{00}} m_{10}^{-s_{10}} \cdots m_{k0}^{-s_{k0}} m_{k1}^{-s_{k1}} \cdots m_{k\ell}^{-s_{k\ell}}. \tag{2.1}$$

ここで，$m_{00} \leq m_{10} \leq \cdots \leq m_{k0}$, $m_{k\ell} < m_{k(\ell-1)} < \cdots < m_{k0}$, $\mathrm{Re}(s_{k0}) > 1$ を満たすものとする．このとき，次の定理を得た．

定理 2.5 $\theta = \mathrm{rib}(k|\ell)$, $\boldsymbol{s} \in T(\theta, \mathbb{C})$ に対し,

$$\zeta_\theta(\boldsymbol{s}) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \zeta^\star_{EZ,i}(s_{00}, s_{10}, \cdots, s_{i-1,0}) \times \zeta_{EZ,\ell+k-i+1}(s_{k\ell}, s_{k,\ell-1}, \cdots, s_{k0}, s_{k-1,0}, \cdots, s_{i0}) \tag{2.2}$$

が成り立つ．ただし，$i = 0$ に対し，$\zeta^\star = 1$ とおく.

注意 2 *Euler-Zagier* 多重ゼータ関数の有理型接続により，$\zeta_\theta(\boldsymbol{s})$ は全複素空間 $\mathbb{C}^{k+\ell+1}$ に有理型に接続できる．すなわち，(2.2) は全複素空間 $\mathbb{C}^{k+\ell+1}$ で成り立つ.

例. $(k, \ell) = (3, 2)$ のとき，$\boldsymbol{s} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \multicolumn{3}{c|}{} & s_{32} \\ \cline{4-4} \multicolumn{3}{c|}{} & s_{31} \\ \hline s_{00} & s_{10} & s_{20} & s_{30} \\ \hline \end{array}$ に対し，以下の関係式が成り立つ.

$$\begin{aligned} \zeta_\theta(\boldsymbol{s}) =& -\zeta_{EZ,6}(s_{32}, s_{31}, s_{30}, s_{20}, s_{10}, s_{00}) \\ &+ \zeta^\star_{EZ,1}(s_{00})\zeta_{EZ,5}(s_{32}, s_{31}, s_{30}, s_{20}, s_{10}) \\ &- \zeta^\star_{EZ,2}(s_{00}, s_{10})\zeta_{EZ,4}(s_{32}, s_{31}, s_{30}, s_{20}) \\ &+ \zeta^\star_{EZ,3}(s_{00}, s_{10}, s_{20})\zeta_{EZ,3}(s_{32}, s_{31}, s_{30}). \end{aligned}$$

[NPY] において，Schur 多重ゼータ関数は ζ_{EZ} や $\zeta^\star_{EZ}$ の線形結合で書けることが示されている：

$$\zeta_\theta(\boldsymbol{s}) = \sum_{\mathbf{t} \preceq \mathbf{s}} \zeta_{EZ,\mathrm{length}(\mathbf{t})}(\mathbf{t}), \tag{2.3}$$

$$\zeta_\theta(\boldsymbol{s}) = \sum_{\mathbf{t} \preceq \mathbf{s}'} (-1)^{|\theta| - \mathrm{length}(\mathbf{t})} \zeta^\star_{EZ,\mathrm{length}(\mathbf{t})}(\mathbf{t}). \tag{2.4}$$

ここで $\mathrm{length}(\mathbf{t})$ は $\mathbf{t} = (t_1, \cdots, t_m) \in \mathbb{C}^m$ のときの長さ m を表す．定理 2.5 と合わせることにより，以下の関係式を得る.

系 2.6 (2.2), (2.3), (2.4) の右辺は全て等しい.

定理 2.5 はある種の調和積公式である．一方，調和積公式から Euler-Zagier 多重ゼータ関数のすべての関数関係式が得られることが，[IM] によって報告されている．このことから，その意味では，上記の系は新しい結果ではないと言えるかもしれない．しかしながら，このように新しく得られた調和積公式から，新しい関数関係式を得ること，もしくは既存の結果

の別証明を得ることも意味があることだと言えるであろう.[3]

3 ルート系のゼータ関数

V を内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ が定義された r 次元実ベクトル空間，V^* をその双対空間とする．$\Delta\subset V$ をルート系，Δ_+ (res. Δ_-) を正ルート (res. 負ルート) の集合，$\Psi=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\}$ を基本ルートの系とする．また，ルート α に対し，$\alpha^\vee=\frac{2\alpha}{\langle\alpha,\alpha\rangle}$ を α のコルート，$s_\alpha(x)=x-\frac{2\langle\alpha,x\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\alpha$ で定義される $s_\alpha:V\to V$ を α に対応する鏡映と呼ぶ．$\Lambda=\{w_1,\cdots,w_r\}$ を $\langle\alpha_i^\vee,w_j\rangle=\delta_{ij}$ (Kronecker's delta) で定義される支配的ウエイトの集合とする．このとき，[KMT] によって導入されたルート系 Δ のゼータ関数は以下で定義される．

定義 3.1 $\underline{\mathbf{s}}=(s_\alpha)_{\alpha\in\Delta_+}\in\mathbb{C}^{|\Delta_+|}$ に対し，

$$\zeta_r(\underline{\mathbf{s}},\Delta):=\sum_{m_1=1}^\infty\cdots\sum_{m_r=1}^\infty\prod_{\alpha\in\Delta_+}\langle\alpha^\vee,m_1w_1+\cdots+m_rw_r\rangle^{-s_\alpha}.$$

古典型ルート系の一つである A_r 型ルート系 $\Delta(A_r)$ の場合, そのゼータ関数は具体的に以下で表される．

$$\begin{aligned}\zeta_r(\underline{\mathbf{s}},A_r)&=\zeta_r((s(i,j))_{i,j},\Delta(A_r))\\&=\sum_{m_1=1}^\infty\cdots\sum_{m_r=1}^\infty\prod_{1\le i<j\le r+1}(m_i+\cdots+m_{j-1})^{-s(i,j)}.\end{aligned}$$

ここで，$s(i,j)$ は (i,j) $(1\le i,j\le r+1,\ i\ne j)$ によってパラメトライズされるルートに対応する変数とする．$i\ge 2$ に対し，$s(i,j)=0$ となるゼータ関数は，

$$\zeta_r(\underline{\mathbf{s}},A_r)=\sum_{m_1=1}^\infty\cdots\sum_{m_r=1}^\infty\prod_{1<j\le r+1}(m_1+\cdots+m_{j-1})^{-s(1,j)}$$

であり，これは Euler-Zagier 型多重ゼータ関数

$$\zeta_{EZ,r}(s(1,2),s(1,3),\cdots,s(1,r+1))$$

に等しい．

ここで，ルート系のゼータ関数の変形版であるいくつかの新しい関数を導入する．

---

[3]山本修司氏，村原英樹氏より，系 2.6 は既存の結果からも得られるとのご指摘をいただきました．

定義 3.2 $r>0,\ 0\le d\le r$ に対し，

$$\zeta^{\bullet}_{r,d}(\underline{\mathbf{s}},A_r):=\underbrace{\left(\sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_d=0}^{\infty}\right)'}_{d\ times}\underbrace{\sum_{m_{d+1}=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_r=1}^{\infty}}_{r-d\ times}\prod_{1\le i<j\le r+1}(m_i+\cdots+m_{j-1})^{-s(i,j)}$$

とする．ここで,「$'$」は $m_i=\cdots=m_{j-1}=0$ となる項を省くことを意味する．$\zeta^{\bullet}_{r,0}(\underline{\mathbf{s}},A_r)=\zeta_r(\underline{\mathbf{s}},A_r)$ であることはすぐにわかる.

定義 3.3 $x>0$ に対し，

$$\zeta^{H}_{r}(\underline{\mathbf{s}},x,A_r)=\sum_{m_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_r=1}^{\infty}\prod_{1\le i<j\le r+1}(x+m_i+\cdots+m_{j-1})^{-s(i,j)},$$

$$\zeta^{\bullet,H}_{r,d}(\underline{\mathbf{s}},x,A_r)=\underbrace{\left(\sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_d=0}^{\infty}\right)}_{d\ times}\underbrace{\sum_{m_{d+1}=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_r=1}^{\infty}}_{r-d\ times}\prod_{1\le i<j\le r+1}(x+m_i+\cdots+m_{j-1})^{-s(i,j)}$$

とする．$\zeta^{\bullet,H}_{r,0}(\underline{\mathbf{s}},x,A_r)=\zeta^{H}_{r}(\underline{\mathbf{s}},x,A_r)$ である．また，$r=0$ のとき，$\zeta_0=\zeta^H_0=\zeta^{\bullet}_{0,0}=\zeta^{\bullet,H}_{0,0}=1$ とする.

　このとき，次の定理を得た.

定理 3.4

$$W^{\circ}_{\theta}=\left\{\boldsymbol{s}=(s_{ij})\in T(\theta,\mathbb{C})\ \middle|\ \mathrm{Re}(s_{ij})>1\ for\ {}^{\forall}(i,j)\in D(\theta)\ \right\}$$

とする．このとき，$\boldsymbol{s}\in W^{\circ}_{\theta}$ に対し，

$$\zeta_{\theta}(\boldsymbol{s})=\zeta^{\bullet}_{k+\ell+1,k+1}(\mathfrak{u},A_{k+\ell+1})+\sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{\nu=0}^{\ell-1}(-1)^{\mu+\nu}Z_{\mu,\nu}(\boldsymbol{s}) \tag{3.1}$$

が成り立つ．ここで

$$\begin{aligned}Z_{\mu,\nu}(\boldsymbol{s})=&\sum_{m_{00},m_{k\ell}\ge1}m_{00}^{-s_{00}}m_{k\ell}^{-s_{k\ell}}\zeta^{\bullet,H}_{k-(\mu+1),k-(\mu+1)}(\mathfrak{s}_1,m_{00},A_{k-(\mu+1)})\\&\times\zeta^{\bullet,H}_{\mu+\nu+1,\nu}(\mathfrak{v},m_{00}+m_{k\ell},A_{\mu+\nu+1})\zeta^{H}_{\ell-(\nu+1)}(\mathfrak{s}_2,m_{k\ell},A_{\ell-(\nu+1)})\end{aligned} \tag{3.2}$$

とし，各変数は以下で定義されるものとする．$\mathbf{s}_h(x,y)=\underbrace{x,0,\cdots,0,y}_{h}$ とする.

- $\mathfrak{s}_1=(\mathbf{s}_{k-(\mu+1)}(s_{10},0),\mathbf{s}_{k-(\mu+1)-1}(s_{20},0),\cdots,s_{k-(\mu+1),0})$

- $\mathfrak{s}_2 = (\mathbf{s}_{\ell-\nu}(s_{k,\ell-1}, 0), \mathbf{s}_{\ell-\nu-1}(s_{k,\ell-2}, 0), \cdots, \mathbf{s}_2(s_{k,\nu+1}, 0), s_{k\nu})$
- $\mathfrak{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_{k+\ell+1})$
- $\mathfrak{v} = (\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_{\mu+\nu+1})$

また，$\mathbf{u}_n$, $\mathbf{v}_n$ は次で定義する．
$k < \ell$ のとき,

$$\mathbf{u}_n = \begin{cases} \mathbf{s}_{k+\ell+2-n}(0,0) & (1 \le n \le k) \\ \mathbf{s}_{k+\ell+2-n}(s_{k,k+\ell+1-n}, 0) & (k < n \le \ell) \\ \mathbf{s}_{k+\ell+2-n}(s_{k,k+\ell+1-n}, s_{n-\ell-1,0}) & (\ell < n < k+\ell+1) \\ s_{k,0} & (n = k+\ell+1). \end{cases}$$

$k \ge \ell$ のとき,

$$\mathbf{u}_n = \begin{cases} \mathbf{s}_{k+\ell+2-n}(0,0) & (1 \le n \le \ell) \\ \mathbf{s}_{k+\ell+2-n}(0, s_{n-\ell-1,0}) & (\ell < n \le k) \\ \mathbf{s}_{k+\ell+2-n}(s_{k,k+\ell+1-n}, s_{n-\ell-1,0}) & (k < n < k+\ell+1) \\ s_{k,0} & (n = k+\ell+1). \end{cases}$$

また，$\nu < \mu$ のとき,

$$\mathbf{v}_n = \begin{cases} 0^\nu, s_{k0}, 0^\mu & (n = 0) \\ 0^{\nu-n}, s_{kn}, 0^{n-1}, s_{k-n,0}, 0^{\mu-n} & (1 \le n \le \nu) \\ 0^\nu, s_{k-n,0}, 0^{\mu-n} & (\nu < n \le \mu) \\ 0^{\nu+\mu-n+1} & (\mu < n \le \mu+\nu+1). \end{cases}$$

$\nu \ge \mu$ のとき,

$$\mathbf{v}_n = \begin{cases} 0^\nu, s_{k0}, 0^\mu & (n = 0) \\ 0^{\nu-n}, s_{kn}, 0^{n-1}, s_{k-n,0}, 0^{\mu-n} & (1 \le n \le \mu) \\ 0^{\nu-n}, s_{kn}, 0^\mu & (\mu < n \le \nu) \\ 0^{\nu+\mu-n+1} & (\nu < n \le \mu+\nu+1). \end{cases}$$

上記において，0^ν は $\underbrace{0, \cdots, 0}_{\nu}$ を意味するものとする．

系 3.5 系 *2.6* に加えて，本節で得られた $\zeta_\theta(\boldsymbol{s})$ もすべて等しい．すなわち，(2.2), (2.3), (2.4), (3.1) の右辺はすべて等しい．

注意 3 講演では，$\zeta_\theta(\boldsymbol{s})$ の反復積分表示についても述べた．これより，実際は，系 *3.5* に，反復積分表示によって得られる関係式も追加される．反復積分表示については，本稿では省略するため，ご興味がありましたら，*[MN]* をご参照ください．

例． $(k,\ell)=(1,1)$ のとき，$\boldsymbol{s}=\begin{array}{cc} \cline{2-2} & \multicolumn{1}{|c|}{s_{11}} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{s_{00}} & \multicolumn{1}{c|}{s_{10}} \\ \hline \end{array}$ に対し，

$$\zeta_\theta(\boldsymbol{s}) = \sum_{\substack{1\le m_{00}\le m_{10} \\ 1\le m_{11}<m_{10}}} m_{00}^{-s_{00}} m_{10}^{-s_{10}} m_{11}^{-s_{11}}$$

は，(2.2), (2.3), (3.1) より，それぞれ以下のように表すことができる．

$$\begin{aligned}
\zeta_\theta(\boldsymbol{s}) &= \zeta_{EZ,3}(s_{00},s_{11},s_{10}) + \zeta_{EZ,3}(s_{11},s_{00},s_{10}) \\
&\qquad + \zeta_{EZ,2}(s_{00}+s_{11},s_{10}) + \zeta_{EZ,2}(s_{11},s_{00}+s_{10}), \\
\zeta_\theta(\boldsymbol{s}) &= -\zeta_{EZ,3}(s_{11},s_{10},s_{00}) + \zeta^\star_{EZ,1}(s_{00})\zeta_{EZ,2}(s_{11},s_{10}), \\
\zeta_\theta(\boldsymbol{s}) &= \zeta^\bullet_{3,2}(0^3,s_{11},s_{00},s_{10},A_3) + Z_{00}(\boldsymbol{s}). \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

ここで $Z_{00}(\boldsymbol{s}) = \zeta_3(s_{00},s_{11},0^3,s_{10},A_3)$ である．

例． $(k,\ell)=(1,2)$ のとき，　$\boldsymbol{s}=\begin{array}{cc} \cline{2-2} & \multicolumn{1}{|c|}{s_{12}} \\ \cline{2-2} & \multicolumn{1}{|c|}{s_{11}} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{s_{00}} & \multicolumn{1}{c|}{s_{10}} \\ \hline \end{array}$ に対し，

$$\zeta_\theta(\boldsymbol{s}) = \sum_{M\in \mathrm{SSYT}(\theta)} m_{00}^{-s_{00}} m_{10}^{-s_{10}} m_{11}^{-s_{11}} m_{12}^{-s_{12}}$$

は，(2.2), (3.1) より，それぞれ以下のように表すことができる．

$$\begin{aligned}
\zeta_\theta(\boldsymbol{s}) &= \sum_{i=0}^{1} (-1)^{1-i} \zeta^\star_{EZ,i}(s_{00},s_{10},\cdots,s_{i-1,0})\zeta_{EZ,4-i}(s_{12},s_{11},s_{10},\cdots,s_{i0}) \\
&= -\zeta_{EZ,4}(s_{12},s_{11},s_{10},s_{00}) + \zeta^\star_{EZ,1}(s_{00})\zeta_{EZ,3}(s_{12},s_{11},s_{10}),
\end{aligned}$$

$$\zeta_\theta(\boldsymbol{s}) = \zeta^\bullet_{4,2}(0^4,s_{12},0^2,s_{11},s_{00},s_{10},A_4) + Z_{00}(\boldsymbol{s}) - Z_{01}(\boldsymbol{s}).$$

ここで，

$$Z_{00}(\boldsymbol{s}) = \sum_{m_{00},m_{12}\geq 1} m_{00}^{-s_{00}} m_{12}^{-s_{12}} \zeta_1^H(s_{10}, m_{00}+m_{12}, A_1)\zeta_1^H(s_{11}, m_{12}, A_1),$$
$$Z_{01}(\boldsymbol{s}) = \sum_{m_{00},m_{12}\geq 1} m_{00}^{-s_{00}} m_{12}^{-s_{12}} \zeta_{2,1}^{\bullet,H}(0, s_{10}, s_{11}, m_{00}+m_{12}, A_2).$$

(3.1) 式右辺の第一項は $\bullet$ がない形で書き表すことができる．例えば，(3.3) の右辺第一項は次のように表すことができる：

$$\begin{aligned}
&\zeta_{3,2}^{\bullet}(0^3, s_{11}, s_{00}, s_{10}, A_3)\\
&= \underbrace{\left(\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}\right)'}_{2\text{ times}} \sum_{m_3=1}^{\infty} \prod_{1\leq i<j\leq m_4} (m_i+\cdots+m_{j-1})^{-s(i,j)}\\
&= \sum_{m_1,m_2,m_3\geq 1} + \sum_{\substack{m_2,m_3\geq 1\\ m_1=0}} + \sum_{\substack{m_1,m_3\geq 1\\ m_2=0}} \prod_{1\leq i<j\leq m_4} (m_i+\cdots+m_{j-1})^{-s(i,j)}\\
&= \zeta_3(0^3, s_{11}, s_{00}, s_{10}, A_3) + \zeta_2(s_{11}, 0, s_{00}+s_{10}, A_2) + \zeta_2(s_{11}, s_{00}, s_{10}, A_2).
\end{aligned}$$

4　定理 3.4 について

本節では，定理 3.4 の証明において得られた結果について述べる．
Anti-hook 型 Schur 多重ゼータ関数の和を 2 項に分ける．

$$\zeta_\theta(\boldsymbol{s}) = \sum\nolimits_{\text{(i)}} + \sum\nolimits_{\text{(ii)}} \qquad (\boldsymbol{s}\in W_\theta). \tag{4.1}$$

ここで，右辺の第一項および第二項は，それぞれ，(2.1) の右辺において，次の条件を満たす和に渡る項とする: (i) $m_{k0} \leq m_{00} + m_{k\ell}$ and (ii) $m_{k0} > m_{00} + m_{k\ell}$. この時，次が成り立つ．

定理 4.1 $\boldsymbol{s} \in W_\theta$ に対し，

$$\sum\nolimits_{\text{(i)}} = \zeta_{k+\ell+1,k+1}^{\bullet}(\mathfrak{u}, A_{k+\ell+1}).$$

定理 4.2 $\boldsymbol{s} \in W_\theta^\circ$ に対し，

$$\sum\nolimits_{\text{(ii)}} = \sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{\nu=0}^{\ell-1} (-1)^{\mu+\nu} Z_{\mu,\nu}(\boldsymbol{s}).$$

定理 4.1, 定理 4.2 を合わせることにより，定理 3.4 が従うことは明らかである．

さらに，$k+\ell \leq 3$ の場合については，(4.1) 式右辺の第二項, $\sum_{(\mathrm{ii})}$ は，さらに容易に，具体的に書き表すことが可能である．

例． 先の例，$(k,\ell)=(1,2)$ について考える．
条件 (ii) $m_{10} > m_{00}+m_{12}$ は，$m_{10}=m_{00}+m_{12}+h$ $(h \geq 1)$ と書くことができる．これより，

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_{(\mathrm{ii})} &= \sum_{\substack{m_{00},m_{12},b_1,h\geq 1\\ b_1<m_{00}+h}} m_{00}^{-s_{00}}(m_{00}+m_{12}+h)^{-s_{10}}(m_{12}+b_1)^{-s_{11}}m_{12}^{-s_{12}}\\ &= \sum_{\substack{m_{00},m_{12},b_1,h\geq 1\\ b_1<m_{00}+h}} \{(h\geq b_1)+(0<h<b_1)\}\\ &= \zeta_{4,1}^{\bullet}(0,s_{00},s_{12},0^3,s_{11},0^2,s_{10},A_4)+\zeta_4(0^2,s_{12},0,s_{00},0^3,s_{11},s_{10},A_4).\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}\zeta_\theta(\boldsymbol{s}) =&\zeta_{4,2}^{\bullet}(0^4,s_{12},0^2,s_{11},s_{00},s_{10},A_4)\\ &+\zeta_{4,1}^{\bullet}(0,s_{00},s_{12},0^3,s_{11},0^2,s_{10},A_4)+\zeta_4(0^2,s_{12},0,s_{00},0^3,s_{11},s_{10},A_4)\end{aligned}$$

と表される．

5　予想

本節では，$Z_{\mu,\nu}(\boldsymbol{s})$ の表す意味について考察した結果について述べる．
まずはじめに，ワイル群多重ディリクレ級数について紹介する．ワイル群多重ディリクレ級数は，2006 年に Brubaker-Bump-Chinta-Friedberg-Hoffstein ([BBCFH]) によって定義された以下の形をした多重級数である (他にも [BBF] を参照されると良い)．

$$\sum_{d_i\geq 1(1\leq i\leq r)} \Phi(w_1,\ldots,w_r;d_1,\ldots,d_r)d_1^{-s_1}\cdots d_r^{-s_r}.$$

ここで，$\Phi(w_1,\ldots,w_r;d_1,\ldots,d_r)$ は，ワイル群と関係するゼータ関数に似た多変数関数である．例えば，$r=2$ におけるワイル群多重ディリクレ級数は，

$$\sum_{d_1,d_2\geq 1} \Phi(w_1,w_2;d_1,d_2)d_1^{-s_1}d_2^{-s_2} \tag{5.1}$$

で表される．

一方，我々の定理において，$Z_{\mu,\nu}(\boldsymbol{s})$ は (3.2) として表される．これを (5.1) と比較すると，$Z_{\mu,\nu}(\boldsymbol{s})$ は，$\Phi(w_1, w_2; d_1, d_2)$ が 3 つのルート系ゼータ関数の積とする $r = 2$ におけるワイル群多重ディリクレ級数と考えることができる．すなわち，次の予想が考えられる．

予想 $Z_{\mu,\nu}(\boldsymbol{s})$ はワイル群多重ディリクレ級数の類似とみなすことができる．

本予想の解明については，今後の課題としていきたい．

References

[BBCFH] B. Brubaker, D. Bump, G. Chinta, S. Friedberg and J. Hoffstein, *Weyl group multiple Dirichlet series I*, Proc. Sympos. Pure Math., **75**, 91–114, Amer. Math. Soc., Providence, RI 2006.

[BBF] B. Brubaker, D. Bump and S. Friedberg, *Weyl Group Multiple Dirichlet Series, Type A Combinatorial Theory*, Ann. Math. Studies **175**, Princeton Univ. Press, 2011.

[IM] S. Ikeda and K. Matsuoka, On the functional relations for the Euler-Zagier multiple zeta-functions, *Tokyo J. Math.* **41** (2018), 477–485.

[KMT] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Zeta-functions of root systems, in *The Conference on L-functions*, Fukuoka, 2006 (L. Weng and M. Kaneko eds.), World Scientific, 2007, pp. 115–140.

[MN] K. Matsumoto and M. Nakasuji, Expressions of Schur multiple zeta-functions of anti-hook type by zeta-functions of root systems, arXiv : 2002 01676.

[NPY] M. Nakasuji, O. Phuksuwan, and Y. Yamasaki, On Schur multiple zeta functions: A combinatoric generalization of multiple zeta functions, *Adv. Math.* **333** (2018), 570–619.